BDeBooks.com

E-BOOK

www.BDeBooks.com
FB.com/BDeBooksCom
BDeBooks.Com@gmail.com

বাংলাদেশ কারিগরি শিক্ষা বোর্ডের চার বৎসর মেয়াদি প্রকৌশল ডিপ্লোমা শিক্ষাক্রমের কম্পিউটার এবং
কম্পিউটার সাইন্স অ্যান্ড টেকনোলজির চতুর্থ পর্বের ছাত্রছাত্রীদের জন্য সম্পূর্ণ নতুন সিলেবাস অনুযায়ী প্রণীত

ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স

Discrete Mathematics

Subject Code : 5942

রচনায়

ইঞ্জিনিয়ার মোঃ সিরাজুল ইসলাম
এমএসসি ইঞ্জিনিয়ারিং (বুয়েট)
অধ্যক্ষ, টেকনিক্যাল স্কুল ও কলেজ বি-বাড়ীয়া
প্রাক্তন অধ্যক্ষ, টেকনিক্যাল স্কুল ও কলেজ, চাঁদপুর
অধ্যক্ষ, টেকনিক্যাল স্কুল ও কলেজ, মুন্সীগঞ্জ
জুনিয়র ইনস্ট্রাক্টর (মেকানিক্যাল)
ঢাকা পলিটেকনিক ইনস্টিটিউট
তেজগাঁও, ঢাকা-১২০৮

প্রকৌশলী মোঃ ইমদাদুল হক
ডিপ্লোমা-ইন-ইলেকট্রিক্যাল ইঞ্জিনিয়ারিং
বিএসসি-ইন-কম্পিউটার সাইন্স অ্যান্ড ইঞ্জিনিয়ারিং
পরিচালক ও অধ্যক্ষ
নোয়াখালী আইডিয়াল পলিটেকনিক ইনস্টিটিউট
মাইজদী কোর্ট, নোয়াখালী

ইঞ্জিনিয়ার আনোয়ার হোসেন
ইনস্ট্রাক্টর ও বিভাগীয় প্রধান (কম্পিউটার)
চট্টগ্রাম মহিলা পলিটেকনিক্যাল ইনস্টিটিউট
চট্টগ্রাম
প্রাক্তন বিভাগীয় প্রধান (কম্পিউটার)
ন্যাশনাল পলিটেকনিক ইনস্টিটিউট, ফরিদপুর
শহীদ সিরাজ সিকদার কলেজ, শরীয়তপুর
পরীক্ষক, বাংলাদেশ কারিগরি শিক্ষা বোর্ড, ঢাকা

মোঃ আব্দুল্লাহ ইবনে নাজিম
বিএসসি-ইন-কম্পিউটার সাইন্স অ্যান্ড ইঞ্জিনিয়ারিং
ইনস্ট্রাক্টর (কম্পিউটার বিভাগ)
সিলেট পলিটেকনিক ইনস্টিটিউট
সিলেট

হক পাবলিকেশনস্
HAQUE PUBLICATIONS
৩৮ বাংলাবাজার (২য় তলা), ঢাকা-১১০০

প্রকাশক ঃ হক পাবলিকেশনস্-এর পক্ষে
হাজী জাহালারা হক
৩৮ বাংলাবাজার (২য় তলা), ঢাকা-১১০০
ফোন ঃ ৯৫৮০৩৭০

[প্রকাশক কর্তৃক সকল স্বত্ব সংরক্ষিত]

প্রথম সংস্করণ ঃ ১৪ জুলাই ২০০২
তৃতীয় সংস্করণ ঃ ১ মে ২০০৫
চতুর্থ সংস্করণ ঃ ১ এপ্রিল ২০১৩
পরিমার্জিত, পরিবর্ধিত ও সংশোধিত সংস্করণ ঃ
সপ্তম সংস্করণ ঃ ১৬ আগস্ট ২০১৪

প্রচ্ছদ পরিকল্পনায় ঃ মোঃ আশরাফুল হক আলো

সার্বিক তত্ত্বাবধানে ঃ ইঞ্জিঃ মোঃ হামিদুল হক মামুন

চিত্রাঙ্কনে ঃ এম সিকদার (মাসুম)

বর্ণবিন্যাসে ঃ **জি. মাওলা কম্পিউটার**

মুদ্রণে ঃ **জি. মাওলা প্রিন্টিং প্রেস**
৩৪ শ্রীস দাস লেন, বাংলাবাজার
ঢাকা-১১০০

[বাংলাদেশ পুস্তক প্রকাশক ও বিক্রেতা সমিতি কর্তৃক পূর্যীত]

মূল্য (MRP) ঃ ২৫০.০০ টাকা মাত্র

লেখকের কথা

মানুষ হল আশরাফুল মাখলুকাত। মানুষের কল্যাণার্থে পরম করুণাময় সবকিছু সৃষ্টি করেছেন। সৃষ্টির প্রতি আল্লাহর অগণিত দানের মধ্যে উৎকৃষ্ট দান হল মুখের ভাষা। এ দান যার ভেতর অনুপস্থিত তিনি বোবা-বধির। এ ভাষা শিক্ষা করা মানুষ মাত্রই জন্মগত অধিকার। আর এ শিক্ষার অন্যতম মাধ্যম হল লেখনী আবার এ লেখনীর মধ্যে প্রকৃত লেখনী হল জন্মভূমির ভাষাগত লেখনী।

বিশ্বের অন্যান্য ভাষাভাষী জাতিদের মতো বাংলা ভাষার লেখনীগত অধিকার আপনা-আপনি প্রতিষ্ঠিত হয়ে ওঠে নি। অনেক তাজা প্রাণ, মায়ের অশ্রু ও শত বোনের ইজ্জত কিংবা বিধবার বুকফাটা আর্তনাদ কোরবানীর বিনিময়ে বাংলা ভাষা আজ বিশ্বের দরবারে মর্যাদার আসন করে নিয়েছে। তাদের পুণ্য ত্যাগের স্বীকৃতিতেই বিশ্ব সংস্থার উপহার আন্তর্জাতিক মাতৃভাষা দিবস। আমরা তাদের পবিত্র ত্যাগকে সশ্রদ্ধচিত্তে স্মরণ করে বাংলায় পাঠ্যবই লেখায় ব্রতী হয়েছি। এমনি একটি প্রয়াস হল ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স। বইটির ৪র্থ প্রকাশনায় অনিচ্ছাকৃত ত্রুটি- বিচ্যুতিগুলোর সুপরামর্শ সাদরে গৃহীতব্য। বইটি লেখার উৎসাহ দানে জনাব মোঃ আশরাফুল হক আলো, ব্যবস্থাপনা পরিচালক নোয়াখালী আইডিয়াল পলিটেকনিক ইনস্টিটিউট, মাইজদী কোর্ট, নোয়াখালী এবং শুভানুধ্যায়ীদের প্রতি চিরকৃতজ্ঞতা প্রকাশ করছি।

পরিশেষে, যাদের উদ্দেশ্যে বইটি প্রণীত, তারা যদি বইটি অধ্যয়ন করে সামান্যও উপকৃত হয়, তবেই আমাদের এ প্রচেষ্টা সফল হবে বলে আশা করি।

ধন্যবাদান্তে

ইঞ্জিনিয়ার মোঃ সিরাজুল ইসলাম

ইঞ্জিনিয়ার আনোয়ার হোসেন

প্রকৌশলী মোঃ ইমদাদুল হক

মোঃ আব্দুল্লাহ ইবনে নাজিম

উৎসর্গ

মোঃ আশরাফুল হক (আলো) সাহেবকে
যার উৎসাহে আমাদের একাধিক
বই লেখা সম্ভব হয়েছে

Syllabus

Subject code	Name of the subject	T	P	C	MARKS				
					Theory		Practical		Total
					Cont. assess	Final exam.	Cont. assess	Final exam.	
5942	DISCRETE MATHEMATICS	2	0	2	20	80	25	25	150

AIMS

- To develop knowledge of mathematical logic applied in digital computers.
- To assist to acquire knowledge of mathematics in developing algorithms.
- To provide knowledge of mathematics in solving problems by computers.

SHORT DESCRIPTION

Basics of discrete mathematics; Vector & matrices; Counting; Probability theory; Graphs and Binary trees.

DETAIL DESCRIPTION

BASICS OF DISCRETE MATHEMATICS & RELATIONS

1. **Understand the basics of discrete mathematics.**
   - 1.1 Describe the importance of discrete mathematics in digital computer system.
   - 1.2 Describe the ideas of logic sets and functions in discrete mathematics.
   - 1.3 Define ONE-ONE and ONTO functions.
   - 1.4 Describe the algorithm & functions of real life problem.
   - 1.5 Describe the complexities of algorithm.
2. **Understand the fundamentals of relations.**
   - 2.1 Define relations.
   - 2.2 Mention the properties of relation.
   - 2.3 Describe the kinds of relations.
   - 2.4 Define inverse relation.
   - 2.5 Mention the representations of relations on finite sets.
   - 2.6 Describe the composition of relations.
   - 2.7 Describe the composition of relation and matrices.

VECTORS & MATRICES

3, Understand the concept of vectors and matrices.

- 3.1 Define vectors and matrices.
- 3.2 Define Echelon matrix .
- 3.3 Describe the Gaussian elimination in matrix form.
- 3.4 Describe the algorithm of matrix arithmetic.
- 3.5 Matrix solution of a system of Linear Equation .

COUNTING

4. Understand the concept of counting.

- 4.1 Define counting.
- 4.2 Describe the binomial coefficients and Pascal's triangle.
- 4.3 Describe Pigeonhole principle.
- 4.4 Describe the counting problems and tree diagram.

5. Understand the probability theory.

- 5.1 Define simple space and events.
- 5.2 Describe the finite probability spaces.
- 5.3 Describe the theorems on finite probability spaces.
- 5.4 Define conditional probability.
- 5.5 Define independent events.
- 5.6 Describe the repeated trials.

GRAPHS

6. Understand the features of graphs, directed graphs and machines.

- 6.1 Describe the graphs and multi graphs.
- 6.2 Describe the degree of a vertex.
- 6.3 State the meaning of connectivity.
- 6.4 Define finite graphs and trivial graphs.
- 6.5 Describe sub graph, isomorphic and homomorphic graph.

BINARY TREES

7. Understand the features of binary trees.

- 7.1 Define binary trees.
- 7.7 Describe the complete and extended binary trees.
- 7.3 Mention the properties of trees.
- 7.4 Describe the method of binary search trees.
- 7.5 Describe the method of traversing binary trees.

সূচিপত্র

অধ্যায়-১ : ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স অ্যান্ড রিলেশন

১.০ ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স এন্ড রিলেশন ১১
১.১ ডিজিটাল কম্পিউটার সিস্টেমে ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স এর গুরুত্ব ১২
১.২ ডিস্‌ক্রীট্ ম্যাথমেটিক্স এ লজিক, সেট এবং ফাংশন ১২
১.২.১ বিবৃতি বা প্রতিজ্ঞা ১৩
১.২.২ যৌগিক বিবৃতি ১৩
১.২.৩ বেসিক লজিক্যাল অপারেশন ১৩
১.২.৪ বিবৃতির বীজগণিত ১৫
১.২.৫ শর্তায়ন ১৬
১.২.৬ দ্বিমুখী শর্তায়ন ১৬
১.২.৭ বিবৃতিবাচক ফাংশন ১৭
১.২.৮ সেট ১৭
১.২.৯ ফাংশন ৩২
১.৩ এক-এক ফাংশন এবং সর্বগ্রাহী বা সার্বিক বা অনটু ফাংশন ৩৪
১.৩.১ সংযোজিত ফাংশন ৩৫
১.৩.২ রিকার্সসিভ ফাংশন ৩৬
১.৩.৩ ধ্রুব ফাংশন ৩৭
১.৩.৪ ইমেজ ৩৭
১.৪ প্রাত্যহিক জীবনের সমস্যাদির এলগরিদম ও ফাংশন ৩৭
১.৫ এলগরিদম কমপ্লেক্সসিটি ৪৩

অনুশীলনী-১

▸▸ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি ৪৫
▸▸ সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি ৪৫
▸▸ রচনামূলক প্রশ্নাবলি ৪৬
▸▸ সমস্যাবলি ৪৭

অনুশীলনী-১ এর সমাধান

▸▸ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৫০
▸▸ সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৫২
▸▸ রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৫৭
▸▸ সমস্যাবলি ৬৩

অধ্যায়-২ : অন্বয়

২.০ অন্বয় ৭৪
২.১ অন্বয় এর সংজ্ঞা ৭৪
২.১.১ অন্বয়ের ডোমেন এবং রেঞ্জ ৭৫
২.১.২ Diagraph এ Relation কে কীভাবে উপস্থাপন করা হয় ৭৬
২.১.৩ কার্তেসীয় গুণজ বা গুণন ৭৬
২.২ অন্বয়ের বৈশিষ্ট্য ৭৭
২.৩ অন্বয়ের প্রকারভেদ ৭৮
২.৪ বিপরীত অন্বয় ৮২
২.৫ সসীম সেটের রিলেশন উপস্থাপন ৮২
২.৬ অন্বয়ের যোজন বা কম্পোজিশন ৮৪
২.৭ অন্বয় ও ম্যাট্রিক্সের যোজন বা কম্পোজিশন ৮৫

অনুশীলনী-২

▸▸ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি ৮৭
▸▸ সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি ৮৭
▸▸ রচনামূলক প্রশ্নাবলি ৮৮
▸▸ সমস্যাবলি ৮৮

অনুশীলনী-২ এর সমাধান

▸▸ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৯০
▸▸ সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৯০
▸▸ রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৯৩
▸▸ সমস্যাবলি ১০১

অধ্যায়-৩ : ভেক্টরস্ এবং ম্যাট্রিক্স

৩.০ ভেক্টরস্ এবং ম্যাট্রিক্স ১০৮
৩.১ ভেক্টরস্ এবং ম্যাট্রিক্স এর সংজ্ঞা ১০৮
৩.২ ভেক্টরস্ ও ম্যাট্রিক্স পর্যালোচনা ১০৯
৩.৩ ম্যাট্রিক্স গণিতের এলগরিদম ১২১
৩.৪ বিপরীত বা ইনভার্স ম্যাট্রিক্স ১২৩
৩.৫ ম্যাট্রিক্সের ফর্ম পরিবর্তনের গাউশিয়ান ইলিমিনেশন ১২৪

অনুশীলনী-৩

▸▸ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি ১২৮
▸▸ সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি ১২৮
▸▸ রচনামূলক প্রশ্নাবলি ১২৯
▸▸ সমস্যাবলি ১২৯

অনুশীলনী-৩ এর সমাধান

▸▸ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৩১
▸▸ সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৩২
▸▸ রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ১৩৩
▸▸ সমস্যাবলি ১৪৩

অধ্যায়-৪ ঃ গণনা

৪.০ ভূমিকা ১৪৮
৪.১ গণনার সংজ্ঞা ১৪৯
৪.১.১ গুণিয়ক ব্যবহার বিধি ১৫০
৪.২ দ্বিপদী সহগ ও পাস্কেলের ত্রিভুজ ১৫১
৪.২.১ বিন্যাস ও সমাবেশ ১৫৪
৪.৩ কপোত বিবর মূলনীতি ১৬৪
৪.৩.১ অর্ডারড এবং আন অর্ডারড পার্টিশন ১৬৫
৪.৪ গণনার সমস্যাবলি এবং ট্রি ডায়াগ্রাম ১৬৬

অনুশীলনী-৪

- অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি ১৭০
- সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি ১৭০
- রচনামূলক প্রশ্নাবলি ১৭১
- সমস্যাবলি ১৭১

অনুশীলনী-৪ এর সমাধান

- অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৭৩
- সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৭৪
- রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ১৭৬
- সমস্যাবলি ১৮১

অধ্যায়-৫ ঃ সম্ভাব্যতা

৫.০ সম্ভাব্যতা ১৯১
৫.১ নমুনা ক্ষেত্র এবং ঘটনা এর সংজ্ঞা ১৯৪
৫.২ সীমাবদ্ধ সম্ভাব্যতা ক্ষেত্র ১৯৬
৫.৩ সীমাবদ্ধ সম্ভাব্যতা ক্ষেত্র এর উপপাদ্য বা সূত্রাবলি ১৯৭
৫.৪ শর্তযুক্ত সম্ভাব্যতা ২০০
৫.৫ স্বাধীন বা অনির্ভরশীল ঘটনা বা ইভেন্ট ২০২
৫.৬ পরীক্ষা বা ট্রায়াল এর পুনরাবৃত্তি ২০৩
■ সমাধানকৃত সমস্যাবলী ঃ ২১২

অনুশীলনী-৫

- অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি ২১৬
- সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি ২১৭
- রচনামূলক প্রশ্নাবলি ২১৭

অনুশীলনী-৫ এর সমাধান

- অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২২০
- সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২২২
- রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ২২৪

অধ্যায়-৬ ঃ চিত্রলেখ

৬.০ চিত্রলেখ ২৪৬
৬.০.১ চিত্রলেখ এর প্রকারভেদ ২৪৬
৬.১ গ্রাফ ও মাল্টিগ্রাফ ২৪৮
৬.২ ভার্টেক্স বা শীর্ষ মাত্রা ২৪৯
৬.৩ কানেকটিভিটি ২৫২
৬.৪ ফাইনাইট গ্রাফ এবং ট্রিভিঅ্যাল গ্রাফ ২৫৪
৬.৫ সাব গ্রাফ, আইসোমরফিক এবং হোমোমরফিক গ্রাফ ২৫৫

অনুশীলনী-৬

- অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি ২৫৭
- সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি ২৫৮
- রচনামূলক প্রশ্নাবলি ২৫৯
- সমস্যাবলি ২৬০

অনুশীলনী-৬ এর সমাধান

- অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৬২
- সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৬৩
- রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ২৬৮
- সমস্যাবলি ২৭১

অধ্যায়-৭ ঃ দ্বিমিক ট্রিজ

৭.০ বাইনারি ট্রি ২৭৪
৭.১ বাইনারি ট্রি এর সংজ্ঞা ২৭৪
৭.২ সম্পূর্ণ এবং বর্ধিত বাইনারি ট্রি ২৭৭
৭.৩ ট্রি-এর বৈশিষ্ট্য ২৭৯
৭.৪ বাইনারি সার্চ ট্রি এর পদ্ধতি ২৮০
৭.৫ ট্রাভার্সিং বাইনারি ট্রি এর পদ্ধতি ২৮৩

অনুশীলনী-৭

- অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি ২৮৭
- সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি ২৮৮
- রচনামূলক প্রশ্নাবলি ২৮৮
- সমস্যাবলি ২৮৯

অনুশীলনী-৭ এর সমাধান

- অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৯১
- সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৯১
- রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ২৯৫
- সমস্যাবলি ৩০৩

■ সুপার সাজেশনস্ ৩০৬
■ বাকাশিবো প্রশ্নাবলি ৩৩৬-৩৭৬

অধ্যায়-১

ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স অ্যান্ড রিলেশন
(Discrete Mathematics and Relations)

১.০ ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স এন্ড রিলেশন (Discrete Mathematics & Relations) ঃ

ডিসক্রীট (Discrete) বলতে কোন অবজেক্ট বা বিষয়বস্তুকে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র আলাদা বা স্বতন্ত্র অংশে (Elements) বিভাজন বা বিভক্তিকরণ প্রক্রিয়াকে বুঝায়। অতএব, কোন বিষয়বস্তু বা সমস্যাকে গাণিতিক সমাধানকল্পে একে বিভিন্ন স্বতন্ত্র অংশে বিভক্তিকরণপূর্বক সংজ্ঞায়িত করে বিশ্লেষণী পদ্ধতি দ্বারা সহজ সমাধানকরণ কৌশলকে ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স (Discrete Mathematics) বলা হয়।

রিলেশন (Relations) বলতে বিবিধ ক্ষেত্রের মধ্যকার উপাদানসমূহের শর্তাধীন বিষয়াদিকে বুঝায় প্রতিনিয়ত এসব রিলেশন এর ব্যবহার হয়ে থাকে। যেমন– ব্যবসা ও টেলিফোন নাম্বার, চাকরি ও বেতন, কোন লোক ও আত্মীয়তা প্রভৃতি। ম্যাথমেটিক্স এর ক্ষেত্রে কোন পূর্ণ সংখ্যা এবং এর ভগ্নাংশ একটি প্রকৃত সংখ্যা এবং এর থেকে বড় সংখ্যা ইত্যাদির মধ্যকার শর্তাধীন বিষয়াবলিকে রিলেশন (Relation) বলা হয়। এসব রিলেশন এর মাধ্যমে অধুনা কমিউনিকেশন নেটওয়ার্ক (Communications Networks), প্রজেক্ট সিডিউলিং (Project Scheduling) এবং কোন সেট থেকে সাধারণ গুণসম্পন্ন এলিমেন্টস শনাক্তকরণসহ বিবিধ বিষয়গুলো সমাধান করা সম্ভব হয়।

রাশিয়ার গণিতবিদ অধ্যাপক এল. ভি. ক্যানটোমোভিচ (L. V. Cantorovich) প্রথমে ব্যবসা বাণিজ্যে সমস্যা সমাধানের জন্য এরূপ গাণিতিক মডেল প্রয়োগ করেন। ১৯৩৯ খ্রিস্টাব্দে "Mathematical Methods in the organization and Planning of production" প্রবন্ধে তিনি বলেন ব্যবসায় অনেক ধরনের সমস্যা আছে। এসব সমস্যাকে স্বতন্ত্রভাবে সংজ্ঞায়িত করে বিশ্লেষণী পদ্ধতির দ্বারা সহজে সমাধান করা যায়। এরূপ বিশ্লেষণী পদ্ধতি প্রয়োগ করে সমস্যার গাণিতিক সমাধানকরণ কৌশলকে ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স বলা হয়।

একজন ছাত্র যখন ঘন্টায় 25 কি. মি. বেগে একটি মটর সাইকেল চালায়, প্রতি কিলোমিটারে পেট্রোল খরচ হয় 8.00 টাকা; যখন সে ঘন্টায় 40 কি. মি. বেগে চালায়, তখন প্রতি কিলোমিটারে পেট্রোল খরচ হয় 10. টাকা। পেট্রোল কেনার জন্য তার নিকট 200.00 টাকা আছে। স্বাভাবিকভাবে ছাত্রটি এক ঘন্টায় 200.00 টাকা খরচ করে সর্বাধিক দূরত্ব যেতে চাইবে। এর সমাধান ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স দ্বারা অতি সহজেই সমাধান করা যায়।

এই কৌশল প্রাপ্তব্য সম্পদকে এরূপ সর্বোত্তম উপায়ে বন্টন করে যেন ফার্মের দ্রব্যের/পণ্যের চাহিদা ও সরবরাহ বিধিকে পরিপূর্ণ করা যায়। এখানে ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স পরিকল্পনা ও কর্মপন্থা বাস্তবায়ন পরিকল্পনা প্রক্রিয়ার বিভিন্ন বিকল্পের মধ্য হতে ব্যয় ন্যূনতমকরণ অথবা মুনাফা সর্বোচ্চকরণ ইত্যাদির জন্য ব্যবহৃত হয়েছে। ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স , বন্টন, কার্য অর্পণ, পরিবহন ইত্যাদি সমস্যার ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা হয়।

১৯৪০ শতাব্দীতে শর্তাধীনে কোন কিছুর পরিমাণ কিভাবে সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন হবে এই সমস্যাগুলোর বেশিরভাগই ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স (Discrete Mathematics) দ্বারা সমাধান করা শুরু হয়।

ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স মূলত কাম্য সমাধান নির্ণয়ের অত্যাধুনিক পদ্ধতি। কিন্তু এগুলোর মধ্যে গুরুত্বপূর্ণ হচ্ছে সীমিত/দুষ্প্রাপ্য সম্পদের বন্টন সমস্যা।

যে সকল সমস্যার ক্ষেত্রে আমরা ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স প্রয়োগ করি তা নিম্নরূপ ঃ

১। একটি কম্পিউটার সিস্টেমে কী কী উপায়ে ভ্যালিড পাসওয়ার্ড বাছাই করা যায়?

২। একটি লটারী জেতার সম্ভাব্যতা কতটুকু?

৩। একটি নেটওয়ার্কে দুটি কম্পিউটারে কোন যোগসূত্র আছে কিনা?

৪। যোগাযোগের ক্ষেত্রে দুটি শহরের মধ্যে সংক্ষিপ্ত পথ কোনটি?

৫। কীভাবে পূর্ণ সংখ্যার তালিকা বর্ধিতক্রমে সাজান যায়?

৬। সাজানোর ক্ষেত্রে কতগুলো পর্যায় দরকার?

৭। দুটি পূর্ণ সংখ্যার সংযোগে কীভাবে একটি সার্কিট প্রণয়ন করা যায়?

৮। কতগুলো ভ্যালিড ইন্টারনেট এ্যাড্রেস সেখানে রয়েছে?

আরোও সহজভাবে বলতে গেলে ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স সাধারণত কোন অবজেক্টকে গণনা করা, নির্দিষ্ট সেটসমূহের মধ্যকার সম্পর্ক পর্যালোচনা এবং নির্দিষ্ট পর্যায়গুলো বিশ্লেষণ করা ইত্যাদি কারণে ব্যবহার করা হয়। ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স এর গুরুত্বপূর্ণ মূল লক্ষ্য হলো কম্পিউটিং মেশিনের দ্বারা তথ্য সংরক্ষণ ও সহজ প্রাপ্তি ডিসক্রীট অবয়বের মাধ্যমে প্রবৃদ্ধি ঘটানো।

১.১ ডিজিটাল কম্পিউটার সিস্টেমে ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স এর গুরুত্ব (Importance of Discrete Mathematics in digital computer system) ঃ

ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স হল বিচ্ছিন্ন গণিত। অর্থাৎ সমস্যাকে বিভিন্ন ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র অংশে বিচ্ছিন্ন করে তার ম্যাথমেটিক্যাল বা গাণিতিক সমাধানকৃত সর্বাধিক কৌশলই হল ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স। ডিজিটাল কম্পিউটার শুধু গণনাকারী যন্ত্রই নয়। এর কার্য পরিধি আরও অনেক ব্যাপক। এর সাহায্যে গণনা করা যায়। গাণিতিক হিসাব যেমন- যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ করা যায়। এমনকি এই কম্পিউটার মানুষের চেয়েও নির্ভুলভাবে যৌক্তিক সিদ্ধান্তমূলক কাজের দ্রুততর সমাধান দিতে সক্ষম। কাজের অনেক নির্দেশ কম্পিউটারের স্মৃতিতে সংরক্ষণ করা সম্ভব এবং প্রয়োজনে একটির পর একটি করে সেসব নির্দেশ নির্ভুলভাবে ও তড়িৎ গতিতে নির্বাহ করা যায়।

ডিজিটাল কম্পিউটার সাধারণ কম্পিউটার থেকে অনেক উন্নত ও বৈশিষ্ট্যমন্ডিত। ডিস্ক্রীট ম্যাথমেটিক্স, কোন বিষয়বস্তুকে ডিসক্রীট আকারে প্রকাশে আত্মনিয়োগ করে। সব ধরনের ডিসক্রীট অবয়ব সেট দ্বারা গঠিত যা আবার গণনা (Counting) ও অন্বয় (Relation) যুক্ত উপাদানের সমাহার। ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স বস্তুকে গণনা, নিরূপণযোগ্য সেটের উপাদানের মধ্যে অন্বয় নির্ধারণসহ প্রক্রিয়া সংঘটনের ক্রম ধাপ বিশ্লেষণে ব্যাপৃত হয়।

ডিজিটাল কম্পিউটার সিস্টেমে তথ্য উপাত্ত (Information) জমা করা (Stored) এবং সুনিপুণভাবে পরিচালনা (Manipulated) করাই ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স ব্যবহারের মূল কারণ (key Reason), ডেটা স্ট্রাকচার (Data structure), এলগরিদম (Algorithms), ডেটা বেস তত্ত্ব (Data Base Theory), অটোমেটা তত্ত্ব (Auto mata Theory), ফরমাল ল্যাংগুয়েজ (Formal languages), কমপাইলার তত্ত্ব (Compiler Theory), কম্পিউটার নিরাপত্তা (Computer Security) এবং অপারেটিং সিস্টেম (Operating System) প্রভৃতি বিশ্লেষণ ও পরিচালনে ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স এর গুরুত্ব ও প্রয়োজনীয়তা অনস্বীকার্য।

১.২ ডিস্ক্রীট্ ম্যাথমেটিক্স এ লজিক, সেট এবং ফাংশন (Logic sets and Functions in Discrete Mathematics) ঃ

লজিক (Logic) ঃ সকল ম্যাথমেটিক্স সম্পর্কিত যুক্তির ভিত্তিকে লজিক (Logic) বলা হয়। কম্পিউটিং মেশিন বিনির্মাণে, কৃত্রিম বুদ্ধি বিবেচনায়, কম্পিউটার প্রোগ্রামিং, কম্পিউটার প্রোগ্রামিং ল্যাংগুয়েজ এবং কম্পিউটার বিজ্ঞানের অন্যান্য ক্ষেত্রে লজিক এর ব্যবহারিক প্রয়োগ পরিলক্ষিত হয়।

লজিক নীতি ম্যাথমেটিক্স এর আনুপূর্বিক বর্ণনার সারমর্মিক অর্থ প্রদান করে। এই নীতি ম্যাথমেটিক্স সম্পর্কিত যুক্তির বৈধ ও অবৈধতার মধ্যে পার্থক্য নির্ধারণে ব্যবহৃত হয়। এতদসত্ত্বেও কম্পিউটার সার্কিট বিনির্মাণ (Design of computer circuit), কম্পিউটার প্রোগ্রাম তৈরি, প্রোগ্রামের সঠিকতা সম্পর্কে নিশ্চিত হওয়া জনিত বহুবিধ বিষয়ে এই নীতির প্রভূত ব্যবহার দেখা যায়।

১.২.১ বিবৃতি বা প্রতিজ্ঞা (Propositions) ঃ

বিবৃতি বা প্রতিজ্ঞা (Propositions) হল এমন একটি ঘোষণামূলক বাক্য যা সত্য বা মিথ্যা (True Or False) কিন্তু উভয় নয়।

উদাহরণ-১.১। নিচের সকল বিবৃতি বা প্রতিজ্ঞা (Proposition) বিচার কর।

(a) ওয়াশিংটন ডি. সি. হল ইউনাইটেড স্টেট অব আমেরিকা এর রাজধানী।

(b) টরেন্টো হল কানাডার রাজধানী।

(c) 1 + 1 = 2

(d) 2 + 2 = 3

উপরিউক্ত (a) এবং (c) প্রতিজ্ঞাটি হল সত্য (True); যেখানে (b) এবং (d) হল মিথ্যা (False)

কতকবাক্য যা প্রতিজ্ঞা নয় নিম্নের উদাহরণে উল্লিখিত হল-

উদাহরণ-১.২। নিচের বাক্যগুলো বিবেচনা কর।

(a) সময় কত? (b) সতর্কতার সাথে পড়

(c) x + 1 = 2 (d) x + y = z

উপরিউক্ত (a) এবং (b) বাক্যটি প্রতিজ্ঞা নয়, কারণ তারা বিবৃতি (Statement) নয়। (c) এবং (d) প্রতিজ্ঞা নয়, কারণ তারা সত্য ও মিথ্যা কোনটিই নয়।

সত্য মানবিশিষ্ট প্রতিজ্ঞাকে T দ্বারা এবং মিথ্যা মানবিশিষ্ট প্রতিজ্ঞাকে F দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

১.২.২ যৌগিক বিবৃতি (Compound propositions) ঃ

অনেক উক্তি বা বিবৃতিই যৌগিক, যা উপবিবৃতির একত্রকরণ এবং বিভিন্ন আলোচনার ধারাবাহিক সংযোজনে গঠিত হয়ে থাকে। এ ধরনের একত্রকরণ বিবৃতিকে যৌগিক বিবৃতি (Compound Proposition) বলে। একটি বিবৃতিকে মৌলিক বলা হবে যদি একে অনুরূপ বিবৃতিকে বিভাজন করা না যায়, যা মিশ্রিত নয়।

উদাহরণ-১.৩।

(a) "গোলাপি হয় লাল এবং বেগুনি হয় নীল" এটি একটি যৌগিক বিবৃতি। এখানে "গোলাপি হয় লাল" এবং "বেগুনি হয় নীল" দু'টি স্বতন্ত্র বিবৃতি পাওয়া যায়।

(b) "জন হয় বুদ্ধিমান অথবা সে প্রতি রাত্রে অধ্যয়ন করে।" এটি একটি যৌগিক বিবৃতি। দুটি উপ বিবৃতি "জন হয় বুদ্ধিমান" এবং "জন প্রতি রাত্রে লেখাপড়া করে" নিয়ে গঠিত।

(c) উপরের দুটি বিবৃতি (a) এবং (b) উভয়ই মৌলিক বিবৃতি, এদেরকে আরও স্বাভাবিক কথায় বিভাজন করা যায় না।

১.২.৩ বেসিক লজিক্যাল অপারেশন (Basic Logical Operations) ঃ

তিনটি বেসিক লজিক্যাল অপারেশন যোজন (Conjunction), বিযোজন (Disjunction) এবং অস্বীকারকরণ (Negation) তিনটি ইংরেজি শব্দ যথাক্রমে এন্ড (and), অর (or) এবং নট (not) দ্বারা নির্দেশিত হয়।

১। যোজন (Conjunction), $p \wedge q$ ঃ

যে কোন দুটি বিবৃতি এন্ড (and) দ্বারা যুক্ত হয়ে যৌগিক বিবৃতি (Compound Proposition) গঠিত হলে তাকে মূল বিবৃতির যোজন (Conjunction) বলা হয়।

সাংকেতিকভাবে, $p \wedge q$

পড়া হয়, p এন্ড q যা p এবং q এর মধ্যে যোজন। যেহেতু 'p and q' হল একটি বিবৃতি। এর সত্য মান আছে এবং এই সত্য মান p এবং q এর সঠিক মানের ওপর নির্ভরশীল। বিশেষত,

"যদি p এবং q সত্য হয়, তখন $p \wedge q$ সত্য অন্যথায় $p \wedge q$ মিথ্যা"।

উদাহরণ-১.৪। নিচের চারটি বিবৃতি বিবেচনা কর ঃ

(i) প্যারিস ফ্রান্সে এবং $2 + 2 = 4$ (ii) প্যারিস ফ্রান্সে এবং $2 + 2 = 5$

(iii) প্যারিস ইংল্যান্ডে এবং $2 + 2 = 4$ (iv) প্যারিস ইংল্যান্ডে এবং $2 + 2 = 5$

কেবল প্রথম বিবৃতিটি সঠিক। অন্য বিবৃতির প্রতিটি মিথ্যা (False)।

২। বিযোজন (Disjunction), p v q ঃ

যে কোন দুটি বিবৃতি অর (or) শব্দ দ্বারা যুক্ত হয়ে যৌগিক বিবৃতি (Compound proposition) গঠিত হলে তাকে বিযোজন (Disjunction) বলা হয়।

সাংকেতিকভাবে p v q.

পড়া হয় "p or q" যা p এবং q এর মধ্যে বিযোজন। P v P সত্য হবে নাকি মিথ্যা হবে তা বিবেচ্য বিষয়। এখানে স্মরণ রাখা দরকার যে, P প্রপোজিশন বা বিবৃতি সত্য হতে পারে আবার মিথ্যাও হতে পারে। q বিবৃতি বা প্রপোজিশন সত্য হতে পারে আবার মিথ্যাও হতে পারে। pvq যৌগিক বিবৃতি (প্রপোজিশন) মিথ্যা হবে, যদি p মিথ্যা হয় এবং q মিথ্যা হয়। অন্যথায় pvq বিবৃতি (Proposition) সত্য হবে। এ বিষয়ে নিম্নের টেবিলের দিকে নজর দাও। নিম্নের টেবিলে সত্য এর জন্য T এবং মিথ্যার জন্য F ব্যবহার করা হয়েছে।

বিশেষত ঃ

"যদি p এবং q মিথ্যা হয়, তখন p v q মিথ্যা হবে; অন্যথায় p v q সত্য।"

TABLE-1 The Truth Table for the Negation of a Proposition		TABLE-2 The Truth Table for the Conjunction of Two Propositions		TABLE-3 The Truth Table for the Disjunction of Two Propositions	
p	$\neg p$	$p\ q$	$p \wedge q$	$p\ q$	$p \vee q$
T	F	T T	T	T T	T
F	T	T F	F	T F	T
		F T	F	F T	T
		F F	F	F F	F

টেবিল ১.১ লজিক্যাল অপারেশন

উদাহরণ-৫। নিচের চারটি বিবৃতি বিবেচনা কর ঃ

(i) প্যারিস ফ্রান্সে অর (or) $2 + 2 = 4$ (ii) প্যারিস ফ্রান্সে অর (or) $2 + 2 = 5$

(iii) প্যারিস ইংল্যান্ডে অর (or) $2 + 2 = 4$ (iv) প্যারিস ইংল্যান্ডে অর (or) $2 + 2 = 5$

কেবল সর্বশেষ বিবৃতিটি মিথ্যা (False)। এছাড়া অন্যান্য প্রতিটি বিবৃতি সত্য, যেহেতু উপ বিবৃতিগুলোর একটি সত্য।

৩। অস্বীকারকরণ (Negation) $\neg p$ ঃ একটি প্রদত্ত বিবৃতি p, এর অন্য বিবৃতিকে অস্বীকারকরণ (Negation) বলা হয়। সাংকেতিক ভাবে-

$\neg p$

পড়া হয় "not p", p এর অস্বীকাকরণ বুঝায়।

$\neg p$ এর সঠিক মান p এর সঠিক মানের ওপর নির্ভরশীল।

বিশেষত ঃ

"যদি p সঠিক হয়; তখন $\neg p$ মিথ্যা হয় এবং যদি p মিথ্যা হয়, তবে $\neg p$ সত্য হবে।"

উদাহরণ-১.৬। নিচের বিবৃতিগুলো বিবেচনা কর ঃ

(i) প্যারিস ফ্রান্সে (অস্বীকারকরণ হল মিথ্যা)

(iii) প্যারিস ফ্রান্সে নয়। (অস্বীকারকরণ হল সত্য)

(iv) $2 + 2 = 5$ (অস্বীকারকরণ হল সত্য)

(vi) $2 + 2 \neq 5$ (অস্বীকারকরণ হল মিথ্যা)

এখানে (ii) এবং (iii) হল (i) এর অস্বীকারকরণ (Negative) এবং (v) ও (vi) হল প্রতিটি (iv) এর অস্বীকারকরণ (Negation) যেহেতু (i) সঠিক (ii) এবং (iii) হল মিথ্যা এবং যেহেতু (iv) মিথ্যা, (v) এবং (vi) হল সত্য।

মন্তব্য ঃ p & q, p. q or pq for $p \wedge q$

$p + q$ for $p \vee q$

$p', \bar{p}$ or $\sim p$ for $\neg p$

৪। টটোলজি (Tautology) ঃ কোন যৌগিক উক্তির সত্যতা মান যদি এর মৌল উক্তিগুলোর সত্যতা মানের সম্ভাব্য প্রতিটি সমাবেশের জন্য সত্য হয়, তবে উক্ত যৌগিক (Compound) উক্তিকে টটোলজি (Tautology) বলে। p উক্তিটি টটোলজি হলে তাকে $\neg p$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

উদহারণ ঃ

P	~ P	P = pv ~ p
T	F	T
F	T	T

যেহেতু উপরিউক্ত ছকে pv ~ p এর সত্যতা মান সকল ক্ষেত্রে সত্য, সুতরাং pv ~ p একটি টটোলজি।

৫। অসঙ্গত উক্তি (Contradiction) ঃ কোন যৌগিক উক্তির সত্যতা মান যদি এর মৌলিক উক্তিগুলোর সত্যতা মানের সম্ভাব্য প্রতিটি সমাবেশের জন্য মিথ্যা হয় তবে উক্ত যৌগিক উক্তিকে অসঙ্গত (Contradiction) উক্তি বা বিবৃতি (Proposition) বলে।

একটি যৌগিক উক্তি টটোলজি বা অসঙ্গত তা নির্ণয় এর জন্য উক্তির সত্যতা ছক গঠন করতে হয়। যদি কোন উক্তির (বিবৃতি) সত্যতা ছক (Truth table) এর শেষ কলামের সকল সত্যতা মান T হয় তবে উক্তিটি টটোলজি এবং সকল সত্যতা মান F হয় তবে উক্তিটি অসঙ্গত (Contradiction) উক্তি।

উদাহরণ ঃ

p	¬ p	p ^¬ p (p ^~p)
T	F	F
T	T	F

যেহেতু উপরিউক্ত ছকে $p \wedge \neg p$ এর সত্যতা সমান সকল ক্ষেত্রে মিথ্যা, সেহেতু $p \wedge \neg p$ একটি অসঙ্গত উক্তি।

১.২.৪ বিবৃতির বীজগণিত (Algebra of propositions) ঃ

বিবৃতি নিচের টেবিলের নীতিগুলো মেনে চলে-

	Idempotent laws
(1a) $p \vee p \equiv p$	(1b) $p \wedge p \equiv p$
	Associative laws
(2a) $(p \vee q) r \equiv p \vee (qr)$	(2b) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
	Commutative laws
(3a) $p \vee q \equiv q \vee p$	(3b) $p \wedge q \equiv q \wedge p$
	Distributive laws
(4a) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	(4b) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
	Identity laws
(5a) $p \vee T \equiv p$	(5b) $p \wedge F \equiv p$
(6a) $p \vee T \equiv T$	(6b) $p \wedge F \equiv F$
(7a) $p \vee p \equiv T$	**Complement laws**
(8a) $\neg T \equiv F$	(7b) $p \wedge \neg p \equiv F$
	(8b) $\neg F \equiv T$
(9) $\neg \neg p \equiv p$	**Involution law**
(10a) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	**Demorgan's laws**
	(10b) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

টেবিল ১.২ বিবৃতির বীজগাণিতিক নীতি

১.২.৫ শর্তায়ন (Conditional) ঃ

P এবং Q দুটি উক্তিকে যদি ..... তবে ..... । অর্থাৎ যদি p তবে Q দ্বারা যুক্ত করে নতুন উক্তি গঠন করা হয় তবে উক্ত উক্তিটিকে শর্তায়ন (Conditional) বলা হয়। একে $P \rightarrow Q$ দ্বারা সূচিত করা হয় এবং একে পড়া হয় "যদি P তবে Q"

উদাহরণ ঃ

(i) P : 4 একটি জোড় সংখ্যা

Q : 4.2 দ্বারা বিভাজ্য।

উক্তি দুটির শর্তায়ন উক্তি হল ঃ

$P \rightarrow Q$ ঃ যদি 4 একটি জোড়া সংখ্যা হয়, তবে 4. 2 দ্বারা বিভাজ্য।

(ii) P ঃ টাকা পেলে

Q ঃ আমি ঢাকা যাব।

উক্তি দুটির শর্তায়ন উক্তি হলো ঃ

$P \rightarrow Q$ ঃ যদি টাকা পাই তবে আমি ঢাকা যাব।

বিশেষত ঃ

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

P ও Q উক্তি দুটির শর্তায়িত উক্তি $P \rightarrow Q$ কেবলমাত্র তখনই মিথ্যা হবে যখন P সত্য Q মিথ্যা হয়।

১.২.৬ দ্বিমুখী শর্তায়ন (Bioconditional) ঃ

P এবং Q দুটি বিবৃতি বা উক্তিকে "যদি এবং কেবল যদি" দ্বারা যুক্ত করে নতুন উক্তি বা বিবৃতি গঠন করা হয় তাকে দ্বিমুখী শর্তায়ন বলে। এবং একে $p \cap Q$ দ্বারা সূচিত করা হয়। $P \cap Q$ কে P যদি এবং কেবল যদি Q পড়া হয়।

উদাহরণ ঃ

(i) P : L_1 ও L_2 সমান্তরাল

Q : L_1 ও L_2 এর ঢাল সমান।

বিবৃতি (Proposition) দুটির দ্বিমুখী শর্তায়ন (Biconditional) হলো ঃ

$P \cap Q$: L_1 ও L_2 সমান্তরাল যদি এবং কেবল যদি L_1 ও L_2 এর ঢাল সমান।

(ii) P : 4 একটি জোড় সংখ্যা

Q : $3^2 + 4^2 = 5^2$

উক্তি দুটির দ্বিমুখী শর্তায়ন উক্তি হলো ঃ

$P \cap Q$: 4 একটি জোড় সংখ্যা যদি এবং কেবল যদি $3^2 + 4^2 = 5^2$

বিশেষত ঃ

P	Q	$P \cap Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

P ও Q উক্তি দুটির দ্বিমুখী শর্তায়ন শর্তায়ন $P \cap Q$ সত্য হবে যদি P এবং Q উভয়ই সত্য বা মিথ্যা হয়।

১.২.৭ বিবৃতিবাচক ফাংশন (Propositional Functions) ঃ

ধরা যাক, A হল একটি প্রদত্ত সেট। বিবৃতিবাচক ফাংশন নিম্নরূপভাবে প্রকাশ করা হয়।

p(x)

যার ধর্ম p(a) সত্য অথবা মিথ্যা হয় প্রতিটির জন্য $a \in A$ হয়। সেট A কে p(x) এর ডোমেইন (Domain) বলা হয় এবং Tp সকল A এর উপাদানের জন্য যার p(a) সত্য হওয়াকে p(x) এর সত্য সেট বলা হয়।

অন্যভাবে,

$Tp = \{x : x \in A, p(x) \text{ is true}\}$

বা $Tp = \{x : p(x)\}$.

উদাহরণ-১.৭। প্রতি বিবৃতি বাচক ফাংশন p(x), ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যায় সেট N হলে নির্ভুল সেট নির্ণয় কর।

(a) ধর p(x) হয় "x + 2 > 7"

সমাধান ঃ এর নির্ভুল সেট হয়–

$\{x : x \in N, x + 2 > 7\}$

$= \{6, 7, 8, ------\}$

সকল পূর্ণ সংখ্যা 5 এর থেকে বৃহত্তর ধরে।

(b) ধর, p(x) হয় "x + 5 ∠ 3"

সমাধান ঃ এর নির্ভুল সেট হয়,

$\{x : x \in N, x + 5 \angle 3\} = \phi$ শূন্য সেট।

(c) ধরা যাক, p(x) হয় "x + 5 > 1"

উত্তর ঃ এর নির্ভুল সেট হয়-

$\{x : x \in N, x + 5 > 1\} = N$

তাই p(x) প্রতিটি উপাদানের জন্য সত্য।

১.২.৮ সেট (Set) ঃ

সুনির্দিষ্টভাবে সংজ্ঞায়িত বস্তুসমূহের সমাহার বা তালিকাকে সেট বলা হয়। সেটে অন্তর্ভুক্ত বস্তুসমূহ সংখ্যা, বর্ণমালার বর্ণ, মানুষ, নদী ইত্যাদি যে কোন জিনিস হতে পারে। যে সমস্ত বস্তু নিয়ে সেট গঠিত হয় সেগুলোকে সেটের উপাদান বলা হয়।

বর্ণমালার বড় হাতের বর্ণ (Capital letters) দ্বারা সাধারণত সেট এবং ছোট হাতের বর্ণ (Small letters) দ্বারা সেটের উপাদান নির্দেশ করা হয়। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় যে, যদি A সেটের উপাদানগুলো b, f, g, h হয় তবে $A = \{b, f, g, h\}$। লক্ষণীয় যে, উপাদানগুলোর একটিকে আর একটি থেকে ", " কমার দ্বারা পৃথক করা হয়েছে এবং সবগুলো উপাদান { } ব্র্যাকেটের মধ্যে সন্নিবিষ্ট করা হয়েছে।

সেট বর্ণনার পদ্ধতিসমূহ (Methods of Describing Sets) ঃ

সেটকে সাধারণত দুটি পদ্ধতির সাহায্যে বর্ণনা করা যায় -

(i) টেবুলার (Tabular) বা রোস্টার পদ্ধতি (Roster method) ঃ যদি কোন সেট বর্ণনা করার সময় সেটের সকল সদস্যের তালিকা লেখা হয় তখন সেট লেখার পদ্ধতিকে টেবুলার বা রোস্টার পদ্ধতি বলে। যেমন ঃ সেট $A = \{1, 2, 3, 4\}$

(ii) সেট বিল্ডার (Set builder) বা রুল (Rule) পদ্ধতি (Method) ঃ যদি কোন সেট বর্ণনা করার সময় সেটের সকল উপাদানের তালিকা না লিখে, উপাদানের শর্ত উল্লেখ করে দেয়া হয়, তখন সেট বর্ণনার পদ্ধতিকে সেট বিল্ডার (Set builder) বা রুল (Rule) বা বর্ণনা (Description) পদ্ধতি (Method) বলে।

যেমন ঃ $A : \{x : 4 < x < 10, \text{ where } X \in Z\}$

উপরের সেটটি টেবুলার পদ্ধতিতে লেখলে হয়

A ঃ {5, 6, 7, 8, 9}

$\in$ এবং $\notin$ প্রতীকের ব্যবহার ঃ

একটি সেটের সাথে তার সদস্যের সম্পর্ক $\in$ (epsilon) প্রতীকের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়। যদি A সেটের a একটি সদস্য হয়, তবে ইহাকে $a \in A$ লিখা হয় এবং A সেটের a একটি সদস্য (a বিলংস টু A পড়া হয়) পড়তে হয়। $a \notin A$ দ্বারা A সেটের a সদস্য নয় অথবা A সেটে a নাই (a does not belong to A পড়া হয়) পড়তে হয়।

উদাহরণ ঃ $A = \{1,2,3,4\}$ সেটে $1 \in A, 2 \in A, 3 \in A, 4 \in A$ কিন্তু $5 \notin A, 6 \notin A$ ইত্যাদি।

সেটের সমতা (Equality of Set) ঃ A এবং B সেট দুটি সমান হবে যদি A সেটের সবগুলো উপাদান B সেটের উপাদান হয় এবং B সেটের সবগুলো উপাদান A সেটের উপাদান হয়; তখন লেখা হয় $A = B$.

উদাহরণ-১.৮। $A = \{a, b, c, d\}$ এবং $B = \{c, a, d, b\}$ দুটি সেট। 'A সেটের উপাদান a, b, c, d সবগুলোই B সেটেরও উপাদান আবার B সেটের উপাদান c, a, d, b সবগুলোই A সেটেরও উপাদান। সুতরাং, A এবং B সেট দুটি সমান। স্পষ্টতই, সেটে অন্তর্ভুক্ত উপাদানসমূহের পুনর্বিন্যাসের ফলে সেটের কোন পরিবর্তন হয় না।

উদাহরণ-১.৯। $C = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $D = \{2, 3\}$ এবং $F = \{2, 3, 3, 2\}$ তিনটি সেট। এখানে, $C = D = F$; লক্ষণীয় যে, কোন উপাদান অথবা উপাদানসমূহের পুনরাবৃত্তির ফলে সেটের কোন পরিবর্তন হয় না।

শূন্য সেট (Null Set) ঃ সেটে কোন উপাদান না থাকলে অর্থাৎ উপাদানবিহীন সেটকে খালি সেট বা **শূন্য** সেট (Null set) বলে। শূন্য সেট বা খালি সেট ϕ সংকেত দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যেমন ঃ সেট $A = \{\ \}$, A সেটে কোন উপাদান নেই তাই এটি ফাঁকা সেট $\varnothing$ (ফাই) দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উপসেট (Sub Set) ঃ যদি A সেটের প্রতিটি উপাদান B সেটেরও উপাদান হয় তবে A- কে B সেটের উপসেট (Subset) বলা হয়। স্পষ্টতই, A সেট B এর উপসেট হলে, যদি $x \in A$ হয় তবে অবশ্যই $x \in B$ হবে। A ও B সেট দুটির এ সম্পর্ক $A \subset B$ সংকেত দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ-১.১০। $C = \{1, 3, 5\}$ সেটটি $D = \{5, 6, 3, 9, 1\}$ সেটের একটি উপসেট।

পাওয়ার সেট (Power Sets) ঃ

ধরি $A = \{1,2,3\}$ এখন A সেটটির সদস্য অংক তিনটির একটি, দুইটি এবং তিনটি নিয়ে উপসেট গঠন করতে বলা হলে আমরা $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$ উপসেটগুলি গঠন করতে পারি। আবার ঐ অংক তিনটির কোনটিকে না নিয়া আমরা ফাঁকা উপসেট $\varnothing$ বা $\{\ \}$ গঠন করতে পারি। অর্থাৎ A এর প্রদত্ত সংখ্যা তিনটির একটি, দুইটি এবং তিনটিকে অথবা এদের কোনটিকে না নিয়ে আমরা মোট ৮টি উপসেট গঠন করতে পারি। ইহা ছাড়া আর কোন উপসেট গঠন করা যাবে না। সুতরাং আমরা বলতে পারি-

A সেটটির ${}^3C_0 + {}^3C_1 + {}^3C_2 + {}^3C_3 = 1 + 3 + 3 + 1 = 2^3 = 8$টি উপসেট বিদ্যমান। এখানে A এর সমস্ত উপসেটের সেট $\{\varnothing\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$ হল A এর পাওয়ার সেট।

সংজ্ঞা ঃ কোন শান্ত সেট A এর সমস্ত উপসেটের সেটকে A এর পাওয়ার সেট (বা সূচক সেট) বলে। A এর পাওয়ার সেটকে $P(A)$ বা 2^A দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

গাণিতিক ভাবে $P(A) = \{x : x \subset A\}$

উদাহরণ-১.১১। ধরি, $A = \{a\}, B = \{a, b\}, C = \{a, b, c\}$ এখানে $P(A) = \{\varnothing, \{a\}\}$ এবং $(n(p(A) = 2^1 = 2$

$P(B) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$ এবং $n(p(B) = 2^2 = 4$

$P(C) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ এবং $n(p(C)) = 2^3 = 8$

নিশ্ছেদ সেট (Disjoint set) ঃ দুটি সেটের কোন সাধারণ বা কমন উপাদান না থাকলে সেট দুটিকে নিশ্ছেদ সেট (Disjoint set) বলে। $A = \{1, 3, 7, 8\}, B = \{2, 4, 7, 9\}$ সেট দুটি নিশ্ছেদ সেট নয় কেননা, $7 \in A$ এবং $7 \in B$.

$E = \{x, y, z\}, F = \{a, b, c\}$ সেট দুটি নিশ্ছেদ সেট।

সসীম সেট (Finite set) ঃ যে সেটের উপাদানগুলিকে একের পর এক গণনা করে নিঃশেষ করা যায়, তাকে সসীম সেট বলা হয়।

উদাহরণ-১.১২। A = {x / x ঢাকা পলিটেকনিকের 1991 সালের ডিপ্লোমা ফাইনাল পরীক্ষার্থী}, এখানে A অবশ্যই একটি সসীম সেট। কারণ ঢাকা পলিটেকনিকের 1991 সালের ডিপ্লোমা ফাইনাল পরীক্ষার্থীর সংখ্যা নির্ণয় করা যায়।

অসীম সেট (Infinite Set) ঃ

যে সেটের উপাদান সংখ্যা অনন্ত (অসীম) অর্থাৎ উপাদানগুলি গণনা করে নিঃশেষ করা যায় না, তাকে অসীম সেট বলা হয়।

উদাহরণ-১.১৩। N = {1, 2, 3, 4, 5, ...} সেটটি একটি অসীম সেট। কারণ স্বাভাবিক সংখ্যাগুলিকে গণনা করে শেষ করা যায় না।

স্বাভাবিক সংখ্যা (Natural numbers) ঃ

1, 2, 3, 4, 5 ... ইত্যাদি সংখ্যাগুলিকে স্বাভাবিক সংখ্যা বলা হয়। স্বাভাবিক সংখ্যার সেটকে N দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

সুতরাং N = {1, 2, 3, 4, ...} অথবা N = {x : x স্বাভাবিক সংখ্যা}.

$= \{x : x \in N\}$

পূর্ণসংখ্যা (Integer Numbers) ঃ

শূন্যসহ সকল ধনাত্মক ও ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা বা অখন্ড সংখ্যাকে পূর্ণ সংখ্যা বলা হয়।

... –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3 ... ইত্যাদি সংখ্যাগুলিকে পূর্ণ সংখ্যা বলা হয়। পূর্ণসংখ্যার সেটকে Z দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

সুতরাং Z = {.... –2, –1, 0, 1, 2, ...}

মূলদসংখ্যা (Rational numbers) ঃ

যে সংখ্যাকে m/n আকারে প্রকাশ করা যায়, যেখানে m, n পূর্ণসংখ্যা এবং $n \neq 0$; সে সংখ্যাকে মূলদ সংখ্যা অথবা আনুপাতিক সংখ্যা বলা হয়। যদি n = 1 হয়, তবে প্রত্যেক পূর্ণসংখ্যাই মূলদ সংখ্যা হবে। মূলদ সংখ্যার সেটকে Q দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

সুতরাং $Q = \left\{\frac{m}{n} / \text{ m,n পূর্ণসংখ্যা এবং } n \neq 0\right\}$.

অমূলদ সংখ্যা (Irrational numbers) ঃ

যে সংখ্যাকে m/n আকারে প্রকাশ করা যায় না, যেখানে m, n পূর্ণসংখ্যা এবং $n \neq 0$; সে সংখ্যাকে অমূলদ সংখ্যা বলা হয়। অমূলদ সংখ্যার সেটকে Q^c দ্বারা নির্দেশ করা হয়। সুতরাং $Q^c = \{\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \pi, e$ ইত্যাদি$\}$।

বাস্তব সংখ্যা (Real numbers) ঃ

সকল মূলদ এবং অমূলদ সংখ্যার সমষ্টিকে বাস্তব সংখ্যা বলা হয়। বাস্তব সংখ্যার সেটকে R দ্বারা নির্দেশ করা হয়। সুতরাং R = {x / x একটি বাস্তব সংখ্যা}

অতএব, একটু লক্ষ করলেই দেখা যাবে যে, N, Z, Q এবং R এর মধ্যে যে সম্বন্ধগুলি বিদ্যমান আছে, তা হল $N \subset Z \subset Q \subset R$.

$\in$ এবং $\subset$ এর ব্যবহার বা প্রয়োগ ঃ

একটি সেট এবং এর উপাদানের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয়ের জন্য "$\in$" এই চিহ্ন ব্যবহার করা হয়। যদি A একটি সেট এবং x এর একটি উপাদান হয়, তবে ইহাকে $x \in A$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

দুটি সেটের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয়ের জন্য "$\subset$" এই চিহ্ন ব্যবহার করা হয়। A যদি B এর উপসেট হয়, তবে ইহাকে $A \subset B$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

একক অথবা সিংগল সেট (Unit or Single Set) ঃ

যে সেটের কেবলমাত্র একটি উপাদান আছে, সেই সেটকে একক সেট বলা হয়। যেমন A = {1}; B = {2}; C = {a}; এরা প্রত্যেকেই একটি একক সেট।

সমান সেট (Equal Set) ঃ

দুটি সেট A এবং B পরস্পর সমান হবে যদি এবং কেবল যদি $A \subset B$ এবং $B \subset A$ হয়।

উদাহরণ-১.১৪। $A = \{2, 3, 5, 7\}$ এবং $B = \{3, 7, 2, 5\}$; এখানে A=B; কারণ A ও B একই সদস্য 2, 3, 5, 7 দ্বারা গঠিত।

উদাহরণ-১.১৫। $C = \{x, y, z\}$ এবং $D = \{x, y, x, z\}$; এখানে $C = D$ কারণ C ও D একই সদস্য x, y, z দ্বারা গঠিত।

সার্বিক সেট (Universal Set) ঃ

যে সেটে এক জাতীয় সকল উপাদান অথবা সকল সদস্য বর্তমান থাকে, সেই সেটকে সার্বিক সেট বলা হয়, সাধারণত সার্বিক সেটকে U প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়; তবে অন্য প্রতীকও ব্যবহার করা চলে।

পূরক সেট (Complement of a set) ঃ

যদি A একটি সেট হয়, তবে A এর বহির্ভূত সকল উপাদান নিয়ে যে সেট গঠন করা হয়, তাকে A এর পূরক সেট বলা হয়। ইহাকে A^c অথবা A' দ্বারা নির্দেশ করা হয়। অর্থাৎ $A^c = \{x/x \notin A\}$.

উদাহরণ-১.১৬। মনে করি, সার্বিক সেট $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ এবং $A = \{2, 4, 6, 8\}$ তাহলে $A^c = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

সুবিন্যস্ত যুগল (Ordered Pair) ঃ

যদি এক যুগল উপাদান এর মধ্যে কোনটি প্রথম অবস্থানে আর কোনটি দ্বিতীয় অবস্থানে থাকবে, তাহা নির্দিষ্ট করে দেয়া হয় তবে সে যুগলকে সুবিন্যস্ত যুগল বলা হয়। যদি সুবিন্যস্ত জোড়ার প্রথম উপাদান x এবং দ্বিতীয় উপাদান y হয়, তবে ইহাকে (x, y) প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

সাধারণত $(x, y) \neq (y, x)$ যদিও $(x, y) = \{y, x\}$ হয়। কারণ সেটের বেলায় বিন্যাস প্রযোজ্য নয়। দুটি সুবিন্যস্ত জোড়া (x, y) এবং (u, v) সমান হবে অর্থাৎ $(x, y) = (u, v)$ হবে যদি এবং কেবল যদি (if) $x = u$ এবং $y = v$ হয়।

উদাহরণ-১.১৭। যদি $A = \{1, 2\}$ একটি সেট হয়, তবে উহার উপাদানগুলি দ্বারা গঠিত সুবিন্যস্ত জোড়সমূহ হলো (1, 1); (1, 2); (2, 1) এবং (2, 2).

উদাহরণ-১.১৮। যদি $A = \{x, y, z\}$ একটি সেট হয়, তবে এর উপাদানগুলি দ্বারা গঠিত সুবিন্যস্ত জোড়সমূহ হল (x, x); (x, y); (x, z); (y, x); (y, y); (y, z); (z, x); (z, y) এবং (z, z).

মনে করি, A এবং B যে কোন দুটি সেট। A এর সাথে B এর কার্তেসীয় গুণকে $A \times B$ দ্বারা নির্দেশ করা হয় এবং ইহার সংজ্ঞা নিম্নরূপ ঃ

$A \times B = \{(x, y)/ x \in A \text{ এবং } y \in B\}$.

অর্থাৎ $A \times B$ বলতে এমন সব সুবিন্যস্ত যুগলের সেট বুঝায়, যাদের প্রথম অংশ A এর উপাদান এবং দ্বিতীয় অংশ B এর উপাদান হবে। যদি $A = B$ হয়, তবে A এর কার্তেসীয় গুণনকে $A \times A$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

সুতরাং $A \times A = \{x, y)/x \in A \text{ এবং } y \in A\}$.

উদাহরণ-১.১৯। মনে করি, $A = \{a, b\}$ এবং $B = \{x, y, z\}$.

তবে $A \times A = \{(a, a) (a, b), (b, a), (b, b)\}$;

$A \times B = \{(a, x), (a, y), (a, z), (b, x), (b, y), (b, z)\}$;

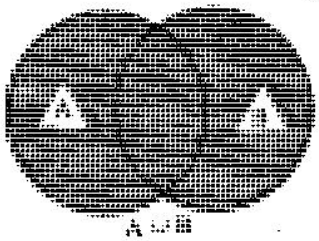
$B \times A = \{(x, a), (x, b), (y, a), (y, b), (z, a), (z, b)\}$;

$B \times B = \{(x, x), (x, y), (x, z), (y, x), (y, y), (y, z), (z, x), (z, y), (z, z)\}$.

সংযোগ সেট (Union) ঃ

দুটি সেটের সমস্ত উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে সেট দুটির সংযোগ সেট বলে। যদি A এবং B যে কোন দুটি সেট হয় তবে তাদের সংযোগ সেট, $A \cup B$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $A \cup B$ প্রতীকটিকে পড়া হয়, A সংযোগ B(A union B) অতএব, $A \cup B = \{x : x \in A \text{ অথবা, } x \in B\}$

$A = \{a, b, c, d\}$ এবং $B = \{f, b, d, h\}$ সেট দুটির সংযোগ সেট $A \cup B = \{a, b, c, d, f, h\}$

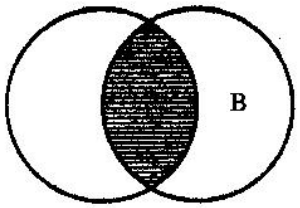


ভেন চিত্রে (Venn diagram) A এবং B সেট দুটির সংযোগ সেট, $A \cup B$ রেখাংকিত করা হয়েছে।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ (i) সংজ্ঞা থেকে এটা স্পষ্ট যে, $A \cup B = B \cup A$ এবং (ii) $A \subset A \cup B$ এবং $B \subset A \cup B$.

ছেদ সেট (Intersection) ঃ

দুটি সেটের কমন উপাদান নিয়ে যে সেট গঠিত হয় তাকে সেট দুটির ছেদ সেট (Intersect) বলে। যদি A এবং B যে কোন দুটি সেট হয় তবে তাদের ছেদ সেট $A \cap B$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $A \cap B$ প্রতীকটিকে পড়া হয় 'A ছেদ B' (A intersection B)।



অতএব, $A \cap B = \{x : x \in A, x \in B\}$.

$A = \{2, 4, 6, 8, 10$ এবং $B = \{8, 10, 12\}$ হলে, $A \cap B = \{8, 10\}$।

ভেন চিত্রে A এবং B সেট দুটির ছেদ সেট $A \cap B$ রেখাংকিত করা হয়েছে।

$A \cap B$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ (i) সংজ্ঞা থেকে এটা সুস্পষ্ট যে, $A \cap B = B \cap A$,

(ii) $A \cap B \subset A$ এবং $A \cap B \subset B$.

(iii) যদি A এবং B নিশ্ছেদ সেট হয়, সেক্ষেত্রে সেট দুটির কোন সাধারণ উপাদান থাকবে না। ফলে, $A \cap B = \phi$ হবে।

অন্তরফল সেট (Difference set) ঃ

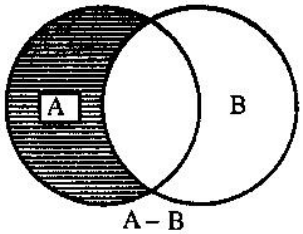
A এবং B দুটি সেট হলে, যে সমস্ত উপাদান A সেটে আছে কিন্তু B সেটে নেই, এরূপ উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে A এবং B এর অন্তরফল সেট বলে। A এবং B এর অন্তরফল সেটকে লেখা হয় $A - B$; তদ্রুপ B সেটে আছে কিন্তু A সেটে নেই এরূপ উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে B এবং A এর অন্তরফল সেট বলে। B এবং A- এর অন্তরফল সেটকে লেখা হয় $B - A$, $A - B$ কে পড়া হয় 'A বিয়োগ B'.

অতএব, $A - B = \{x : x \in A, x \notin B\}$

এবং $B - A = \{x : x \in B, x \notin A\}$

$S = \{a, b, c, d\}$ এবং $R = \{f, b, d, g\}$ হলে, $S - R = \{a, c\}$ এবং $R - S = \{f, g\}$। লক্ষণীয় যে, $R - S$ এবং $S - R$ সেট দুটি নিশ্ছেদ সেট।

ভেন চিত্রে A এবং B সেট দুটির বিয়োগফল সেট $A - B$ রেখাঙ্কিত করা হয়েছে।



$A - B$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ (i) $A - B \subset A$

(ii) $A - B$, $B - A$ এবং $A \cap B$ সেট তিনটি নিশ্ছেদ সেট।

কার্তেসীয় গুণজ (Cartesian product) ঃ

দুটি সেটের সদস্য নিয়ে গঠিত সম্ভাব্য সকল ক্রম জোড়ের সেটকে উক্ত সেট দুটির গুণফল সেট বা কার্তেসীয় গুণজ সেট বলে। ক্রম জোড়গুলির প্রথম সদস্য প্রথম সেট থেকে এবং দ্বিতীয় সদস্য দ্বিতীয় সেট থেকে নিতে হবে। A এবং B দুটি সেট হলে, সেট দুটির কার্তেসীয় গুণজ সেট হবে ক্রম জোড় (a, b) সমূহের সেট যেখানে $a \in A$ এবং $b \in B$; A এবং B-এর কার্তেসীয় গুণজ সেটকে $A \times B$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং পড়া হয় 'A ক্রস B' (A cross B)

অতএব $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$

উদাহরণ-১.২০।

$A = \{1, 2, 3\}$ এবং $B = \{a, b\}$ হলে,

$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$

$W = \{a, b\}$ হলে, $W \times W = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, a)\}$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ $A = B$ না হলে, $A \times B \neq B \times A$.

সেটের বীজগাণীয় মৌলিক বিধি বা সূত্রসমূহ (Fundamental Laws of Algebra of Sets) ঃ

সেট সমূহ অপারেশন "সংযোগ", "ছেদ" এবং "পূরক" এ নিম্নলিখিত টেবিলের মৌলিক বিধি বা অভেদ সমূহ সিদ্ধ করে ঃ যাহা "সেটের বীজগাণিতীয় মৌলিক বিধি" হিসেবে পরিচিত।

সেটের বীজগাণিতীয় মৌলিক বিধি

1	$A \cup A = A$	অভিন্নক বিধি বা Idempotent Law $A \cap A = A$
2	$A \cup B = B \cup A$	বিনিময় বিধি বা Associative Law $A \cap B = B \cap A$
3	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	সংযোগ বিধি বা Commutative Laws $(A \cap B) \cap A \cap (B \cap C)$
4	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	বিতরণ বিধি বা Distributive Laws $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5	$A \cup \varnothing = A$ $A \cap U = A$	অভেদ বিধি বা Indentity Laws $A \cup U = U$ $A \cap \varnothing = \varnothing$
6	$A \cup A' = U$ $A \cap A' = \varnothing$	পূরক বিধি বা Complement Laws $(A')' = A, U' = \varnothing, \varnothing = U$
7	$(A')' = A$	Involution Laws
8	$(A \cup B)' = A' \cap B'$	দ্য মরগ্যানের সূত্র Demorgan's Law $(A \cap B)' = A' \cup B'$

উদাহরণ-১.২১। $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$ হলে $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$ এবং $B \cup B$ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

উত্তর ঃ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

$A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B \cup C = \{2, 4, 6, 8, 3, 5\}$

$B \cup B = \{2, 4, 6, 8\}$

লক্ষণীয় যে, $B \cup B = B$

$A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 4, 6, 8, 3, 5\}$

$= (1, 2, 3, 4, 6, 8, 5\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

$(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\} \cup \{3, 4, 5, 6\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

$\therefore A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$

উদাহরণ-১.২২। $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, d, f, h\}$, $C = \{c, d, e, f\}$ হলে, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $B \cap B$ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

উত্তর ঃ $A \cap B = \{b, d\}$, $A \cap C = \{c, d\}$, $B \cap C = \{d, f\}$

$B \cap B = \{b, d, f, h\}$

লক্ষণীয় যে, $B \cap B = B$,

$(A \cap B) \cap C = \{b, d\} \cap \{c, d, e, f\} = \{d\}$

$A \cap (B \cap C) = \{a, b, c, d\} \cap \{d, f\} = \{d\}$

$\therefore (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

উদাহরণ-১.২৩। প্রমাণ কর যে, $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$ যেখানে, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ এবং $B = \{2, 3, 5, 6, 7\}$.

উত্তর ঃ $A - B = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{2, 3, 5, 6, 7\} = \{1, 4\}$

$B - A = \{2, 3, 5, 6, 7\} - \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{6, 7\}$

$\therefore (A - B) \cup (B - A) = \{1, 4\} \cup \{6, 7\} = \{1, 4, 6, 7\}$

আবার, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ এবং $A \cap B = \{2, 3, 5\}$

$\therefore (A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{2, 3, 5\} = \{1, 4, 6, 7\}$

অতএব, $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

উদাহরণ-১.২৪। প্রমাণ কর যে, $(A - B) \cap B = \phi$

প্রমাণ ঃ মনে করি $x \in (A - B) \cap B$

$\Rightarrow x \in A - B$ এবং $x \in B$

কিন্তু বিয়োগফল সেটের সংজ্ঞানুযায়ী $x \in A$ এবং $x \notin B$.

কিন্তু এমন কোন উপাদান নেই যা একই সাথে $x \in B$ এবং $x \notin B$ সিদ্ধ করে

অতএব, $(A - B) \cap B = \phi$

উদাহরণ-১.২৫। প্রমাণ কর যে, $A - B \subset A \cup B$.

প্রমাণ ঃ মনে করি, $x \in A - B$. $\Rightarrow x \in A$ এবং $x \notin B$.

$\Rightarrow x \in A \cup B$

$\because x \in A - B$ হলে $x \in A \cup B$ হয়

$\therefore A - B \subset A \cup B$.

উদাহরণ-১.২৬। প্রমাণ কর যে, $A' - B' = B - A$

প্রমাণ ঃ মনে করি, $x \in A' - B' \Rightarrow x \in A'$ এবং $x \notin B'$

$\Rightarrow x \notin A$ এবং $x \in B \Rightarrow x \in B$ এবং $x \notin A \Rightarrow x \in (B - A)$

$\therefore A' - B' \subset B - A$

এখন মনে করি, $x \in B - A \Rightarrow x \in B$ এবং $x \notin A$

$\Rightarrow x \notin B'$ এবং $x \in A'$

$\Rightarrow x \in A'$ এবং $x \notin B'$

$\Rightarrow x \in A' - B'$

$\therefore B - A \subset A' - B'$

অতএব, $A' - B' = B - A$

উদাহরণ-১.২৭। যদি $A \subset B$ এবং $C \subset D$ হয় তবে দেখাও যে,

$(A \times C) \subset (B \times D)$

প্রমাণ ঃ মনে করি, $(x, y) \in A \times C$; তবে, $x \in A$ এবং $y \in C$;

প্রদত্ত শর্তানুসারে A, B এর উপসেট এবং C, D এর উপসেট,

তাহলে, $x \in B$ এবং $y \in D$; অতএব, ক্রমজোড়, $(x, y) \in (B \times D)$,

আমরা পাই, $(x, y) \in A \times C$ হলে, $(x, y) \in (B \times D)$

$\therefore A \times C \subset B \times D$.

উদাহরণ-১.২৮। প্রমাণ কর, $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

প্রমাণ ঃ প্রথমে দেখাতে হবে $A \times (B \cap C)$ হচ্ছে $(A \times B) \cap (A \times C)$ এর উপসেট।

মনে করি, $(x, y) \in A \times (B \cap C)$; তবে $x \in A$ এবং $y \in B \cap C$; ছেদ সেটের সংজ্ঞানুযায়ী $y \in B$ এবং $y \in C$, যেহেতু $x \in A$ এবং $y \in B$; অতএব, $(x, y) \in A \times B$; আবার যেহেতু $x \in A$ এবং $y \in C$, অতএব $(x, y) \in A \times C$. আমরা পাচ্ছি, $(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$;

$\therefore A \times (B \cap C) \subset (A \times B) \cap (A \times C)$

এখন, দেখাতে হবে যে, $(A \times B) \cap (A \times C) \subset A \times (B \cap C)$

মনে করি, $(z, w) \in (A \times B) \cap (A \times C)$; তাহলে, $(z, w) \in A \times B$ এবং $(z, w) \in A \times C$; অতএব, $z \in A$ এবং $w \in B$ এবং $z \in A$ এবং $w \in C$. যেহেতু $w \in B$ এবং $w \in C$, অতএব, $w \in B \cap C$. আমরা পাই, $z \in A$ এবং $w \in B \cap C$; অতএব, $(z, w) \in A \times (B \cap C)$

$\therefore (A \times B) \cap (A \times C) \subset A \times (B \cap C)$

দুটি সেটের সমান হওয়ার শর্ত থেকে পাই,

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

উদাহরণ-১.২৯। দেখাও যে, (i) $A - B \subset A$ এবং (ii) $A - B = A \cap B' - A'$

(i) মনে করি, $x \in A - B \Rightarrow x \in A$ কিন্তু $x \notin B$। দেখা যাচ্ছে x উপাদানটি যদি $A - B$ সেটের একক উপাদান হয় তবে x-কে অবশ্যই A সেটের উপাদান হতে হবে।

অতএব, উপসেটের সংজ্ঞা থেকে পাই, $A - B \subset A$.

(ii) $A - B = \{x : x \in A$ এবং $x \notin B\}$

$= \{x : x \in A$ এবং $x \in B'\}$

$= A \cap B'$

$= \{x : x \in A$ এবং $x \in B'\}$

$= \{x : x \notin A'$ এবং $x \in B'\}$

$= \{x : x \in B'$ এবং $x \notin A'\}$

$= B' - A'$

সেটের সংযোগ, ছেদ, বিয়োগ এবং পূরণ প্রক্রিয়া সম্পর্কিত কতিপয় বিধি ঃ

(a) A যে কোন সেট হলে (i) $A \cup A = A$ এবং (ii) $A \cap A = A$

প্রমাণ ঃ (i) মনে করি, $x \in A \cup A$, তাহলে, $x \in A$, $\therefore A \cup A \subset A$.

আবার, যদি $x \in A$, তাহলে, $x \in A \cup A$, $\therefore A \subset A \cup A$

$\therefore A \cup A = A$

(ii) মনে করি, $x \in A \cap A$, তাহলে, $x \in A$, $\therefore A \cap A \subset A$

আবার যদি, $x \in A$, তাহলে, $x \in A \cap A$, $\therefore A \subset A \cap A$

$\therefore A \cap A = A$

(b) সংযোজন বিধি (Associative Law) ঃ A, B, C যে কোন তিনটি সেট হলে,

(i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

প্রমাণ ঃ (i) মনে করি, $x \in (A \cup B) \cup C$

$\Rightarrow x \in A \cup B$, অথবা, $x \in C$

$\Rightarrow (x \in A$ অথবা $x \in B)$ অথবা, $x \in C$

$\Rightarrow x \in A$ অথবা $(x \in B$ অথবা $x \in C)$

$\Rightarrow x \in A$ অথবা, $x \in B \cup C$

$\Rightarrow x \in A \cup (B \cup C)$

$\therefore (A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$

এখন মনে করি, $x \in A \cup (B \cup C)$

$\Rightarrow x \in A$ অথবা, $(x \in B$ অথবা $x \in C)$

$\Rightarrow (x \in A$ অথবা, $x \in B)$ অথবা, $x \in C$

$\Rightarrow x \in A \cup B$ অথবা $x \in C$

$\Rightarrow x \in (A \cup B) \cup C$

$\therefore A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$

$\therefore (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(ii) মনে করি, $x \in (A \cap B) \cap C$

$\Rightarrow x \in A \cap B$ এবং $x \in C$

$\Rightarrow (x \in A$ এবং $x \in B)$ এবং $x \in C$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \in B$ এবং $x \in C$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \in B \cap C$

$\Rightarrow x \in A \cap (B \cap C)$

$\therefore (A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)$

মনে করি, $x \in A \cap (B \cap C)$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $(x \in B$ এবং $x \in C)$

$\Rightarrow (x \in A$ এবং $x \in B)$ এবং $x \in C$

$\Rightarrow x \in A \cap B$ এবং $x \in C$

$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cap C$

$\therefore A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$

$\therefore (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

অতএব, দেখা যাচ্ছে সেটের সংযোগ ও ছেদ প্রক্রিয়া সংযোজন বিধি মেনে চলে।

(c) বিনিময় বিধি (Commutative Law) ঃ A এবং B যে কোন দুটি সেট হলে, (i) $A \cup B = B \cup A$, (ii) $A \cap B = B \cap A$.

প্রমাণ ঃ

(i) মনে করি, $x \in A \cup B$, $\Rightarrow x \in A$ অথবা $x \in B$

$\Rightarrow x \in B$ অথবা $x \in A \Rightarrow x \in B \cup A$

$\therefore A \cup B \subset B \cup A$

এখন মনে করি, $x \in B \cup A$ $\Rightarrow x \in B$ অথবা $x \in A$

$\Rightarrow x \in A$ অথবা $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$

$\therefore B \cup A \subset A \cup B$

অতএব, $A \cup B = B \cup A$.

(ii) মনে করি, $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ এবং $x \in B$

$\Rightarrow x \in B$ এবং $x \in A \Rightarrow x \in B \cap A$.

$\therefore A \cap B \subset B \cap A$

এখন, মনে করি, $x \in B \cap A \Rightarrow x \in B$ এবং $x \in A$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$

$\therefore B \cap A \subset A \cap B$

অতএব, $A \cap B = B \cap A$

অতএব, সেটের সংযোগ ও ছেদ প্রক্রিয়া বিনিময় নিয়ম মেনে চলে।

(d) বন্টন বিধি (Distributive Law) ঃ A, B, C যে কোন তিনটি সেট হলে

(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

প্রমাণ ঃ (i) মনে করি, $x \in A \cup (B \cap C)$

তাহলে $x \in A$ অথবা, $x \in B \cap C \Rightarrow x \in A$ অথবা, $x \in B$ এবং $x \in C$.

$\Rightarrow x \in A$ অথবা, $x \in B$ এবং $x \in A$ অথবা, $x \in C$

$\Rightarrow x \in A \cup B$ এবং $x \in A \cup C$

$\Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\therefore A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$

এখন মনে করি, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

তাহলে, $x \in A \cup B$ এবং $x \in A \cup C$

$\Rightarrow (x \in A$ অথবা $x \in B)$ এবং $(x \in A$ অথবা $x \in C)$

$\Rightarrow x \in A$ অথবা, $(x \in B$ এবং $x \in C)$

$\Rightarrow x \in A$ অথবা, $x \in B \cap C$

$\Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$

$\therefore (A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$

$\therefore A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(ii) মনে করি,

$x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A$ এবং $(x \in B$ অথবা, $x \in C)$

$\Rightarrow (x \in A$ এবং $x \in B)$ অথবা, $(x \in A$ এবং $x \in C)$

$\Rightarrow x \in A \cap B$ অথবা, $x \in A \cap C$

$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\therefore A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$

আবার, মনে করি, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\Rightarrow (x \in A$ এবং $x \in B)$ অথবা, $(x \in A$ এবং $x \in C)$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $(x \in B$ অথবা $x \in C)$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \in B \cup C$

$\Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$

$\therefore (A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$

$\therefore A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

অতএব, সেটের সংযোগ ও ছেদ প্রক্রিয়া বন্টন বিধি মেনে চলে।

(e) অভেদক বিধি (Identity Law) ঃ A যে কোন সেট, U সার্বিক সেট এবং ϕ শূন্য সেট হলে,

(i) $A \cup \phi = A$, (ii) $A \cap U = A$, (iii) $A \cup U = U$, (iv) $A \cap \phi = \phi$

প্রমাণ ঃ (i) মনে করি, $x \in A \cup \phi$, তবে $x \in A$ অথবা $x \in \phi$; কিন্তু ϕ ফাঁকা সেট এজন্য $x \in A$.

$\therefore A \cup \phi \subset A$

আবার, যদি $x \in A$ হয় তবে, $x \in A \cup \phi$;

$\therefore A \subset A \cup \phi$

$\therefore A \cup \phi = A$

(ii) মনে করি, $x \in A \cap U$, তবে, $x \in A$ এবং $x \in U$

$\therefore A \cap U \subset A$

মনে করি $x \in A$; যেহেতু U সার্বিক সেট, অতএব, $x \in U$;

$\therefore x \in A \cap U$; সুতরাং $A \subset A \cap U$

$\therefore A \cap U = A$.

(iii) যদি $x \in U$, তবে $x \in A \cup U$

$\therefore U \subset A \cup U$

আবার, যে কোন সেটই সার্বিক সেটের উপসেট

$\therefore A \cup U \subset U$

$\therefore A \cup U = U$

(iv) $A \cap \phi \subset \phi$; আবার শূন্য সেট ϕ যে কোন সেটের উপসেট

অর্থাৎ, $\phi \subset A \cap \phi$

$\therefore A \cap \phi = \phi$

(f) পূরক বিধি (Complement Law) ঃ U সার্বিক সেট, A যে কোন একটি সেট এবং ϕ ফাঁকা সেট এবং U′, A′ এবং ϕ' যথাক্রমে তাদের পূরক সেট হলে,

(i) $A \cup A' = U$, (ii) $A \cap A' = \phi$, (iii) $(A')' = A$ (iv) $U' = \phi$, $\phi' = U$.

প্রমাণ ঃ (i) সার্বিক সেট U এর উপাদানগুলো থেকে A সেটের উপাদানসমূহ বাদ দিয়ে অবশিষ্ট উপাদানসমূহের সেটকে A- এর পূরক সেট বলে এবং A′ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

অতএব, $A \cup A' = U$.

(ii) A এবং A′ এর কোন সাধারণ উপাদান নেই অর্থাৎ A এবং A′ নিচ্ছেদ সেট। অতএব, $A \cap A' = \phi$

(iii) কোন সেট A-এর পূরক সেটের পূরক সেট A; অর্থাৎ $(A')' = A$

(iv) সার্বিক সেটের পূরক সেট হচ্ছে ফাঁকা সেট এবং ফাঁকা সেটের পূরক সেট হচ্ছে সার্বিক সেট।

অর্থাৎ $U' = \phi$ এবং $\phi = U$.

(g) দ্য-মরগানের সূত্র (De-Morgan's Rule) ঃ A, B যে কোন দুটি সেট এবং A′ ও B′ তাদের পূরক সেট হলে

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$, (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

প্রমাণ ঃ (i) মনে করি, $x \in (A \cup B)' \Rightarrow x \in A \cup B$,

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \in B$, $\Rightarrow x \in A'$ এবং $x \in B'$

অতএব, ছেদ সেটের সংজ্ঞানুযায়ী, $x \in A' \cap B'$

এখন, মনে করি, $x \in A' \cap B' \Rightarrow x \in A'$ এবং $x \in B'$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$

$\Rightarrow x \in (A \cup B)'$

$\therefore A' \cap B' \subset (A \cup B)'$

অতএব, $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(iii) মনে করি, $x \in (A \cap B)' \Rightarrow x \in A \cap B$

$\Rightarrow x \in A$ অথবা, $x \in B \Rightarrow x \in A'$ অথবা, $x \in B'$

$\Rightarrow x \in A' \cup B'$

$\therefore (A \cap B)' \subset A' \cup B'$

আবার মনে করি, $x \in A' \cup B'$

$\Rightarrow x \in A'$ অথবা, $x \in B'$

$\Rightarrow x \in A$ অথবা, $x \in B$

$\Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \in (A \cap B)'$

$\therefore A' \cup B' \subset A' \cup B'$

অতএব, $(A \cap B)' = A' \cup B'$

দুয়ের অধিক সেটের জন্যও দ্য মরগানের সূত্র সম্প্রসারিত করা যায়। যেমন, $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$; কেননা, $(A \cup B \cup C)' = ((A \cup B) \cup C)' = (A \cup B)' \cap C' = (A' \cap B') \cap C' = A' \cap B' \cap C'$। উপরের সূত্রসমূহ প্রয়োগ করে সেট সংক্রান্ত অভেদ সহজেই প্রমাণ করা যায়।

উদাহরণ-১.৩০। প্রমাণ করা যে, $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$

প্রমাণ ঃ $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A \cap (B \cup B')$ [বন্টন বিধি]

$\Rightarrow (A \cap B) \cup (A \cap B') = A \cap \cup$ [পূরক বিধি]

$\Rightarrow (A \cap B) \cup (A \cap B') = A$ [অভেদক বিধি]

সেটের উপাদান সংখ্যা ঃ

A শান্ত (finite) সেট হলে, A এর উপাদান সংখ্যা আমরা n(A) দিয়ে প্রকাশ করি।

সূত্র ঃ (i) A এবং B দুটোই সান্ত সেট হলে $A \cup B$ ও একটি সান্ত সেট এবং সেক্ষেত্রে, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

দ্রষ্টব্য ঃ A এবং B সেট দুটি নিচ্ছেদ সেট হলে $A \cap B$ ফাঁকা সেট হবে। সেক্ষেত্রে–

$n(A \cup B) = 0$

অতএব, নিচ্ছেদ সেট A এবং B এর জন্য

$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

সূত্র (ii) ঃ A এবং B উভয়ে S-এর উপসেট হলে,

$n((A \cup B)') = n(S) - n(A \cup B)$

$= n(S) - n(A) - n(B) + n(A \cap B)$ [(i) নং সূত্র থেকে।

সূত্র (iii) ঃ A, B, C সান্ত সেট হলে

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$

দ্রষ্টব্য ঃ যদি A, B, C সেটগুলি পরস্পর নিচ্ছেদ সেট হয়, তবে $A \cap B$, $B \cap C$, $C \cap A$, $A \cap B \cap C$ সেটগুলি ফাঁকা সেট। সুতরাং, $n(A \cap B)$, $n(B \cap C)$, $n(C \cap A)$ এবং $n(A \cap B \cap C)$ এদের সবগুলোর মান শূন্য।

অতএব, A, B, C সেটগুলো নিচ্ছেদ সেট হলে, $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$

সূত্র (iv) যদি A, B, C প্রত্যেকে কোন সান্ত সেট S-এর উপসেট হয়, তবে $n((A \cup B \cup C)') = n(S) - n(A) - n(B) - n(C) + n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - n(A \cap B \cap C)$.

উদাহরণ-১.৩১। ধরি, $A = \{1, 3, 5\}$ এবং $B = \{2, 4, 6\}$; এখানে A এবং B পরস্পর সংযোজহীন। কারণ $A \cap B = \phi$

লক্ষণীয় ঃ (ক) $x \in A \cup B \Rightarrow x \notin A$ অথবা $x \in B$.

(খ) $x \in A \cup B \Rightarrow x \notin A$ এবং $x \in B$.

(গ) $x \in A \cap B \Rightarrow x \notin A$ এবং $x \in B$.

(ঘ) $x \in A \cap B \Rightarrow x \notin A$ অথবা, $x \in B$.

(ঙ) $x \in A \Rightarrow x \notin A$ এবং $x \notin A \Rightarrow x \notin A$.

(চ) $x \in A - B \Rightarrow x \notin A$ এবং $x \notin B$.

উপপাদ্য-১। প্রমাণ কর $(A \cup B) = A' \cap B'$.

প্রমাণ ঃ মনে করি, $x \in (A \cup B)'$ $\Rightarrow x \notin A \cup B$

$\Rightarrow x \notin A$ এবং $x \notin B$.

$\Rightarrow x \in A'$ এবং $x \in B'$

$\Rightarrow x \in A' \cap B'$

অতএব, $(A \cup B)' \subset A' \cap B'$ ..... (1)

আবার মনে করি, $x \in A' \cap B'$ $\Rightarrow x \in A'$ অতএব $x \in B'$

$\Rightarrow x \notin A$ এবং $x \notin B$.

$\Rightarrow x \notin A \cup B$.

$\Rightarrow x \in (A \cup B)'$

অতএব $A' \cap B' \subset (A \cup B)'$ ..... (2)

এখন (1) নং এবং (2) নং হতে পাই, $(A \cup B)' = A' \cap B'$

উপপাদ্য-২। যদি A. B. C তিনটি সেট হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

(ক) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

(খ) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

প্রমাণ ঃ (ক)

মনে করি, $x \in A - (B \cup C)$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \notin (B \cup C)$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $(x \in B$ এবং $x \in C)$.

$\Rightarrow (x \in A$ এবং $x \in B)$ এবং $(x \in A$ এবং $x \in C)$.

$\Rightarrow x \in (A - B)$ এবং $x \in (A - C)$

$\Rightarrow x \in (A - B) \cap (A - C)$.

অতএব $A - (B \cup C) \subset (A - B) \cap (A - C)$ .....(1)

আবার মনে করি,

$x \in (A - B) \cap (A - C) \Rightarrow x \in (A - B)$ এবং $x \in (A - C)$.

$\Rightarrow (x \in A$ এবং $x \notin B)$ এবং $(x \in A$ এবং $x \notin C)$.

$\Rightarrow x \in A$ এবং $(x \notin B$ এবং $x \notin C)$.

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \notin (B \cup C)$,

$\Rightarrow x \in A - (B \cup C)$.

অতএব $(A - B) \cap (A - C) \subset A - (B \cup C)$ ..... (2)

এখন (1) নং এবং (2) নং হতে পাই, $A - (B \cup C) = (A - B) \cup (A - C)$

(খ) মনে করি,

$x \in A \cap (B - C)$ $\Rightarrow x \in A$ এবং $x \in (B - C)$.

$\Rightarrow x \in A$ এবং $(x \in B$ এবং $x \notin C)$.

$\Rightarrow (x \in A$ এবং $x \in B)$ এবং $(x \in A$ এবং $x \notin C)$.

$\Rightarrow x \in (A \cap B)$ এবং $x \notin (A \cap C)$.

$\Rightarrow x \in (A \cap B) - (A \cap C)$.

অতএব $A \cap (B - C) \subset (A \cap B) - (A \cap C)$ ..... (3)

আবার মনে করি,

$x \in (A \cap B) - (A \cap C) \Rightarrow x \in A \cap B$ এবং $x \notin A \cap C$.

$\Rightarrow (x \in A$ এবং $x \in B)$ এবং $(x \in A$ এবং $x \notin C)$.

$\Rightarrow x \in A$ এবং $(x \in B$ এবং $x \notin C)$.

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \in (B - C)$

$\Rightarrow x \in A \cap (B - C)$.

অতএব $(A \cap B) - (A \cap C) \subset A \cap (B - C)$ ..... (4)

এখন (3) নং এবং (4) নং হতে পাই, $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

উপপাদ্য-৩। প্রমাণ কর $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

প্রমাণ ঃ মনে করি,

$x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A$ এবং $x \in (B \cup C)$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $(x \in B$ অথবা, $x \in C)$.

$\Rightarrow (x \in A$ এবং $x \in B)$ অথবা $(x \in A$ এবং $x \in C)$.

$\Rightarrow x \in (A \cap B)$ অথবা $x \in (A \cap C)$.

$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

অতএব, $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ..... (1)

আবার মনে করি,

$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow x \in (A \cap B)$ অথবা $x \in (A \cap C)$.

$\Rightarrow (x \in A$ এবং $x \in B)$ অথবা, $(x \in A$ এবং $x \in C)$.

$\Rightarrow x \in A$ এবং $(x \in B$ অথবা $x \in C)$.

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \in (B \cup C)$.

$\Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$.

অতএব $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$ ..... (2)

এখন (1) নং এবং (2) নং হতে পাই, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

উপপাদ্য-৪। A, B, C তিনটি সেট হলে প্রমাণ কর, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

প্রমাণ ঃ মনে করি,

$(a, b) \in A \times (B \cup C) \Rightarrow a \in A$ এবং $b \in (B \cup C)$

$\Rightarrow a \in A$ এবং $b(\in B$ অথবা $b \in C)$.

$\Rightarrow (a \in A$ এবং $b \in B)$ অথবা $(a \in A)$ এবং $(b \in C)$.

$\Rightarrow (a. b) \in (A \times B)$ অথবা $(a, b) \in (A \times C)$

$\Rightarrow (a, b) \in (A \times B) \cup (A \times C)$

অতএব, $A \times (B \cup C) \subset (A \times B) \cup (A \times C)$ ..... (1)

আবার মনে করি,

$(a, b) \in (A \times B) \cup (A \times C) \Rightarrow (a, b) \in (A \times B)$ অতএব $(a, b) \in (A \times C)$.

$\Rightarrow (a \in A$ এবং $b \in B)$ অথবা $(a \in A$ এবং $b \in C)$

$\Rightarrow a \in A$ এবং $(b \in B$ অথবা $b \in C)$.

$\Rightarrow a \in A$ এবং $b \in (B \cup C)$.

$\Rightarrow (a. b) \in A \times (B \cup C)$

$\Rightarrow (\alpha. \beta) \in A \times (B \cup C)$

অতএব $(A \times B) \cup (A \times C) \subset A \times (B \cup C)$ ..... (2)

এখন (1) নং এবং (2) নং হতে পাই, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

উপপাদ্য-৫। A. B. C তিনটি সেট হলে প্রমাণ কর

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

প্রমাণ ঃ মনে করি,

$(a, b) \in A \times (B \cap C) \Rightarrow a \in A$ এবং $b \in (B \cap C)$

$\Rightarrow a \in A$ এবং $(b \in B$ এবং $b \in C)$.

$\Rightarrow (a \in A$ এবং $b \in B)$ এবং $(a \in A$ এবং $b \in C)$.

$\Rightarrow (a. b) \in (A \times B)$ এবং $(a. b) \in (A \times C)$

$\Rightarrow (a, b) \in (A \times B) \cap (A \times C)$

অতএব $A \times (B \cap C) \subset (A \times B) \cap (A \times C)$ ... (1)

আবার মনে করি,

$(a, b) \in (A \times B) \cap (A \times C) \Rightarrow (a, b) \in (A \times B)$ এবং $(a, b) \in (A \times C)$

$\Rightarrow (a \in A$ এবং $b \in B)$ এবং $(a \in A$ এবং $b \in C)$.

$\Rightarrow a \in A$ এবং $(b \in B$ এবং $b \in C)$.

$\Rightarrow a \in A$ এবং $b \in (B \cap C)$.

অতএব $(A \times B) \cap (A \times C) \subset A \times (B \cap C)$ ..... (2)

এখন (1) নং এবং (2) নং হতে পাই, $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

উদাহরণ-১.৩২। যদি $A = \{3, 4, 5, 6\}$ $B = \{4, 5, 6, 7\}$ এবং $C = \{3, 6, 7, 8\}$ হয়, তবে $B \cup C$, $A \cup B$, $A \cap B$ এবং $(A \cup B) \cap C$ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $B \cup C = \{4, 5, 6, 7\} \cup \{3, 6, 7, 8\}$

$= \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7\} \cup \{4, 5, 6, 7\}$

$= \{3, 4, 5, 6, 7\}$

$A \cap B = \{3, 4, 5, 6\} \cap \{4, 5, 6, 7\}$

$= \{4, 5, 6\}$

এবং $(A \cup B) \cap C = \{3, 4, 5, 6, 7\} \cap \{3, 6, 7, 8\}$

$= \{3, 6, 7\}$.

১.২.৯ ফাংশন (Function) ঃ

মনে করি, A এবং B যে কোন দুটি সেট। A থেকে B সেটে ফাংশন f হচ্ছে $A \times B$-এর এমন একটি উপসেট যেন (i) প্রতিটি $\in A$-এর জন্য একটি উপাদান $b \in B$ থাকে যেখানে $a, b) \in f$ হয় এবং (ii) যদি $(a, b) \in f$ হয় এবং $(a, b') \in f$ হয় তবে অবশ্য $b = b'$ হবে।

শর্ত (i) থেকে পাই প্রতিটি $a \in A$ ফাংশন f-এর ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদান হবে এবং শর্ত (ii) থেকে পাই প্রতিটি $a \in$ ফাংশন f-এর একটি এবং কেবলমাত্র একটি ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদান হবে। অতএব, দেখা যাচ্ছে, A থেকে B সেটে ফাংশন হচ্ছে $A \times B$ এর ক্রমজোড়গুলোর একটি উপসেট যেখানে A সেটের প্রতিটি উপাদান ফাংশনে অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর কেবলম একটি ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদান হয়। সুতরাং, বলা যায়, ফাংশন প্রকৃতপক্ষে একটি বিশেষ প্রকারের অন্বয়।

ফাংশনের সংকেতরূপে সাধারণত f. g. F. ψ প্রভৃতি অক্ষর ব্যবহার করা হয়।

A সেট থেকে B সেটে f একটি ফাশন হলে আমরা লিখি $f : A \to B$ এবং এটাকে পড়া হয় "f হচ্ছে A সেট থেকে B সে একটি ফাংশন"। যদি $(a, b) \in f$ হয়, তবে b- কে f-এর অধীনে a-এর প্রতিচ্ছবি (image) বলা হয় এবং আমরা লিখি $b = f(a)$

ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ (Domain and Range of Function) ঃ

যেহেতু প্রত্যেক ফাংশন একটি অন্বয়, সুতরাং ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ বলতে অন্বয় হিসেবে এর ডোমেন এবং রেঞ্জকে বোঝাবে। A সেট থেকে B সেটে f যদি একটি ফাংশন হয় তবে ডোমেন $f = A$ এবং B সেটের যে সমস্ত উপাদান সকল $a \in A$-এ প্রতিচ্ছবি রূপে পাওয়া যায় ঐ উপাদানগুলোই f এর রেঞ্জ। সুতরাং, রেঞ্জ $f \subset B$।

ফাংশন, ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জের উদাহরণ ঃ (i) মনে করি, f একটি ফাংশন এবং এটা প্রতিটি বাস্তব সংখ্যাকে এ বর্গের সাথে অন্বিত করে। অর্থাৎ x যদি একটি বাস্তব সংখ্যা হয়, তবে $f(x) = x^2$। স্পষ্টই, ফাংশনf-এর ডোমেন হচ্ছে সমস্ত বাস্ত সংখ্যার সেট কিন্তু রেঞ্জ হচ্ছে কেবলমাত্র ধনাত্মক সংখ্যার সেট। উদাহরণস্বরূপ বলা যায়, $f(-3) = 9$, $f(2) = 4$, $f(3) = 9$, $f(-2) = 4$। আমরা বলতে পারি, (–3, 9), (3, 9), (2, 4) (–2, 4) ..... প্রভৃতি ক্রমজোড়গুলো একটি ফাংশন এবং এ ফাংশন সংকেতে লিখতে পারি $f : R \to R$, $f(x) = x^2$

উল্লেখ্য যে, $f \subset R \times R$.

(ii) মনে করি, $x^2 + y^2 = 1$ একটি বৃত্তের সমীকরণ। এখানে $y^2 = 1 - x^2$ বা, $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$

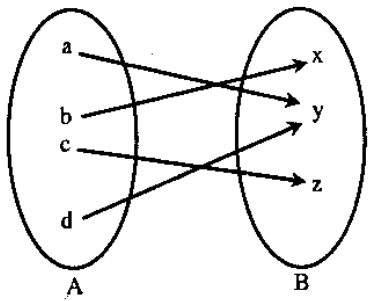
অর্থাৎ, $y = \sqrt{1 - x^2}$ এবং $y = -\sqrt{1 - x^2}$

যদি (x, y) ক্রমজোড়টি x-অক্ষের উপস্থিতির অর্ধবৃত্তের যে কোন একটি বিন্দু হয়, তবে $y \geq 0$ এর জন্য $y = \sqrt{1 - x^2}$ বা, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$। x-অক্ষের নিচের অর্ধবৃত্তের জন্য $y = -\sqrt{1 - x^2}$ বা, $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$। দুটি ক্ষেত্রেই f দুটি পৃথক ফাংশন সংজ্ঞায়িত করে। ফাংশন দুটি যথাক্রমে $f : R \to R$. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ এবং $f : R \to R$. $f(x)$ $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$। $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ এ ডোমেন $x = 1$ থেকে $x = -1$ এর অন্তর্গত প্রতিটি বাস্তব সংখ্যা অর্থাৎ, $-1 \leq x \leq 1$ কিন্তু এর রেঞ্জ $0 \leq y \leq 1$। $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ ফাংশনটির ডোমেন একই কিন্তু রেঞ্জ $-1 \leq y \leq 0$।

(iii) $f : R \to R$. $f(x) = \frac{1}{x}$ ফাংশনে $x = 0$ ব্যতীত, x-এর প্রতিটি বাস্তব মানের জন্য আমরা $f(x)$ এর একটি মান পাই।

(iv) মনে করি, $A = \{a, b, c, d\}$ এবং $B = (x, y, z)$ এবং নিচের চিত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : A \to B$.

এখানে f-এর ডোমেন $A = \{a, b, c, d\}$ এবং রেঞ্জ (x, y, z) $f(a) = y$, $f(b) = x$, $f(c) = z$ এবং $f(d) = y$



সুতরাং (a, y), (b, x), (c, z) (d, y) ক্রমজোড়গুলো f-এর সদস্য।

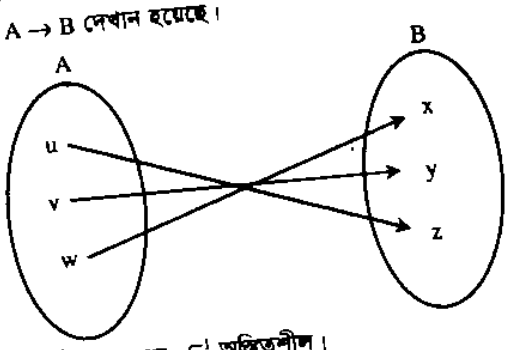
উদাহরণ-১.৩৩। $f(x) = x^2$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : R - R$। এক্ষেত্রে f এক এক ফাংশন নয়। কেননা, $f(-3) = 9$, $f(3) = 9$ অর্থাৎ দুটি ভিন্ন বাস্তব সংখ্যা 3 এবং (–3) এর প্রতিচ্ছবি একই সংখ্যা 9.

উদাহরণ-১.৩৪। $f(x) = x^3$ দ্বারা বর্ণিত $f : R \to R$। এ ফাংশনটি একটি এক এক ফাংশন। কেননা, ভিন্ন ভিন্ন বাস্তব সংখ্যার ন ভিন্ন ভিন্ন বাস্তব সংখ্যা হয়। $f(2) = 8$, $f(-2) = -8$, $f(3) = 27$, $f(-3) = -27$ অর্থাৎ কোন ক্ষেত্রেই $f(a) = f(a')$ নয়।

অভেদ ফাংশন (Identity function) : যদি কোন ফাংশন কোন সেটের উপাদানকে একই সেটের ঐ উপাদানের সাথেই অন্বিত রে তখন ফাংশনটিকে অভেদ ফাংশন বলা হয়। ধরি, R বাস্তব সংখ্যার সেট এবং $f(x) = x$ ফরমূলা কর্তৃক সংজ্ঞায়িত $f : R \to$ । এক্ষেত্রে f একটি অভেদ ফাংশন। কারণ $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$, $f(3) = 3$, $f(4) = 4$ ইত্যাদি। উল্লেখ্য যে, অভেদ ফাংশন সব সময়ই এক-এক ফাংশন।

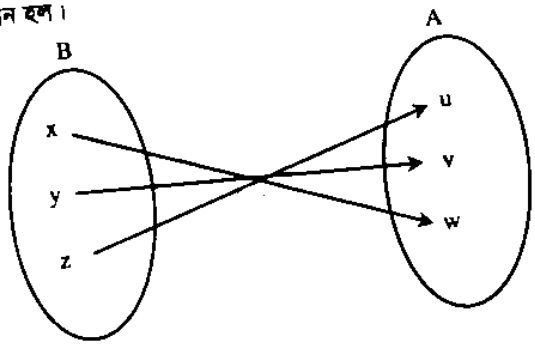
বিপরীত ফাংশন (Inverse function) : ধরা যাক, $f : A \to B$ এবং $b \in B$। $f^{-1}(b)$, A সেটের এমন একটি বা একাধিক উপাদান নির্দেশ করে যার বা যাদের প্রতিচ্ছবি হচ্ছে b। b যদি A সেটের কোন উপাদানের প্রতিচ্ছবি না হয় তবে $f^{-1}(b)$ তে কোন উপাদান থাকবে না। অতএব, $f^{-1}(b)$-তে এক বা একাধিক উপাদান থাকতে পারে অথবা আদৌ কোন উপাদান নাও থাকতে পারে। কিন্তু f যদি একই সাথে এক-এক এবং সার্বিক ফাংশন হয়, তবে $f(A) = B$ অর্থাৎ B সেটের সমস্ত উপাদানই f-এর রেঞ্জ হয় এবং B সেটের পৃথক পৃথক উপাদান A সেটের ভিন্ন ভিন্ন উপাদানের প্রতিচ্ছবি হয়। সেক্ষেত্রে $f^{-1}(b)$-এর মান অনন্য অর্থাৎ $b \in B$-এর জন্য A সেটে $f^{-1}(b)$ একটি মাত্র উপাদান পাওয়া যাবে। অর্থাৎ $b \in B$-এর জন্য A সেটে আমরা একটি মাত্র উপাদান পাই। এ ফাংশনটিকেই বিপরীত ফাংশন বলা এবং আমরা লিখি $f^{-1} : B \to A$। উল্লেখ্য যে, কোন ফাংশনের বিপরীত ফাংশন পাওয়া যাবে যখন $f : A \to B$ একই এক-এক এবং সার্বিক ফাংশন হবে।

উদাহরণ-১.৩৫। নিচের চিত্রে $f : A \to B$ দেখান হয়েছে।



এখানে f ফাংশন এক-এক এবং সার্বিক। অতএব, f^{-1} অস্তিত্বশীল।

নিচের চিত্রে $f^{-1} : B \to A$ দেখান হল।



উদাহরণ-১.৩৬। $f(x) = x^2$, যেখানে $2 \le x \le 8$

(i) $f(2)$, (ii) $f(-3)$ (iii) $f(4)$, (iv) $f(t-3)$ নির্ণয় কর।

(i) $f(2) = 2^2 = 4$

(ii) $f(-3)$ কোন মান নির্ধারণ করা যাবে না কেননা –3 প্রদত্ত ডোমেনের অন্তর্ভুক্ত নয়।

(iii) $f(4) = 4^2 = 16$

(iv) $f(t-3) = (t-3)^2 = t^2 - 6t + 9$, এ মানটি বৈধ হবে যদি, $-2 \le t - 3 \le 8$, বা $-2 + 3 \le t \le 8 + 3$, বা, $1 \le t \le 11$ হয়।

উদাহরণ-১.৩৭। $f(x)=\begin{cases}3x-1, x>3\\ x^2-2, -2\le x\le 3\\ 2x+.3, x<-2\end{cases}$ হলে, $f(2)$, $f(4)$, $f(-1)$ এবং $f(-3)$ নির্ণয় কর।

$f(2)=(2)^2-2=2,$ $\because -2\le x\le 3$

$f(4)=3.4-1=11,$ $\because x>3$

$f(-1)=1^2-2=-1$ $\because -2\le x\le 3$

$f(-3)=2(-3)+3=-3,$ $\because x<-2$

উদাহরণ-১.৩৮। নিচের ফাংশনগুলোর ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(i) $f(x)=\sqrt{x+4}$ (ii) $f(x)=1/(x-2)$ (iii) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

(iv) $f(x)=2\cos x$

(i) f-এর ডোমেন, $x\ge -4$ এবং f-এর রেঞ্জ, $f(x)\ge 0$

(ii) f-এর ডোমেন x-এর সমস্ত বাস্তব মান, $x\ne 2$.

f- এর রেঞ্জ $f(x)$ এর সমস্ত বাস্তব মান, শূন্য ছাড়া

(iii) f-এর ডোমেন $-2\le x\le 2$; f এর রেঞ্জ $0\le f(x)\le 4$

(iv) f-এর ডোমেন x-এর সমস্ত বাস্তব মান;

f-এর রেঞ্জ, $-2\le f(x)\le 2$

উদাহরণ-১.৩৯। $A=\{1,2,3,4\}$ এবং $B=\{1,2,3,4,5\}$ এবং $f(x)=x+1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f: A\to B$. f-এর ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। ফাংশনটি কি সার্বিক?

$f(1)=2, f(2)=3, f(3)=4, f(4)=5$

অতএব, ফাংশনটি ডোমেন $=\{1,2,3,4\}=A$

ফাংশনটির রেঞ্জ $=\{2,3,4,5\}$।

যেহেতু, $f(A)\ne B$, সুতরাং ফাংশনটি সার্বিক ফাংশন নয়।

উদাহরণ-১.৪০। $f(x)=x^2+3x+1$ এবং $g(x)=2x-3$ হলে, (i) (fog) এবং (ii) (fof) নির্ণয় কর।

(i) $(fog)(x)=f(g(x))=f(2x-3)=(2x-3)^2+3(2x-3)+1$

$=4x^2-12x+9+6x-9+1$

$=4x^2-6x+1$

(ii) $(fof)(x)=f(f(x))=f(x^2+3x+1)$

$=(x^2+3x+1)^2+3(x^2+3x+1)+1$

$=x^4+9x^2+1+6x^3+6x+2x^2+9x+3+1$

$=x^4+6x^3+14x^2+15x+5$

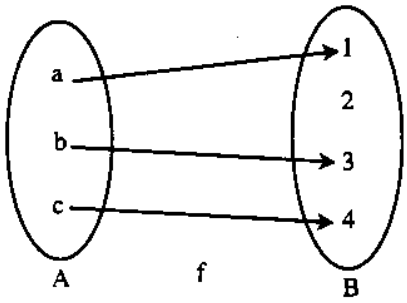
১.৩ এক-এক ফাংশন এবং সর্বগ্রাহী বা সার্বিক বা অনটু ফাংশন (One-One Function and Onto function) ঃ

এবার আমরা এক এক ফাংশন (One to one function) এবং অনটু ফাংশন (Onto function) নিয়ে আলোচনা করব।

এক-এক ফাংশন (One-to-One Function) ঃ

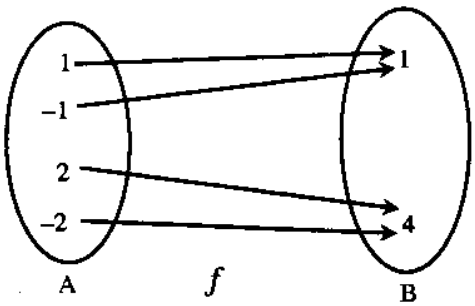
কোন ফাংশন $f: A\to B$ কে এক - এক ফাংশন বলা হবে যদি ডোমেন A এর ভিন্ন ভিন্ন উপাদানের ভিন্ন ভিন্ন আলাদা (distinct) ইমেজ বিদ্যমান থাকে।

নিম্নের A সেট এবং B সেটে লক্ষ করি ঃ



এখানে f একটি এক-এক ফাংশন, কারণ A সেটের একটি উপাদান a এর ইমেজ 1। এখানে a উপাদানের কেবলমাত্র একটি ইমেজ। ঠিক একইভাবে b এবং c এরও একটি করে ইমেজ। একারণে ফাংশন f একটি এক-এক ফাংশন।

উদাহরণ-১.৪১। ধরা যাক ফাংশন $f(x) = x^2$। এখানে যদি আমরা $x = 1$ বসাই, তবে $f(1) = 1$ পাই। অনুরূপভাবে আরো মান বসিয়ে আমরা নিম্নের A এবং B সেট পাই।

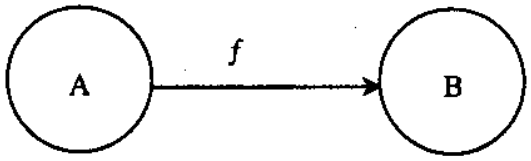


উপরে বর্ণিত চিত্রটি লক্ষ করি, এখানে A একটি সেট এবং B একটি সেট। A সেটের উপাদান 1 এর ইমেজ হলো 1 আবার -1 এর ইমেজ হলো 1। অর্থাৎ A সেটের দু'টি উপাদানের একই ইমেজ। অতএব এখানে ফাংশন f এক-এক (One to One) ফাংশন নয়।

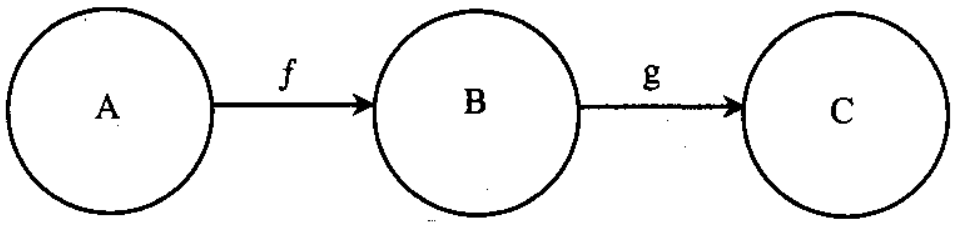
সার্বিক বা অনটু ফাংশন (Onto Function) ঃ ধরা যাক, একটি সেট A এবং অন্য সেট B। ফাংশন $f : A \to B$, অনটু ফাংশন হবে, যদি B সেটের প্রত্যেকটি উপাদান, A সেটের কোন না কোন উপাদানের ইমেজ হয়।

১.৩.১ সংযোজিত ফাংশন (Composite function) ঃ

মনে করি, A সেট থেকে B সেটে বর্ণিত ফাংশনকে f এবং B সেট থেকে C সেটে বর্ণিত ফাংশনকে g দ্বারা সূচিত করা হল। তাহলে, A সেট থেকে B সেটে বর্ণিত ফাংশনকে নিচের চিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা যায় ঃ



এবং f এবং g ফাংশনদ্বয়কে একত্রে নিচের চিত্রের সাহায্যে দেখানো যেতে পারে ঃ



যদি $a \in A$ হয়, তবে f এর অধীনে a-এর প্রতিচ্ছবি অর্থাৎ $f(a)$ হবে B সেটের একটি উপাদান। যেহেতু ফাংশন g এর ডোমেন B এবং B এর একটি উপাদান $f(a)$ সুতরাং g এর অধীনে $f(a)$ এর প্রতিচ্ছবি হবে g $(f(a))$; অর্থাৎ $g(f(a))$ হবে C এর একটি উপাদান। এভাবে A সেটের প্রত্যেকটি উপাদানকে C সেটের যে কোন অনন্য (Unique) উপাদানের সাথে সংশ্লিষ্ট করা যেতে পারে। অর্থাৎ A সেট থেকে C সেটে একটি ফাংশন পাওয়া যাবে।

এ নতুন ফাংশনকে বলা হয় f এর সঙ্গে g এর সংযোজিত ফাংশন। এটিকে সাধারণত (gof) বা gf দ্বারা সূচিত করা হয়। সংক্ষেপে, $x \in A$ হলে, (gof)

$(x) = g(f(x))$.

১.৩.২ রিকার্সসিভ ফাংশন (Recursive function) ঃ

[বাকাশিবো-২০০৩]

একটি ফাংশনকে Recursive হিসেবে সংজ্ঞায়িত করা হয় যদি ঐ ফাংশন নিজেই সংজ্ঞায়িত হয়। ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত করার জন্য নিম্নের দু'টি ধর্ম অবশ্যই থাকতে হবে-

(i) তাদের অবশ্যই কিছু নিশ্চিত যুক্তি প্রদর্শন করে যাকে বলা হয় প্রাথমিক মান (base value), যার জন্য ফাংশনটি তার পূর্বের অবস্থায় ফিরে আসে না।

(ii) প্রত্যেক সময়ে ফাংশনটি নিজে নিজেই ফিরে আসে, এই ফাংশনটির যুক্তি বা সংজ্ঞা base value এর সাথে অঙ্গাঙ্গিভাবে জড়িত থাকবে।

উপরের দু'টি ধর্মের দ্বারা একটি Recursive function কে ভালোভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়। নিম্নলিখিত উদাহরণগুলির দ্বারা ইহার ধারণা পরিষ্কার হবে-

আমরা জানি,

$\lfloor n = 1.2.3.4 \ldots . (n-1).n$

অনুরূপ ভাবে $\lfloor 3 = 1.2.3 = 6$

$\lfloor 4 = 1.2.3.4 = 24$

$\lfloor 5 = 1.2.3.4.5 = 120$

$\lfloor 6 = 1.2.3.4.5.6. = 720$

$\lfloor 5 = 5 \text{ x } L4 = 5 \times 24 = 120$

$\lfloor 6 = 6 \text{ x } L5 = 6 \times 120 = 720$

$\therefore \lfloor n = n \lfloor n-1$

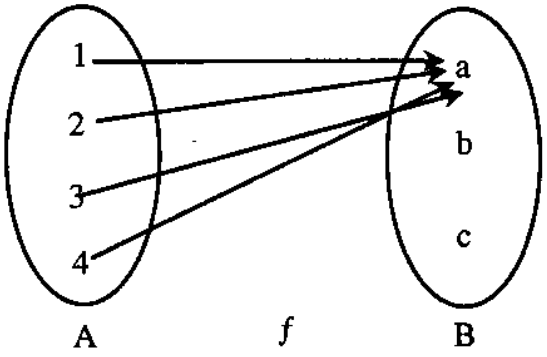
উদাহরণ ঃ Recursive সংজ্ঞা ব্যবহার করে $\lfloor 4$ এর মান নিম্নলিখিতভাবে নয়টি ধাপে দেখানো যায় -

1. $\lfloor 4 = 4 \lfloor 3$
2. $\longrightarrow \lfloor 3 = 3 \lfloor 2$
3. $\longrightarrow \lfloor 2 = 2 \lfloor 1$
4. $\longrightarrow \lfloor 1 = 1 \lfloor o$
5. $\longrightarrow \lfloor 0 = 1$
6. $\longrightarrow \lfloor 1 = 1.1 = 1$
7. $\longrightarrow \lfloor 2 = 2.1 = 2$
8. $\longrightarrow \lfloor 3 = 3 \times 2 = 6$
9. $\longrightarrow \lfloor 4 = 4 \times 6 = 24$

১.৩.৩ ধ্রুব ফাংশন (Constant function) ঃ

ধরা যাক, একটি সেট A, আরো একটি সেট B $f : A \to B$ ধ্রুব ফাংশন (Constant function) হবে, যদি A সেটের প্রত্যেকটি উপাদানের ইমেজ (প্রতিচ্ছবি) B সেটের কেবল একটি উপাদান হয়।

উদাহরণ ঃ ধরা যাক, একটি সেট A = {1, 2, 3, 4} এবং আরো একটি সেট B = {a, b, c}, এবার নিচের চিত্রটি লক্ষ করি–

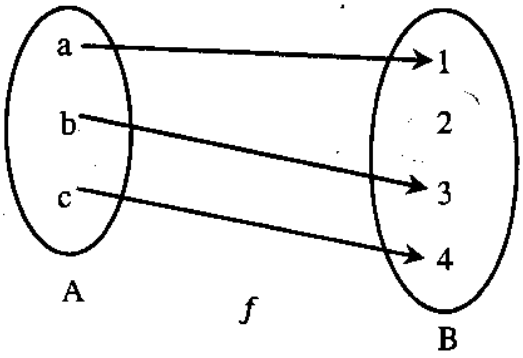


চিত্র

উপরে বর্ণিত চিত্রটি লক্ষ করি। এখানে A সেটের 4 টি উপাদান আছে এবং B সেটের 3টি উপাদান আছে। B সেটের a উপাদানটি A সেটের প্রত্যেক উপাদানের ইমেজ। সে কারণে f একটি ধ্রুব ফাংশন (Constant function)

১.৩.৪ ইমেজ ঃ

ধরা যাক, $f : A \to B$ এবং $a \in A$। যদি $f(a)$ সেটের B সেটে কেবলমাত্র একটি উপাদানের সাথে যুক্ত হয়। তবে B সেটের সে উপাদানকে $f(a)$ এর ইমেজ বা প্রতিচ্ছবি (Image) বলে। বিষয়টি একটি চিত্রের সাহায্যে ফাংশনের Range of image বুঝানো হল-



উপরের চিত্রে সেট A = {a, b, c}, সেট B = {1, 2, 3, 4} এখানে $f(a) = 1, f(b) = 3, f(c) = 4$

উপরের ফাংশনের 2 সংখ্যাটিকে কোথাও ব্যবহার করা হয়নি। চিত্রে রেঞ্জ (Range) এর যে সকল সংখ্যা ফাংশনে ব্যবহার করা হয়েছে, তাকে ফাংশন f এর ইমেজ বলে। এখানে {1, 3, 4} হলো ফাংশন f এর ইমেজ। এখানে f এর গ্রাফ হলো f = {a,1}, (b, 3}, {c, 4}

উপরিউক্ত গ্রাফ এ function এর Image এর Range হল, {1, 3, 4}।

১.৪ প্রাত্যহিক জীবনের সমস্যাদির এলগরিদম ও ফাংশন (Algorithm and Function of Real Life Problems) ঃ

এলগরিদম ঃ এলগরিদম (Algorithm) শব্দটির আভিধানিক অর্থ যে কোন প্রক্রিয়ার জন্য প্রণালী বা পর্যায় পরম্পরা অর্থাৎ সমস্যা সমাধানের কার্যক্রমকে ধারাবাহিকভাবে অনুসরণীয় কিছু ধাপে বিভাজন যে ধাপগুলো যুক্তিসম্মতভাবে পর্যায়ক্রমে অনুসরণ করলেই সমস্যার সঠিক সমাধান পাওয়া যাবে। এলগরিদম কেবলমাত্র কম্পিউটার প্রোগ্রামিং এর সাথে সম্পৃক্ত হবে এটা ঠিক নয়। এলগরিদম যেকোন কাজের জন্য প্রযোজ্য হতে পারে।

এলগরিদম কোন সমস্যা সমাধানের সূত্র বর্ণনা করেনা, বরং ঐ সমস্যা সমাধানের ধারাবাহিক প্রক্রিয়াগুলো সম্পর্কে নির্দেশ করে। এলগরিদমের সাহায্যে কোন সমস্যাকে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশে ভাগ করে সমাধান করা হয়।

যেহেতু কম্পিউটার নিজে চিন্তা করে কোন কাজ করতে পারেনা বা কোন প্রক্রিয়া নির্ধারণ করতে পারেনা, তাই এলগরিদমের মাধ্যমে ধারাবাহিকভাবে কোনটার পর কোনটা করতে করতে হবে সে সম্পর্কে কম্পিউটারকে নির্দেশ দেওয়া হয়। এলগরিদমের বৈশিষ্ট্য নিম্নরূপ ঃ

(i) এলগরিদম সহজবোধ্য হবে।

(ii) ধাপগুলো দ্ব্যর্থক হবেনা, সুস্পষ্ট এবং সুসংজ্ঞায়িত হবে।

(iii) সসীম সংখ্যক ধাপে সীমাবদ্ধ সময়ে সমস্যার সমাধান নির্ণয় করা যাবে।

(iv) একে ব্যাপকভাবে প্রয়োগ করা সম্ভব হবে।

দৈনন্দিন কাজে ব্যবহৃত কিছু এলগরিদম ঃ

উদাহরণ-১.৪২। নিচের প্রদত্ত পলিনোমিয়েল ফাংশনটির ক্ষেত্রে $x = 5$ ধরে সমাধান কর।

$f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x - 5.$

সমাধান ঃ উক্ত ফাংশনটি দুটি উপায়ে সমাধান করা যায়।

(a) **ডাইরেক্ট মেথড** (Direct Method) ঃ

$$\begin{aligned} f(5) &= 2.(5^3) - 7\,(5^2) + 4.(5) - 15 \\ &= 2.(125) - 7.(25) + 4.(5) - 15 \\ &= 250 - 175 + 20 - 15 \\ &= 80 \end{aligned}$$

লক্ষ্য কর, এখানে $4 + 3 + 1 = 8$ গুণন কার্য এবং 3 যোগ কার্যের প্রয়োজন হয়েছে।

কোন n ডিগ্রি পলিনোমিয়েল ফাংশন সমাধানের জন্য গুণন ও যোগের প্রয়োজনীয় সাধারণ হিসাব হল,

$n + (n-1) + \ldots\ldots\ldots\ldots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ সংখ্যক গুণন এবং n সংখ্যক যোগ।

(b) হরনারস্ মেথড বা সিনথেটিক ডিভিশন (Horner's Method or Synthetic Division) ঃ

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 - 7x^2 + 4x - 15 \\ &= (2x^2 - 7x + 4)\,x - 15 \\ &= ((2x - 7)\,x + 4)\,x - 15 \end{aligned}$$

তখন $f(5) = ((3)5 + 4)\,5 - 15$

$= (19)\,5 - 15$

$= 95 - 15 = 80$

সিনথেটিক ডিভিশন হল,

$$\begin{array}{r|lll} 5 & 2 & -7 & +4 & -15 \\ & & 10 & +15 & +95 \\ \hline & 2 & +3 & +19 & +80 \end{array}$$

এখানে দেখা যায় যে, 3 টি গুণন এবং 3 টি যোগের প্রয়োজন হয়েছে। সাধারণ নিয়ম অনুসারে n ডিগ্রি পলিনোমিয়েল ফাংশনের ক্ষেত্রে হরনারস্ মেথডে প্রায় n সংখ্যক গুণন ও n সংখ্যক যোগের প্রয়োজন হয়।

সুতরাং হরনারস্ মেথড ডাইরেক্ট মেথড (a) থেকে অধিক কার্যকরী।

উদাহরণ-১.৪৩। তিনটি সংখ্যার মধ্যে বড় সংখ্যাটি নির্ণয় করার এলগরিদম।

এলগরিদম ঃ

ধাপ ০১ ঃ কাজ শুরু

ধাপ ০২ ঃ সংখ্যা তিনটির মান গ্রহণ

ধাপ ০৩ ঃ প্রথম সংখ্যাটি কী দ্বিতীয় ও তৃতীয় সংখ্যার চেয়ে বড়?

(ক) হ্যা, ফলাফল ছাপাও, প্রথম সংখ্যাটি বড়।

(খ) না।

ধাপ ০৪ ঃ দ্বিতীয় সংখ্যাটি কী তৃতীয় সংখ্যার চেয়ে বড়?

(ক) হ্যা, ফলাফল ছাপাও, দ্বিতীয় সংখ্যাটি বড়।

(খ) না।

ধাপ ০৫ ঃ ফলাফল ছাপাও, তৃতীয় সংখ্যাটি বড়।

ধাপ ০৬ ঃ কাজ শেষ।

উদাহরণ-১.৪৪। ১ + ২ + ৩ + ... + N এই সিরিজের যোগফল নির্ণয়ের এলগরিদম লেখ।

এলগরিদম ঃ

ধাপ ০১ ঃ কাজ শুরু

ধাপ ০২ ঃ N এর মান গ্রহণ।

ধাপ ০৩ ঃ মনে করি যোগফলের জন্য চলক, S = 0 এবং ১, ২, ৩, ... N সংখ্যক সংখ্যা নির্দিষ্টকরণের জন্য চলক I ব্যবহৃত হয়েছে

ধাপ ০৪ ঃ যদি I > N হয়, তবে ০৭ নং ধাপে গমন কর, অন্যথায় ০৫ নং ধাপে গমন কর।

ধাপ ০৫ ঃ S = S + I

ধাপ ০৬ ঃ I = I + ১ (I এর মান বৃদ্ধি কর) এবং পুনরায় ৪ নং ধাপে যাও।

ধাপ ০৭ ঃ যোগফল ছাপাও।

ধাপ ০৮ ঃ কাজ শেষ।

উদাহরণ-১.৪৫। $ax^2 + bx + c = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। এই সমীকরণের মূলগুলো হল $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x^2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

সমীকরণের ধ্রুবকগুলো (a, b, c) মানের উপর মূলের প্রকৃতি (বাস্তব, অবাস্তব, ও সমান) নির্ভর করে। মূলগুলো বের করার জন্য একটি এলগরিদম লেখ।

এলগরিদম ঃ

ধাপ ০১ ঃ কাজ শুরু

ধাপ ০২ ঃ a, b, c এর মান গ্রহণ

ধাপ ০৩ ঃ যদি $a = 0$ হয় তাহলে একটিমাত্র মূল আছে। মূলটি, $x_1 = \frac{-c}{b}$ ছাপাও এবং শেষ কর। অন্যথায় পরের ধাপে গমন কর।

ধাপ ০৪ ঃ $D = b^2 - 4ac$ এর চিহ্ন পরীক্ষা কর। D এর চিহ্ন অনুসারে নিম্নের যেকোন একটি অনুসরণ কর।

(ক) D = 0 হয় তাহলে মূলদ্বয় সমান ও বাস্তব হবে। মূলদ্বয় $x_1, x_2 = \frac{-b}{2a}$ ছাপাও এবং শেষ কর।

(খ) D > 0 হয় তাহলে মূলধ্বয় অসমান ও বাস্তব হবে।

মূলদ্বয়,

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ ও $x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ ছাপা ও এবং শেষ কর।

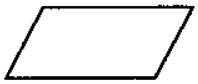
(গ) D > 0 হয় তাহলে মূলদ্বয় কাল্পনিক, কোন বাস্তব মূল নেই ছাপাও এবং শেষ কর।

ধাপ ০৬ ঃ কাজ শেষ।

প্রবাহ চিত্র (Flowchart) ঃ

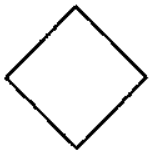
কোন সমস্যা সমাধানে যে সমস্ত প্রকৃয়া প্রয়োগ করতে হয় তার সবগুলোর ধারাবাহিক চিত্রই প্রবাহচিত। এককথায়, এলগরিদমের চিত্রায়িত রুপই প্রবাহ চিত্র। প্রবাহ চিত্র প্রদর্শনের মূল উদ্দেশ্য হল প্রকৃয়াগুলোর যৌক্তিকতা ও ধারাবাহিকতা সহজতম ভাবে উপস্থাপন করা। প্রবাহ চিত্র প্রস্তুতকরণে কতগুলো প্রতীক বা Symbol ব্যবহার করা হয়। প্রতীকগুলো তীরচিহ্ন দ্বারা সংযুক্ত করা হয় এবং ঐসব তীরচিহ্ন দ্বারা প্রোগ্রামের যৌক্তিকতার ধারা নির্দেশিত হয়। প্রবাহচিত্র প্রস্তুতকরণে ব্যবহৃত প্রতীকগুলো নিচে দেখানো হল ঃ

(i) প্রান্তিক প্রতীক ঃ উপবৃত্তাকার চিহ্ন দ্বারা প্রবাহচিত্রের আরম্ভ ও শেষ বোঝানো হয়।



(ii) ইনপুট/আউটপুট প্রতীক ঃ প্রোগ্রামে ইনপুট ও আউটপুটের ক্ষেত্রে এ প্রতীক ব্যবহৃত হয়।

(iii) প্রকৃয়াকরণ চিত্র ঃ এ চিত্র দ্বারা গানিতীক ও যুক্তিমূলক অপারেশন নির্দেশিত হয়।

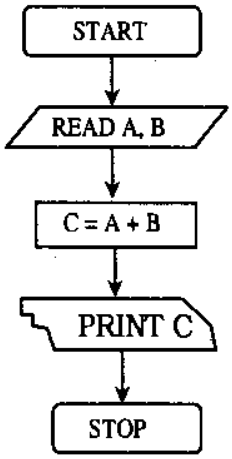


(iv) সিদ্ধান্তমূলক রম্বাকৃতি চিহ্ন ঃ সিদ্ধান্ত গ্রহণের জন্য এ চিহ্ন ব্যবহার করা হয়।

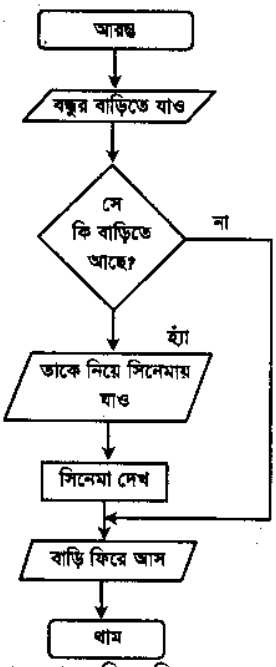
(v) সংযোগ চিহ্ন ঃ সংযোগের জন্য বা একপৃষ্ঠার প্রবাহ চিত্র অপর পৃষ্ঠায় শুরুতে এ চিহ্ন ব্যবহৃত হয়।

(vi) তীর চিহ্ন ঃ কোন একটি প্রয়োগ সম্পন্ন করার পর কোন দিক বা কোন প্রক্রিয়ার দিকে যেতে হবে তীর চিহ্ন দিয়ে নির্দেশনা দেওয়া হয়।

উদাহরণ-১.৪৬। দুইটি সংখ্যা যোগ করার একটি প্রবাহ চিত্র (flow chart)।

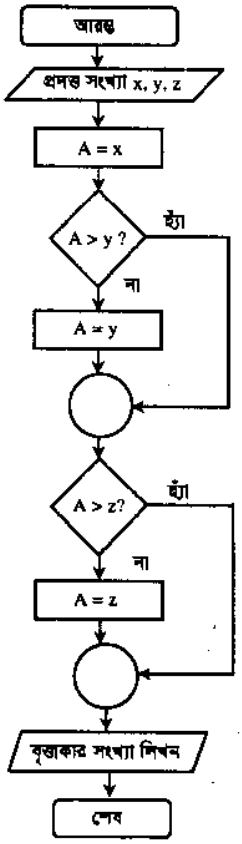


উদাহরণ ১.৪৭। দুই বন্ধুর সিনেমা দেখার প্রবাহ চিত্র।



এলগরিদম ঃ প্রথম বন্ধু দ্বিতীয় বন্ধুর বাড়িতে গেল তাকে নিয়ে সিনেমা দেখার জন্য। যদি দ্বিতীয় বন্ধু বাড়িতে থাকে তবে তাকে নিয়ে সিনেমায় যাবে। সিনেমা দেখবে, তারপর বাড়ি ফিরে আসবে। আর যদি দ্বিতীয় বন্ধুকে বাড়িতে না পায় তাহলে প্রথম বন্ধু সিনেমা না দেখেই বাড়ি ফিরে আসবে।

উদাহরণ-১.৪৮। x, y, z এই তিনটি সংখ্যার মধ্যে সবচেয়ে বড় সংখ্যাটি বের করার প্রবাহ চিত্র



এলগরিদম ঃ

(ক) মনে করি, তিনটি সংখ্যার মধ্যে x বৃহত্তম এবং এই সংখ্যাকে একটি চলক A এর সমান করা হয়।

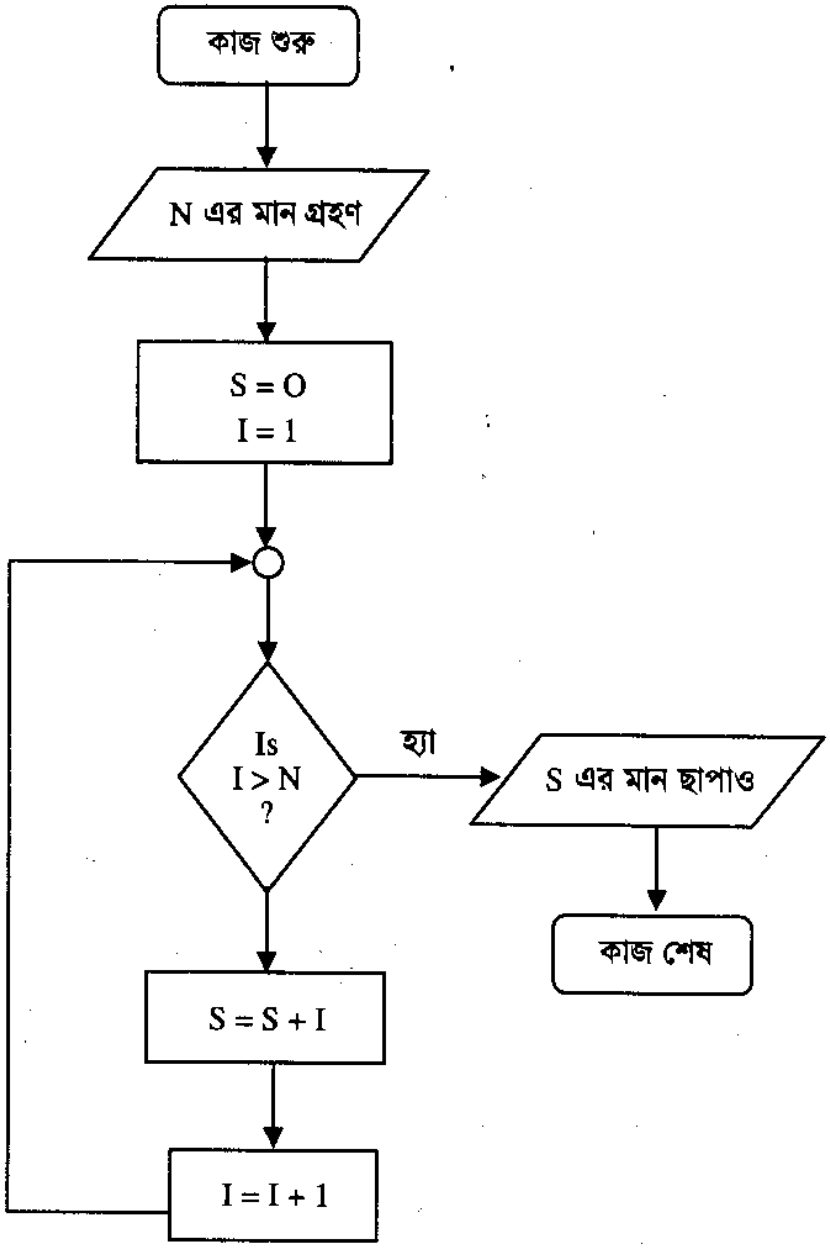
(খ) A এবং y এর মধ্যে কে বড় দেখা হয়; যদি y বড় হয় তবে A এর মান y এর সমান করা হয়; না হলে A এর মান অপরিবর্তিত রাখা হয়।

(গ) A এবং z এর মধ্যে যদি z বড় হয় তবে A এর মান z এর মান সমান হয়; না হলে A এর মান অপরিবর্তিত থাকবে।

(ঘ) A এর মানই বৃহত্তম সংখ্যার মানের সমান হয়।

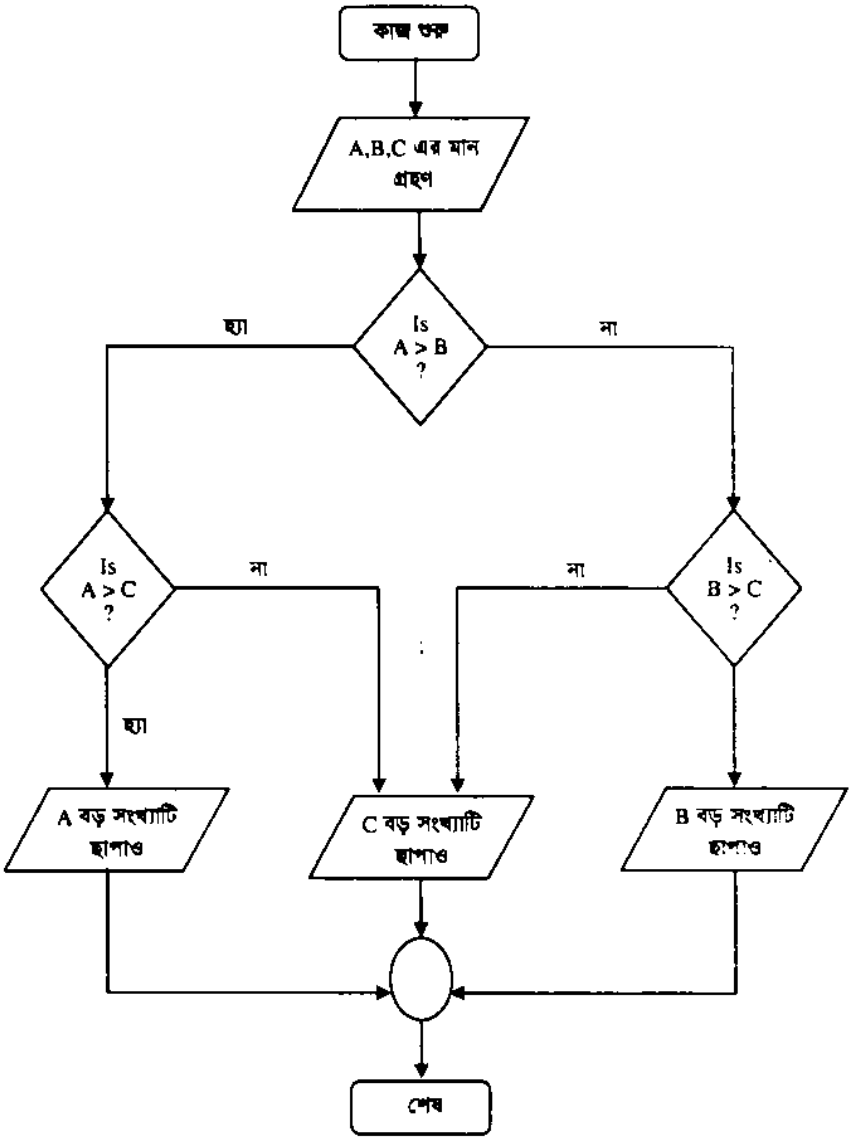
উদাহরণ-১.৪৯। ১ + ২ + ৩ + ... + N এই সিরিজের যোগফল নির্ণয়ের ফ্লোচার্ট অঙ্কন কর।

ফ্লোচার্ট ঃ



উদাহরণ-১.৫০। তিনটি সংখ্যার মধ্যে বড় সংখ্যা নির্ণয় করার ফ্লোচার্ট আঁক।

ফ্লোচার্ট ঃ



১.৫ এলগরিদম কমপ্লেক্সিটি (Complexity of Algorithm) ঃ

কম্পিউটার বিজ্ঞানের ক্ষেত্রে এলগরিদমকে বিশ্লেষণ করাই অধিক কাজ। এই বিশ্লেষণ ধর্মী গুণাবলিই হল এলগরিদম কমপ্লেক্সিটি।

একটি এলগরিদম M এর কমপ্লেক্সিটি হল f ফাংশন $f(n)$ যা এলগরিদমে ইনপুট ডেটার আকার অনুযায়ী প্রয়োজনীয় চলার সময় এবং স্টোরেজ স্থান প্রদান করে। কমপ্লেক্সিটি ফাংশন $f(n)$, যা এলগরিদমে চলার সময় প্রদান করে ধরা হয়, সচরাচর কেবল ইনপুট ডেটা n এর আকারের উপরই নির্ভর করে না, নির্দিষ্ট ডেটা ও বিবেচনা করা হয়।

নির্দিষ্ট আকৃতির সমস্যাবলি সমাধানে প্রয়োজনীয় সময় এর বিশেষণকে টাইম কমপ্লেক্সিটি এলগরিদম (Time complexity algorithm) এবং প্রয়োজনীয় কম্পিউটার মেমোরি (Memory) এর বিশ্লেষণকে স্পেস কমপ্লেক্সিটি এলগরিদম (Space complexity algorithm) বলা হয়।

নিচে তিনটি এলগরিদম দেখান হল ঃ

১। সর্বোচ্চ এলিমেন্ট নির্ধারণ ঃ

ALGORITHM–1 funding the Maximum Element in a Finite Sequence.
procedure max ($a_1, a_2 \ldots . a_n$: integers)
max : = a_1
for i : = 2 **to** n
if max < a_i **then** max : = a_i
{ max is the largest element)

এলগরিদম ঃ ১.১

২। লিনিয়ার সার্চ এলগরিদম ঃ

ALGORITHM–2 The Linear Search Algorithm
procedure linear search (x: integer, $a_1, a_2, \ldots . a_b$: distinct integers)
i : = 1
while (i ≤n and x ≠ a_i)
i : = i + 1
if ≤ n **then** location : = i
else location : = 0
{location is the subscript of them that equals x, or is 0 if x is not found}

এলগরিদম ঃ ১.২

৩। বাইনারি সার্চ এলগরিদম ঃ

ALGORITHM–3 The Binary Search Algorithm
procedure binary search (x: integer, $a_1, a_2, \ldots . a_n$: increasing integers)
i : = 1 { i is left endpoint of search interval}
j : n { j is right endpoint if search interval}
while i < j
begin
m : = [(i + j)/2]
if x> a_m **then** i : = m + 1
else j : = m
end
if x = a_i **then** location : = i
else location : = 0
{ location is the subscript of term equal to x, or 0 if x is not found}

এলগরিদম ঃ ১.৩

কমপ্লেক্সসিটি অনুসন্ধানে দুটি উপায় সচরাচর ব্যবহৃত হয়ে থাকে। যথা ঃ

১। ওয়ার্স্ট কেস (Worst case)

২। এভারেজ কেস (Average case)

নিম্নে এদের সংক্ষিপ্ত বর্ণনা প্রদান করা হল ঃ

১। ওয়ার্স্ট কেস (Worst case) ঃ যখন ITEM অ্যারে (Array) ডাটা সর্বশেষ উপাদান হয় অথবা সেখানে মোটেও উপস্থিত থাকে না। তখন ওয়ার্স্ট কেস (Worst case) হয়।

$$C(n) = n.$$

২। এভারেজ কেস (Average case) ঃ ITEM ডাটায় থাকে এবং এটা অ্যারেতে (Array) যে কোন অবস্থানে সমভাবে থাকে, তখন এভারেজ কেস (Average case) হয়। সে অনুযায়ী 1, 2, 3, ... n সংখ্যার তুলনা এবং প্রতিটি সংখ্যা ঘটার সম্ভাব্যতা $P = \frac{1}{n}$, তখন,

$$C(n) = 1.\frac{1}{n} \cdot 2.\frac{1}{n} + 3.\frac{1}{n} + \ldots\ldots\ldots + n.\frac{1}{n} .$$

$$= (1 \cdot 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots + n) . \frac{1}{n} .$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} . \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2} .$$

অনুশীলনী-১

▸▸ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি ঃ

১। ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স কাকে বলে? [বাকাশিবো-২০০৫, ০৭, ০৮, ১০, ১১, ১২]

২। ডিসক্রিট ম্যাথমেটিক্স এর বিষয়, বস্তুগুলো কী কী? [বাকাশিবো ২০০৩]

৩। রিলেশন কাকে বলে?

৪। দুটি রিলেশন এর উদাহরণ দাও।

৫। ব্যবসা-বাণিজ্যে গাণিতিক মডেল এর প্রবক্তা কে?

৬। কোন কিছুর পরিমাপ সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন উহা কত সালে ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স দ্বারা সমাধান শুরু হয়?

৭। ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স এর প্রয়োগ ক্ষেত্রগুলো দেখাও। [বাকাশিবো-২০০৫]

৮। ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স এর মূল লক্ষ্য কী?

৯। লজিক কী?

১০। বিবৃতি বা প্রতিজ্ঞা (Proposition) কী? [বাকাশিবো-২০০৩, ০৫, ০৬, ০৭, ০৯, ১০, ১১, ১২, ১৪R]

১১। অসঙ্গত উক্তি বা বিবৃতি (Contradiction) বলতে কী বুঝ? [বাকাশিবো-২০০৩, ১২]

১২। p এবং q দুটি proposition হলে $p \wedge q$ এর সত্য তালিকা তৈরি কর।

১৩। P এবং q দুটি proposition বা বিবৃতি হলে $p \vee q$ এর সত্য তালিকা দেখাও। [বাকাশিবো-২০১৩]

১৪। সেট কী?

১৫। সেটকে কতভাবে ভাগ করা যায় ও কী কী?

১৬। S একটি সেট $2. \in S$ এর অর্থ কী?

১৭। Intersection এর Vanrdiagram দেখাও। [বাকাশিবো-২০১১R]

১৮। S একটি সেট; $7 \notin S$ এর অর্থ কী?

১৯। দেখাও যে, $p \vee \sim p$ বা $p \vee \neg p$ একটি টটোলজি। [বাকাশিবো-২০১৩, ১৩R]

২০। দেখাও যে, $P \wedge \sim P$ একটি cointradiction বা অসঙ্গতি।

২১। Venn Diagram (ভেন চিত্র) কী? [বাকাশিবো- ২০০৭, ০৮]

২২। সেট $A = \{ 4, 5 \}, B = \{ x, y \}$ হলে $A \times B$ = কত? [বাকাশিবো- ২০০৭, ০৮]

২৩। De Morgan's সূত্র দুটি লেখ। [বাকাশিবো- ২০০৯, ১২R, ১৪R]

▸▸ সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি ঃ

২৪। যৌগিক বিবৃতি (কম্পাউন্ড প্রপোজিশন) বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০০৪, ০৭, ০৮, ০৯R]

২৫। তিনটি বেসিক লজিক্যাল অপারেশন এর নাম লিখ। [বাকাশিবো-২০০৫, ০৭]

২৬। যোজন (Conjunction) বলতে কী বুঝায়?

২৭। বিযোজন (Disjunction) বলতে কী বুঝায়?

২৮। নেগেশন বলতে কী বুঝায়?

২৯। শূন্য সেট (Null set) বলতে কী বুঝায়?

৩০। Union of Set S বা সংযোগ সেট কাকে বলে? উদাহরণসহ চিত্র দিয়ে বুঝিয়ে লিখ। [বাকাশিবো-২০০৬]

৩১। Intersection of Sets বা ছেদ সেট কাকে বলে? উদাহরণসহ চিত্র দ্বারা বুঝিয়ে লিখ। [বাকাশিবো-২০০৬]

৩২। অন্তর বা বিয়োগ বা Difference সেট কাকে বলে? উদাহরণসহ চিত্র দ্বারা বুঝিয়ে লিখ।

৩৩। ডিসজয়েন্ট (Disjoint) বা বিযুক্ত সেট কী? উদাহরণ সহ বুঝিয়ে লিখ। [বাকাশিবো-২০০২,০৪, ০৫,০৬,০৭,০৯,১০R,১১]

৩৪। পূরক সেট বা Complement Set কাকে বলে? উদাহরণসহ বুঝিয়ে লিখ।

৩৫। Power Set কাকে বলে? বুঝিয়ে লিখ।

৩৬। টটোলজি (Tautology) কাকে বলে? বুঝিয়ে লিখ। [বাকাশিবো-২০০৯, ১৩]

৩৭। ফাংশন কাকে বলে? উদাহরণ সহ বুঝিয়ে লিখ। [বাকাশিবো-২০১০, ১৩R]

৩৮। ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ কী? বুঝিয়ে লিখ। [বাকাশিবো-২০০৩, ০৭, ০৯R ১০R, ১১, ১২, ১৩]

৩৯। $f(x) = \sqrt{64 - x^2}$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [বাকাশিবো-২০০৫, ০৬, ১০R. ১২]

৪০। ফাংশনের Range of Image উদাহরণ সহ ব্যাখ্যা দাও। [বাকাশিবো-২০০৫]

৪১। রিকার্সিভ ফাংশন বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০০২, ১৩, ০৭]

৪২। বিপরীত ফাংশন কাকে বলে? [বাকাশিবো- ২০০৮]

৪৩। Algorithm এর Complexity কত প্রকার ও কী কী? [বাকাশিবো-২০০৩, ০৯R, ১০R]

৪৪। এক এক ফাংশন কাকে বলে? বা One to one function কাকে বলে? [বাকাশিবো-২০০৮, ১৩, ২০১৪R]

৪৫। সর্বগ্রাহী ফাংশন (Onto function) কাকে বলে? [বাকাশিবো-২০০৮, ১৩]

৪৬। এলগরিদম বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০১৩]

৪৭। এলগরিদম কমপ্লেক্সসিটি বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০০৪, ০৫, ০৭, ১০R]

৪৮। One to One এবং on to Function এর মধ্যে পার্থক্য লিখ। [বাকাশিবো-২০০৫, ০৭, ০৯, ১১, ১১R, ১২R]

৪৯। ধরি, A = { 1, 2, 3, 4, 5 } এবং B = { a, b, c, d } এবং ফাংশন f = { (1, b), (2, a), (3, d), (4, a) (5, d) } এর ডোমেন ও রেঞ্জ বের কর। [বাকাশিবো- ০৮, ০৭]

৫০। দেখাও যে, $PV \neg (p \wedge q)$ বিবৃতি একটি টটোলজি। [বাকাশিবো- ০৮, ০৭]

৫১। Union ও Intersection এর পার্থক্য চিত্রের মাধ্যম বুঝিয়ে দাও।

▶▶ রচনামূলক প্রশ্নাবলি ঃ

৫২। ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স বলতে কী বুঝায়? এর ব্যবহারিক প্রয়োগ দেখাও। [বাকাশিবো-২০০২, ২০০৫]

৫৩। ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স এর ইতিহাস সম্পর্কে আলোচনা কর।

৫৪। ডিজিটাল কম্পিউটার সিস্টেমে ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স এর গুরুত্ব আলোচনা কর।
[বাকাশিবো-২০০২, ২০০৩, ২০০৫, ২০০৭, ২০০৮, ২০০৯R, ১১, ২০১৪]

৫৫। লজিক, সেট ও ফাংশন বলতে কী বুঝায়?

৫৬। বেসিক লজিক্যাল অপারেশন সম্পর্কে বিস্তারিত বর্ণনা দাও।

৫৭। এক-এক ফাংশন ও সর্বগ্রাহী ফাংশন (One to one ও On to function) বলতে কী বুঝায় চিত্রসহ ব্যাখ্যা কর।
[বাকাশিবো-২০০২, ২০০৫, ২০০৬, ২০১০, ১২]

৫৮। প্রাত্যহিক জীবনের সমস্যাদির এলগরিদম ও ফাংশন সম্পর্কে বর্ণনা দাও।

৫৯। এলগরিদম কমপ্লেক্সসিটি সম্পর্কে যা জান লিখ। [বাকাশিবো-২০১০]

৬০। দ্যা মরগানের সূত্র দুটি লেখ এবং প্রমাণ কর। [বাকাশিবো-২০০৭, ০৯R, ১০]

৬১। **Union এবং Intersection এর মধ্যে পার্থক্য কী?** [বাকাশিবো-২০০৫, ০৯, ০৯R]

৬২। প্রমাণ কর ঃ $P \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ [বাকাশিবো-২০১১R]

৬৩। তিনটি সংখ্যার মধ্যে বড় সংখ্যাটি বের করার এলগরিদম লিখ।

সমস্যাবলি ঃ

১। দেখাও যে, $(A \times B) \cap (A \times C) = A \times (B \cap C)$ [বাকাশিবো-২০০৪]

২। প্রমাণ কর যে, $p \vee (q \wedge r)$ এবং $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ লজিক্যাল সমান। [বাকাশিবো-২০০৩, ২০০৮]

৩। $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, b, d, f, g\}$, $C = \{d, e, f, h\}$ হলে $A \cap (B \cup C)$ এর মান বের কর। [উত্তর ঃ $\{a, b, d, e\}$] [বাকাশিবো-২০০২]

৪। $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ এবং $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)$ হলে $R_1 \cap R_2 =$ কত? [উত্তর ঃ $\{1, 1\}$] [বাকাশিবো-২০০৩R]

৫। যদি A যে কোন সেট হয়, তবে দেখাও যে,

(i) $A \cup A = A$, (ii) $A \cap A = A$.

৬। A, B যে কোন সেট হলে দেখাও যে, $A \cap B = B$ যদি এবং কেবল যদি $B \subset A$.

৭। যদি A ও B যে কোন সেট হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

(i) $(A \cup B) \cap A = A$, (ii) $(A \cap B) \cup A = A$.

৮। A. B যে কোন সেট হলে দেখাও যে,

(i) $A \cup B = B \cup A$, (ii) $A \cap B = B \cap A$

৯। A, B, C যে কোন সেট হলে দেখাও যে,

(i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

(ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

(iii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; [বাকাশিবো-২০০২R, ১০R]

(iv) $(A \cap B)' = A' \cap B'$;

(v) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$;

(vi) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$.

১০। যদি $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ এবং $C = \{3, 4, 5, 6\}$ হয়, তবে $A \cup B$, $B \cap C$ এবং $(A \cup B) \cap C$ এর মান নির্ণয় কর। [উত্তর ঃ $\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$, $\{4, 6\}$, $\{3, 4, 6\}$]

১১। $A = \{1, 2, 3, 4\}$ সেট থেকে $B = \{1, 3, 5\}$ সেটে বর্ণিত S একটি অন্বয়, সেখানে, $S = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B$ এবং $x < y\}$; S কে ক্রমজোড়ের সেট রূপে প্রকাশ কর। [উত্তর ঃ $\{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\}$]

১২। $f : R \to R$ ফাংশনটি $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \geq 2 \\ x + 2, & x < 2 \end{cases}$ দ্বারা প্রকাশিত। $f(5)$, $f(0)$, $f(-2)$ নির্ণয় কর।

[উত্তর ঃ $f(5) = 10$; $f(0) = 2$; $f(-2) = 0$]

১৩। মনে কর, R বাস্তব সংখ্যার সেট এবং $f : R \to R$ যেখানে, (i) $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$, (ii) $f(x) = \frac{x-1}{2x-3}$, (iii) $f(x) = 1 - x^2$

ফাংশনগুলোর ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। **[উত্তর ঃ** (i) $R - \{3\}$; $R - \{6\}$ (ii) $R - \left\{\frac{3}{2}\right\}$, $R - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ (iii) R; $f(x) \leq 1$]

১৪। $A = R - \{3\}$ এবং $B = R - \{1\}$ এবং $A \to B$, $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$;

ফাংশনটি এক-এক এবং সার্বিক কিনা কারণসহ উল্লেখ কর। **[উত্তর ঃ** f এক-এক এবং সার্বিক।]

১৫। সার্বিক সেট $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{4, 5, 6, 7\}$, $B = \{5, 7, 9\}$ এবং $C = \{6, 7, 5, 9\}$; A', B' $(A \cap C)'$, (A') এবং $(B - C)'$ নির্ণয় কর। **[উত্তর ঃ** $A' = \{1, 2, 3, 8, 9\}$, $B' = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ $(A \cap C)' = \{1, 2, 3, 4, 8, 9\}$ $(A')' = A$ $(B - C)' = X$]

১৬। সার্বিক সেট $X = \{a, b, c, d, e\}$, $A = (a, b, d)$ এবং $B = \{b, d, c\}$| $A \cup B$, $B \cup A$, B', $B - A$, $A' \cap B$, $A \cup B'$, $A' \cap B'$, $B' - A'$, $(A \cap B)'$, $(A \cup B)'$ নির্ণয় কর। **[উত্তর ঃ** {a, b, d, c}, {a, b, d, e}, B' = {a, c}, {e}, {e}, {e}, {a, b, c, d}, {c}, {a}, {a, c, e}, {c}]

১৭। A এবং B সেট দুটি সার্বিক সেট U এর উপসেট। কোন শর্তাধীনে নিচের তথ্যগুলো সঠিক হবে তা নির্ণয় কর।

(i) $A \cup B = A \cap B$ (ii) $A \cup B = A$

(iii) $A \cap B = A$ (iv) $A \cap B = \phi$

(v) $A \cup B = \phi$ (vi) $A \cup B = U$

(vii) $A \cup \phi = U$ (viii) $A' \cap \phi = \phi$

[উত্তর ঃ (i) $A = B$ (ii) $B \subset A$ (iii) $A \subset B$ (iv) $B = A'$ (v) $A = \phi$, $B = \phi$ (vi) $B = A'$ (vii) $U = A$ (viii) $U = A$]

১৮। A এবং B সেট দুটি সার্বিক সেট U-এর উপসেট। A' এবং B' যথাক্রমে A এবং B-এর পূরক সেট এবং ϕ ফাঁকা সেট হলে মান নির্ণয় কর ঃ

(i) $A \cap A'$ (ii) $A \cup A'$ (iii) $A \cap A$

(iv) $A \cup A$ (v) ϕ' (vi) U'

(vii) $\phi \cup A$ (viii) $U \cap A$ (ix) $(B')'$

[উত্তর ঃ (i) ϕ (ii) U, (iii) A, (iv) A, (v) U (vi) ϕ, (vii) A, (viii) A, (ix) B.]

১৯। A এবং B যে কোন দুটি সেট হলে, দেখাও যে,

(i) $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$

(ii) $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$.

(iii) $A - B \subset A$

২০। $A \cap B = \phi$ হলে, দেখাও যে,

(i) $A \subset B'$ যেখানে B', B-এর পূরক সেট।

(ii) $B \cap A' = B$, যেখানে A', A- এর পূরক সেট।

(iii) $A \cup B' = B'$, যেখানে B', B-এর পূরক সেট।

২১। A, B যে কোন দুটি সেট এবং $A \subset B$;

প্রমাণ কর ঃ

(i) $A \cap B = A$ (ii) $A \cup B = B$

(iii) $B' \subset A'$ (iv) $A \cup (B - A) = B$

২২। A, B, C যে কোন তিনটি সেট হলে, প্রমাণ কর যে,

$(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$

২৩। প্রমাণ কর ঃ

(i) $A \cap (A' \cup B) = A \cap B$

(ii) $A \cup (A \cap B) = A$

(iii) $A \cap (A \cup B) = A$

(iv) $A' - B' = B - A$ [Ans. উদাহরণ ১.২৬] [বাকাশিবো-২০০৭]

২৪। $A = \{a, b\}$, $B = \{2, 3\}$ এবং $C = \{3, 4\}$ হলে,

$A \times (B \cup C)$, $(A \times B) \cup (A \times C)$, $A \times (B \cap C)$, $(A \times B) \cap (A \times C)$ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে,

(i) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(ii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ [উত্তর ঃ {(a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 2), (b, 3), (b, 4) {(a, 2), (a, 3), (b, 2), (b, 3), (a, 4), (b, 4)} {(a, 3), (b, 3)}, {(a, 3), (b, 3)}]

২৫। সরল কর ঃ $\{A \cup B) \cup (B \cup C) \cup (C \cup A)\}'$ [উত্তর ঃ $B' \cap C' \cap A'$]

২৬। $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{3, 4, 5, 6, 9\}$ সেট তিনটির জন্য, $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$ সূত্রটির সত্যতা প্রমাণ কর।

২৭। যদি $A = \{1, 3, 5, 7\}$ এবং $B = \{2, 4, 6\}$ হয়, তবে মান নির্ণয় কর ঃ

(i) $n(A \times A)$, (ii) $n(A \times B)$, (iii) $n(B \times A)$, (iv) $n(B \times B)$ [উত্তর ঃ (i) 16, (ii) 12, (iii) 12, (iv) 9]

২৮। যদি $n(A) = 17$, $n(B) = 28$ এবং $n(A \cap B) = 14$ হয়, তবে $n(A \cup B)$ নির্ণয় কর। [উত্তর ঃ 31]

২৯। $(n + y)$, 4 এবং $(9, x - y)$ ক্রমজোড় দুটি সমান হলে, x এবং y এর মান কত? [বাকাশিবো-২০০৭]

৩০। $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ফ্যাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর এবং $f(-3)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$-এর মাঝেকোণগুলোর মান নির্ণয় করা যায়, লেখ। [বাকাশিবো-২০১৩R]

৩১। $A = \{1, 2\}$ এবং $B = \{a, b, c\}$ হলে $A \times B = ?$ [উত্তর ঃ {(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)} [বাকাশিবো-২০১০]

৩২। $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $A = \{a, b, d\}$, $B = \{b, e, f\}$

$C = \{a, e, g\}$ হলে, $(A \cup C)' \cap (B \cup C)' \cup (A \cup B)'$ এর মান নির্ণয় কর। [উত্তর ঃ {c, g}] [বাকাশিবো-২০০৯]

৩৩। তিনটি Propasition p.q এর r এর মাঝে যদি p এবং r সত্য হয় এবং q মিথ্যা হয়, তাহলে যৌগিক Propasition টি সত্য না মিথ্যা হবে- $((pvr) \wedge (q \wedge r))$

p : মাহমুদ ডিপ্লোমা ইঞ্জিনিয়ারিং পাস করেছে;

q : সে একটি ভালো চাকরি পেয়েছে ;

r : কিন্তু মাহমুদের চাকরি ভালো লাগছে না। [উত্তর ঃ মিথ্যা] [বাকাশিবো-২০০৯]

৩৪। $1 + 4 + 7 + \ldots\ldots\ldots + n$ পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয়ের এলগরিদম লিখ। [বাকাশিবো-২০০৯]

অনুশীলনী-১ এর সমাধান

▸▸ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

১। কোন বিষয়বস্তু বা সমস্যাকে গাণিতিক সমাধান কল্পে একে বিভিন্ন স্বতন্ত্র অংশে বিভক্তিকরণ পূর্বক সংজ্ঞায়িত করে বিশ্লেষণী পদ্ধতির দ্বারা সহজ সমাধানকরণ কৌশলকে ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স বলে।

২। ডিসক্রীট ম্যাথমেটিকস্ এ আলোচ্য বিষয়সমূহ নিম্নরূপ–

(i) সেট তত্ত্ব (Set theory)

(ii) অন্বয় (Relations)

(iii) ফাংশন এবং এলগরিদম (Function and Algorithms)

(iv) লজিক এবং বিবৃতি (Logic and Propositional calculus)

(v) ভেক্টরস এবং ম্যাট্রিক্স (Victors and Matrices)

(vi) গণনা (Counting)

(vii) সম্ভাব্যতা (Probability theory)

(viii) গ্রাফ তত্ত্ব (Graph Theory)

(ix) বাইনারি ট্রি (Binary Trees)

(x) বুলিয়ান বীজগণিত (Boolean Algebra)

৩। বিবিধ ক্ষেত্রের মধ্যকার উপাদানসমূহের শর্তাধীন বিষয়াদিকে রিলেশন বলে।

৪। রিলেশন এর দুটি উদাহরণ নিচে তুলে ধরা হল ঃ

১। ব্যবসা ও টেলিফোন নাম্বার

২। চাকরি ও বেতন।

৫। ব্যবসা-বাণিজ্যে গাণিতিক মডেল এর প্রবক্তা হলেন রাশিয়ার গণিতবিদ অধ্যাপক এল. ভি. ক্যান্টর্ভিচ (L. V. Cantorvitch)।

৬। ১৯৪০ শতাব্দিতে কোন কিছুর পরিমাপ সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন উহা ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স দ্বারা পরিমাপ শুরু হয়।

৭। ১.০ নং অনুচ্ছেদ দ্রষ্টব্য।

৮। ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স এর মূল লক্ষ্য হল- কম্পিউটিং মেশিনের দ্বারা তথ্য সংরক্ষণ ও সহজ প্রাপ্তি ডিসক্রীট অবয়বের মাধ্যমে প্রবৃদ্ধি ঘটান।

৯। সকল ম্যাথমেটিক্স সম্পর্কিত যুক্তির ভিত্তিকে লজিক বলা হয়।

১০। বিবৃতি বা প্রতিজ্ঞা হল এমন একটি ঘোষণামূলক বাক্য যা সত্য বা মিথ্যা (True or False) কিন্তু উভয়ই নয়।

১১। কোন যৌগিক উক্তির সত্যতামান যদি এর মৌলিক উক্তিগুলি সত্যতামানের সম্ভাব্য প্রতিটি সমাবেশের জন্য মিথ্যা হয় তবে উক্ত যৌগিক (Compound) উক্তিকে অসঙ্গত (Contradiction) উক্তি বলে। Contradiction কে $p \wedge \neg p$ ($p \wedge \sim p$) দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

সত্য তালিকা (Truth Table)

P	¬P	P ∧ ¬P
T	F	F
F	T	F

যেহেতু সত্যতা ছকে $p \wedge \neg P$ এর সত্যতা মান সকল ক্ষেত্রে মিথ্যা সেহেতু $p \wedge \neg p$ একটি অসঙ্গত উক্তি।

১২। সত্য তালিকা (Truth Table) :

P	q	p ∧ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

ইহা যোজন বা Conjunction এর Truth table।

১৩। সত্য তালিকা (Truth Table) ঃ

P	q	P ∨ q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ইহা বিয়োজন বা Disjunction এর Truth Table.

১৪। সেট হচ্ছে সুনির্দিষ্টভাবে সংজ্ঞায়িত বস্তুসমূহের সমাহার বা তালিকা।

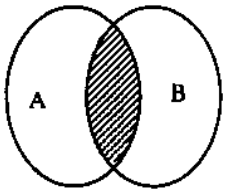
১৫। সেটকে ২ ভাবে ভাগ করা যায়। যেমন ঃ

(i) টেবুলার ফর্ম (Tabular form) বা রোস্টার পদ্ধতি (Roster Method)

(ii) সেট বিল্ডার ফর্ম (Set builder form)।

১৬। 2 হলো, S সেটের একটি উপাদান।

১৭। Intersection এর Vanrdiagram নিম্নরূপ ঃ



A ∩ B

১৮। এর অর্থ হলো, 7 সংখ্যাটি S সেটের কোন উপাদান নয়।

১৯।

P	~p ∧¬ p	p ∨ ~ p (p ∨ ¬ p)
T	F	T
F	T	T

সত্য ছক

উপরিউক্ত সত্যতা ছকে pv~ p এর সত্যতা মান সকল ক্ষেত্রে সত্য, সুতরাং টটোলজির সংজ্ঞানুযায়ী pv~p একটি টটোলজি।

২০।

P	~ P (¬P)	P ∧~ P (P ∧¬P)
T	F	F
F	T	F

উপরিউক্ত সত্যতা ছকে (Truth Table) P ∧~ P এর সত্যতা মান সকলক্ষেত্রে মিথ্যা। সুতরাং Contradiction এর সংজ্ঞা মতে P ^~ P একটি অসঙ্গতি উক্তি।

২১। দুই বা ততোধিক সেটের মধ্যে সম্পর্ক যে চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয় ঐ চিত্রকে ভেন চিত্র (Venn diagram) বলে।

২২। $A \times B = \{ (4, x), (4, y), (5, x), (5, y) \}$

২৩। De Morgan's (দুই চলক বিশিষ্ট) এর সূত্র দুটি নিচে দেওয়া হল ঃ

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

▶▶ সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

২৪। অনেক উক্তি বা বিবৃতি যা উপবিবৃতির একত্রকরণ এবং বিভিন্ন আলোচনার ধারাবাহিক সংযোজনে গঠিত হলে তাকে যৌগিক বিবৃতি বলা হয়।

যেমন- "গোলাপি হয় লাল এবং বেগুনি হল নীল"

২৫। তিনটি বেসিক লজিক্যাল অপারেশন এর নাম নিম্নে প্রদত্ত হল ঃ

১। যোজন (Conjunction) $p \wedge q$

২। বিয়োজন (Disjunction), $p \vee q$

৩। অস্বীকারকরণ (Negation), $\neg P$

২৬। যে কোন দুটি বিবৃতি এন্ড (and) দ্বারা যুক্ত হয়ে যদি যৌগিক বিবৃতি গঠিত হয়, তবে তাকে মূল বিবৃতির যোজন (Conjunction) বলা হয়।

সাংকেতিকভাবে, $p \wedge q$

যেমন, প্যারিস ফ্রান্সে এবং $2 + 2 = 4$

২৭। যে কোন দুটি বিবৃতি অর (or) শব্দ দ্বারা যুক্ত হয়ে যৌগিক বিবৃতি গঠিত হলে তাকে বিযোজন বলা হয়। সাংকেতিক ভাবে- $p \vee q$

যেমন - প্যারিস ফ্রান্সে অর (or) $2 + 2 = 4$

২৮। একটি প্রদত্ত বিবৃতি P এর অন্য বিবৃতিকে নেগেশন (Negation) বলা হয়। সাংকেতিকভাবে- - P

যেমন -

(i) প্যারিস ফ্রান্সে (ii) প্যারিস ফ্রান্সে নয়

এখানে (ii) হচ্ছে (i) এর নেগেশন।

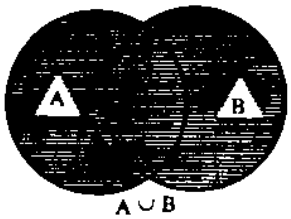
২৯। সেটে কোন উপাদান না থাকলে অর্থাৎ উপাদানবিহীন সেটকে খালি সেট বা শূন্য সেট (Null set) বলা হয়।

শূন্য সেটকে $\varnothing$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

৩০। দুটি সেটের সমস্ত উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে সেট দুটির সংযোগ সেট বলে। যদি A এবং B যে কোন দুটি সেট হয় তবে তাদের সংযোগ সেট, $A \cup B$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $A \cup B$ প্রতীকটিকে পড়া হয়, A সংযোগ B(A union B)

অতএব, $A \cup B = \{x : x \in A$ অথবা, $x \in B\}$

$A = \{a, b, c, d\}$ এবং $B = \{f, b, d, h\}$ সেট দুটির সংযোগ সেট $A \cup B = \{a, b, c, d, f, h\}$



$A \cup B$

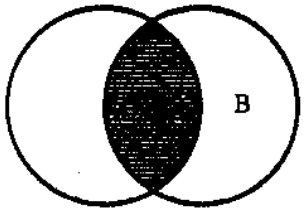
ভেন চিত্রে (Venn diagram) A এবং B সেট দুটির সংযোগ সেট, $A \cup B$ রেখাংকিত করা হয়েছে।

৩১। দুটি সেটের কমন উপাদান নিয়ে যে সেট গঠিত হয় তাকে সেট দুটির ছেদ সেট বলে। যদি A এবং B যে কোন দুটি সেট হয় তবে তাদের ছেদ সেট $A \cap B$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $A \cap B$ প্রতীকটিকে পড়া হয় 'A ছেদ B' (A intersection B)।

অতএব, $A \cap B = \{x : x \in A, x \in B\}$.

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ এবং $B = \{8, 10, 12\}$ হলে, $A \cap B$ $\{8, 10\}$।

ভেন চিত্রে A এবং B সেট দুটির ছেদ সেট $A \cap B$ রেখাংকিত করা হয়েছে।



$A \cap B$

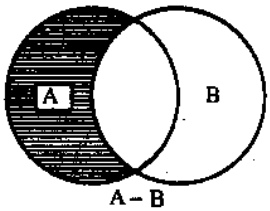
৩২। A এবং B দুটি সেট হলে, যে সমস্ত উপাদান A সেটে আছে কিন্তু B সেটে নেই, এরূপ উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে A এবং B এর অন্তরফল সেট বলে। A এবং B এর অন্তরফল সেটকে লেখা হয় $A - B$; তদ্রুপ B সেটে আছে কিন্তু A সেটে নেই এরূপ উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে B এবং A এর অন্তরফল সেট বলে। B এবং A- এর অন্তরফল সেটকে লেখা হয় $B - A$, $A - B$ কে পড়া হয় 'A বিয়োগ B'.

অতএব, $A - B = \{x : x \in A, x \notin B\}$

এবং $B - A = \{x : x \in B, x \notin A\}$

$S = \{a, b, c, d\}$ এবং $R = \{f, b, d, g\}$ হলে, $S - R = \{a, c\}$ এবং $R - S = \{f, g\}$। লক্ষণীয় যে, $R - S$ এবং $S - R$ সেট দুটি নিশ্ছেদ সেট।

ভেন চিত্রে A এবং B সেট দুটির বিয়োগফল সেট $A - B$ রেখাঙ্কিত করা হয়েছে।



$A - B$

$A - B$

৩৩। **নিশ্ছেদ সেট (Disjoint set) ঃ** দুটি সেটের কোন সাধারণ বা কমন উপাদান না থাকলে সেট দুটিকে নিশ্ছেদ সেট (Disjoint set) বলে। $A = \{1, 3, 7, 8\}$, $B = \{2, 4, 7, 9\}$ সেট দুটি নিশ্ছেদ সেট নয় কেননা, $7 \in A$ এবং $7 \in B$.

$E = \{x, y, z\}$, $F = \{a, b, c\}$ সেট দুটি নিশ্ছেদ সেট।

৩৪। যদি A একটি সেট হয়, তবে A এর বহির্ভূত সকল উপাদান নিয়ে যে সেট গঠন করা হয়, তাকে A এর পূরক সেট বলা হয়। ইহাকে A^c অথবা A' দ্বারা নির্দেশ করা হয়। অর্থাৎ $A^c = \{x/x \notin A\}$.

উদাহরণ ঃ মনে করি, সার্বিক সেট $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ এবং $A = \{2, 4, 6, 8\}$ তাহলে $A^c = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

৩৫। কোন শান্ত সেট A এর সমস্ত উপসেটের সেটকে A এর পাওয়ার সেট (সূচক সেট) বলে।

A এর পাওয়ার সেট বা সূচক সেটকে P(A) বা 2^A দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

গাণিতিকভাবে, $P(A) = \{x : x \in A\}$

উদাহরণ ঃ

ধরি, $A = \{a\}$, $B = \{a,b\}$, $C = \{a,b,c\}$

এখানে, $P(A) = \{\varnothing, \{a\}\}$ এবং $n(P(A)) = 2^1 = 2$

$P(B) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ এবং $n(P(B)) = 2^2 = 4$

$P(C) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ এবং $n(P(C)) = 2^3 = 8$

৩৬। কোন যৌগিক বিবৃতি (Compound proposition) এর সত্যতা মান যদি এর মৌলিক বিবৃতিগুলোর সত্যতা মানের সম্ভাব্য প্রতিটি সমাবেশের জন্য সত্য হয়, তবে উক্ত যৌগিক বিবৃতি (Compound Proposition) কে টটোলজি (Tautology) বলে। F বিবৃতিটি টটোলজি হলে তাকে $\pounds P$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

উদাহরণ ঃ

P	¬ P	⊦P = P ∨¬P
T	F	T
F	T	T

যেহেতু উপরিউক্ত ছকে p∨¬p এর সত্যতা মান সকলক্ষেত্রে সত্য, সুতরাং p∨¬p একটি টটোলজি।

৩৭। **ফাংশন (Function) ঃ**

মনে করি, A এবং B যে কোন দু'টি সেট। A থেকে B সেটে ফাংশন f হচ্ছে $A \times B$ এর এমন একটি উপসেট যেন

(i) প্রতিটি $a \in A$ এর জন্য একটি উপাদান $b \in B$ থাকে যেখানে $(a, b) \in f$ এবং

(ii) যদি $(a,b) \in f$ হয় এবং $(a, b') \in f$ হয় তবে অবশ্যই $b = b'$ হবে।

A সেট থেকে B সেটে f একটি ফাংশন হলে আমরা লিখি $f : A \to B$

যদি $(a, b) \in f$ হয়, তবে b কে f এর অধীনে a এর ইমেজ (প্রতিচ্ছবি) বলা হয় এবং আমরা লিখি $b = f(a)$

উদাহরণ ঃ

যদি A = {1,2} এবং B = {a, b} হয় তবে নিম্নের প্রত্যেকটি অন্বয় (Relation) A সেট হতে B সেটে ফাংশন।

$f_1 = \{(1, a), (2, a)\}$, $f_2 = \{(1, a), (2, b)\}$

$f_3 = \{(1, b), (2, a)\}$, $f_4 = \{(1, b), (2, b)\}$

উদাহরণ ঃ

যদি A = {a, b} এবং B = {1, 2} হয় তবে A সেট হতে B সেটে $f = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1)\}$ অনুযায়ী ফাংশন নয়। কার A সেটের একই উদাহরণ a, B সেটের দু'টি ভিন্ন ভিন্ন উপাদান 1 এবং 2 এর সাথে সম্পর্কিত।

সুতরাং বলা যায়, প্রত্যেক ফাংশন অন্বয় কিন্তু প্রত্যেক অন্বয় ফাংশন নয়।

৩৮। ধরি $f : A \to B$ একটি ফাংশন। এখানে A কে ফাংশনের ডোমেন এবং B কে এর কোডোমেন বলা হয়।

A সেট থেকে B সেটে f যদি একটি ফাংশন হয় তবে ডোমেন f = A এবং B সেটের যে সমস্ত উপাদান সকল $a \in A$ এ ইমেজ রূপে পাওয়া যায় ঐ উপাদানগুলোই f এর রেঞ্জ। অর্থাৎ ফাংশন f এর রেঞ্জ বলতে কো-ডোমেন B এর f উপসেটকে বুঝায় যার প্রত্যেকটি উপাদান ডোমেন A এর সাথে f সম্পর্কিত। ফাংশনের ডোমেনকে D_f এর রেঞ্জকে R_f দ্বা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ ঃ ধরি A = {a, b, c} এবং B = {1, 2, 3, 4} এখানে f = {(a, 1), (b, 3), (c, 1) একটি ফাংশনের ডোমে

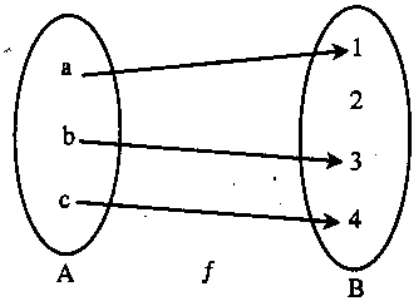
D_f= {a, b, c}

কো-ডোমেন B বা রেঞ্জ R_f = {1, 3}

৩৯। $(x) = \sqrt{64 - x^2}$ বা $y = \sqrt{64 - x^2}$ এর ডোমেন x = 8 এবং x = – 8 এর অন্তর্গত প্রতিটি বাস্তব সংখ্যা অর্থাৎ $-8 \le x \le$

কিন্তু এর রেঞ্জ $0 \le y \le 8$

৪০। ধরা যাক, $f : A \to B$ এবং $a \in A$। যদি $f(a)$ সেটের B সেটের কেবলমাত্র একটি উপাদানের সাথে যুক্ত হয়, তবে B সেটের সে উপাদানকে $f(a)$ এর ইমেজ বা রেঞ্জ বলে। বিষয়টি একটি চিত্রের সাহায্যে বোঝানো যাক।



উপরের চিত্রে সেট A = {a, b, c} এবং সেট B = {1, 2, 3, 4} এখানে $f(a) = 1$, $f(b) = 3$, $f(c) = 4$

উপরের ফাংশনের 2 সংখ্যাটিকে কোথাও ব্যবহার করা হয়নি। এখানে {1, 3, 4} হলো ফাংশন f এর ইমেজ বা রেঞ্জ বলে অর্থাৎ ফাংশনের ইমিজ এর রেঞ্জ (Range of Image)।

৪১। একটি ফাংশনকে Recursive হিসেবে সংজ্ঞায়িত করা হয় যদি ঐ ফাংশন নিজেই সংজ্ঞায়িত হয়। ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত করার জন্য নিম্নের দু'টি ধর্ম অবশ্যই থাকবে।

(i) তাদের অবশ্যই কিছু নিশ্চিত যুক্তি প্রদর্শন করে যাকে বলা হয় প্রাথমিক মান যার জন্য ফাংশনটি তার পূর্বে অবস্থায় ফিরে আসে না।

(ii) প্রত্যেক সময়ে ফাংশনটি নিজে নিজেই ফিরে আসে। এ ফাংশনটির যুক্তি বা সংজ্ঞা প্রাথমিক মানের সাথে অঙ্গাঅঙ্গিভাবে জড়িত থাকবে।

উদাহরণ ঃ Recursive সংজ্ঞা ব্যবহার করে। $\lfloor 4$ এর মান নিম্নলিখিতভাবে নয়টি ধাপে দেখানো যায়।

1. $\lfloor 4 = 4 \lfloor 3$

2. $\longrightarrow \lfloor 3 = 3 \lfloor 2$

3. $\longrightarrow \lfloor 2 = 2 \lfloor 1$

4. $\longrightarrow \lfloor 1 = 1 \lfloor 0$

5. $\longrightarrow \lfloor 0 = 1$

6. $\longrightarrow \lfloor 1 = 1.1 = 1$

7. $\longrightarrow = 2.1 = 2$

8. $\longrightarrow \lfloor 3 = 3 \times 2 = 6$

9. $\longrightarrow \lfloor 4 = 4 \times 6 = 24$

৪২। ধরা যাক $f : A \to B$ এবং $b \in B$। $f^{-1}(b)$, A সেটের এমন একটি বা একাধিক উপাদান নির্দেশ করে যার বা যাদের প্রতিচ্ছবি হচ্ছে b। b যদি A সেটের কোন উপাদানের প্রতিচ্ছবি না হয় তবে $f^{-1}(b)$ তে কোন উপাদান থাকবে না। অতএব, $f^{-1}(b)$-তে এক বা একাধিক উপাদান থাকতে পারে অথবা আদৌ কোন উপাদান নাও থাকতে পারে। কিন্তু f যদি একই সাথে এক-এক এবং সার্বিক ফাংশন হয়, তবে $f(A) = B$ অর্থাৎ B সেটের সমস্ত উপাদানই f-এর রেঞ্জ হয় এবং B সেটের পৃথক পৃথক উপাদান A সেটের ভিন্ন ভিন্ন উপাদানের প্রতিচ্ছবি হয়। সেক্ষেত্রে $f^{-1}(b)$-এর মান অনন্য অর্থাৎ $b \in B$-এর জন্য A সেটে $f^{-1}(b)$ একটি মাত্র উপাদান পাওয়া যাবে। অর্থাৎ $b \in B$-এর জন্য A সেটে আমরা একটি মাত্র উপাদান পাই। এ ফাংশনটিকেই বিপরীত ফাংশন বলা হয় এবং আমরা লিখি $f^{-1} : B \to A$। উল্লেখ্য যে, কোন ফাংশনের বিপরীত ফাংশন পাওয়া যাবে যখন $f : A \to B$ একই এক-এক এবং সার্বিক ফাংশন হবে।

৪৩। Algorithm এর Complexity দুই প্রকার।

(i) টাইম কমপ্লেক্সসিটি এলগরিদম (Time Complesity Algorithm)

(ii) স্পেস কমপ্লেক্সসিটি এলগরিদম (Space Complesity Algorithm)।

সংজ্ঞা ঃ

(i) টাইম কমপ্লেক্সসিটি এলগরিদম ঃ নির্দিষ্ট আকৃতির সমস্যাবলি সমাধানে প্রয়োজনীয় সময় এর বিশ্লেষণকে (Time Complesity Algorithm) বলে।

(ii) স্পেস কমপ্লেক্সসিটি এলগরিদম ঃ প্রয়োজনীয় কম্পিউটার মেমোরি (Memory) এর বিশ্লেষণকে (Space Complesity Algorithm) বলে।

৪৪। যদি f ফাংশন এর অধীনে তার ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের প্রতিচ্ছবি ভিন্ন ভিন্ন হয়। তবে f কে এক এক ফাংশন (One to function) বলা হয়।

৪৫। মনে করি, প্রদত্ত ফাংশন হল f; $A \to B$, তাহলে f এর রেঞ্জ $f(A)$ হবে B এর উপসেট। যদি $f(A) = B$ হয়, অর্থাৎ B এর সব উপাদানই A এর কমপক্ষে একটি উপাদানের প্রতিচ্ছবি হয়, তবে f কে সর্বগ্রাহী ফাংশন (One to function) বলে।

৪৬। প্রাত্যহিক জীবনের সব ধরনের কার্যাবলি সুষ্ঠুভাবে সম্পন্ন হয় কার্যের ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশের যুক্ত যুক্ত পর্যায়ক্রমিক সম্পাদনের ফলে। সমস্যা সমাধানের এই যৌক্তিক ক্রমানুযায়ী পদ্ধতিকে এলগরিদম বলা হয়।

৪৭। কম্পিউটার বিজ্ঞানের ক্ষেত্রে এলগরিদমকে বিশ্লেষণ করাই অধিক কাজ। এই বিশ্লেষণ ধর্মী গুণাবলিই হচ্ছে এলগরিদম কমপ্লেক্সসিটি।

৪৮। ১.৩ নং অনুচ্ছেদ দ্রষ্টব্য।

৪৯। **f এর ডোমেন** $Df = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

f এর রেঞ্জ $Rf = \{a, b, d\}$

৫০। **প্রমাণ ঃ**

$= PV \neg (p \wedge q)$

$= (PV (\neg PV \neg q))$

$= (PV (\neg PV P))$

$= (PVP)$

$= TVP$

T.

৫১। Union ও Intersection এর মধ্যে পার্থক্য নিম্নরূপ ঃ

Urion	Interseetion
১। একাধিক মেটের সকল উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে সেটের Union বলা হয়।	১। একাধিক সেটের কমন উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে সেটের Intersection বলে।
২। A ও B দুটি সেট হলে এদের Union $A \cup B$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।	২। A ও B দুটি সেট হলে এদের Intersection $A \cap B$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
৩। $A \cup B$ কে A Union B পড়া হয়।	৩। $A \cap B$ কে A Intersection B পড়া হয়।
৪। গাণীতিকভাবে লেখা হয়। $A \cup B = \{x : x \in A$ অথবা $x \in B\}$	৪। গানীতিকভাবে লেখা হয়। $A \cap B = \{x : x \in A$ এবং $x \in B\}$
৫। $A \cup B$ তে A ও B সেটের সকল উপাদান গ্রহণ করে।	৫। $A \cap B$ তে শুধুমাত্র কমন উপাদান গ্রহণ করা হয়।

▶▶ রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ঃ

৫২। ডিসক্রীট (Discrete) বলতে কোন অবজেক্ট বা বিষয়বস্তুকে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র আলাদা বা স্বতন্ত্র অংশে (Elements) বিভাজন বা বিভক্তিকরণ প্রক্রিয়াকে বুঝায়। অতএব, কোন বিষয়বস্তু বা সমস্যাকে গাণিতিক সমাধানকল্পে একে বিভিন্ন স্বতন্ত্র অংশে বিভক্তিকরণপূর্বক সংজ্ঞায়িত করে বিশ্লেষণী পদ্ধতি দ্বারা সহজ সমাধানকরণ কৌশলকে ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স (Discrete Mathematics) বলা হয়। ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স মূলত কাম্য সমাধান নির্ণয়ের অত্যাধুনিক পদ্ধতি। কিন্তু এগুলোর মধ্যে গুরুত্বপূর্ণ হচ্ছে সীমিত/দুষ্প্রাপ্য সম্পদের বণ্টন সমস্যা।

যে সকল সমস্যার ক্ষেত্রে আমরা ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স প্রয়োগ করি তা নিম্নরূপ ঃ

১। একটি কম্পিউটার সিস্টেমে কি কি উপায়ে ভ্যালিড পাসওয়ার্ড বাছাই করা যায়?

২। একটি লটারী জেতার সম্ভাব্যতা কতটুকু?

৩। একটি নেটওয়ার্কে দুটি কম্পিউটারে কোন যোগসূত্র আছে কিনা?

৪। যোগাযোগের ক্ষেত্রে দুটি শহরের মধ্যে সংক্ষিপ্ত পথ কোনটি?

৫। কীভাবে পূর্ণ সংখ্যার তালিকা বর্ধিত ক্রমে সাজান যায়?

৬। সাজানোর ক্ষেত্রে কতগুলো পর্যায় দরকার?

৭। দুটি পূর্ণ সংখ্যার সংযোগে কীভাবে একটি সার্কিট প্রণয়ন করা যায়?

৮। কতগুলো ভ্যালিড ইন্টারনেট এ্যাড্রেস সেখানে রয়েছে?

আরোও সহজভাবে বলতে গেলে ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স সাধারণত কোন অবজেক্টকে গণনা করা, নির্দিষ্ট সেট সমূহের মধ্যকার সম্পর্ক পর্যালোচনা এবং নির্দিষ্ট পর্যায়গুলো বিশ্লেষণ করা ইত্যাদি কারণে ব্যবহার করা হয়. ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স এর গুরুত্বপূর্ণ মূল লক্ষ্য হলো কম্পিউটিং মেশিনের দ্বারা তথ্য সংরক্ষণ ও সহজ প্রাপ্তি ডিসক্রীট অবয়বের মাধ্যমে প্রবৃদ্ধি ঘটানো।

৫৩। রাশিয়ার গণিতবিদ অধ্যাপক এল. ভি. ক্যান্টোর্ভিচ (L. V. Cantorovich) প্রথমে ব্যবসা বাণিজ্যে সমস্যা সমাধানের জন্য এরূপ গাণিতিক মডেল প্রয়োগ করেন। ১৯৩৯ খ্রিস্টাব্দে "Mathematical Methods in the organization and Planning of production" প্রবন্ধে তিনি বলেন ব্যবসায় অনেক ধরনের সমস্যা আছে। এসব সমস্যাকে স্বতন্ত্রভাবে সংজ্ঞায়িত করে বিশ্লেষণী পদ্ধতির দ্বারা সহজে সমাধান করা যায়। এরূপ বিশ্লেষণী পদ্ধতি প্রয়োগ করে সমস্যার গাণিতিক সমাধানকরণ কৌশলকে ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স বলা হয়।

একজন ছাত্র যখন ঘন্টায় 25 কি. মি. বেগে একটি মটর সাইকেল চালায়, প্রতি কিলোমিটারে পেট্রোল খরচ হয় 8.00 টাকা; যখন সে ঘন্টায় 40 কি. মি. বেগে চালায়, তখন প্রতি কিলোমিটারে পেট্রোল খরচ হয় 10.00 টাকা। পেট্রোল কেনার জন্য তার নিকট 200.00 টাকা আছে। স্বাভাবিকভাবে ছাত্রটি এক ঘন্টায় 200.00 টাকা খরচ করে সর্বাধিক দূরত্ব যেতে চাইবে। এর সমাধান ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স দ্বারা অতি সহজেই সমাধান করা যায়।

এই কৌশল প্রাপ্তব্য সম্পদকে এরূপ সর্বোত্তম উপায়ে বণ্টন করে যেন ফার্মের দ্রব্যের/পণ্যের চাহিদা ও সরবরাহ বিধিকে পরিপূর্ণ করা যায়। এখানে ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স পরিকল্পনা ও কর্মপন্থা বাস্তবায়ন পরিকল্পনা প্রক্রিয়ার বিভিন্ন বিকল্পের মধ্য হতে ব্যয় ন্যূনতমকরণ অথবা মুনাফা সর্বোচ্চকরণ ইত্যাদির জন্য ব্যবহৃত হয়েছে। ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স , বণ্টন, কার্য অর্পণ, পরিবহন ইত্যাদি সমস্যার ক্ষেত্রে প্রয়োগ করা হয়।

১৯৪০ শতাব্দিতে শর্তাধীনে কোন কিছুর পরিমাণ কিভাবে সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন হবে এই সমস্যাগুলোর বেশিরভাগই ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স (Discrete Mathematics) দ্বারা সমাধান করা শুরু হয়।

৫৪। ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স হল বিচ্ছিন্ন গণিত। অর্থাৎ সমস্যাকে বিভিন্ন ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র অংশে বিচ্ছিন্ন করে তার ম্যাথমেটিক্যাল বা গাণিতিক সমাধানকৃত সর্বাধিক কৌশলই হল ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স। ডিজিটাল কম্পিউটার শুধু গণনাকারী যন্ত্রই নয়। এর কার্য পরিধি আরও ব্যাপক। এর সাহায্যে গণনা করা যায়। গাণিতিক হিসাব যেমন- যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ করা যায়। এমনকি এই কম্পিউটার মানুষের চেয়েও নির্ভুলভাবে যৌক্তিক সিদ্ধান্তমূলক কাজের দ্রুততর সমাধান দিতে সক্ষম। কাজের অনেক নির্দেশ কম্পিউটারের স্মৃতিতে সংরক্ষণ করা সম্ভব এবং প্রয়োজনে একটির পর একটি করে সেসব নির্দেশ নির্ভুলভাবে ও তড়িৎ গতিতে নির্বাহ করা যায়।

ডিজিটাল কম্পিউটার সাধারণ কম্পিউটার থেকে অনেক উন্নত ও বৈশিষ্ট্যমন্ডিত। ডিস্ক্রীট ম্যাথমেটিক্স, কোন বিষয়বস্তুকে ডিসক্রীট আকারে প্রকাশে আত্মনিয়োগ করে। সব ধরনের ডিসক্রীট অবয়ব সেট দ্বারা গঠিত যা আবার গণনা (Counting) ও অন্বয় (Relation) যুক্ত উপাদানের সমাহার। ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স বস্তুকে গণনা, নিরূপণ যোগ্য সেটের উপাদানের মধ্যে অন্বয় নির্ধারণসহ প্রক্রিয়া সংঘটনের ক্রম ধাপ বিশ্লেষণে ব্যাপৃত হয়।

ডিজিটাল কম্পিউটার সিস্টেমে তথ্য উপাত্ত (Information) জমা করা (Stored) এবং সুনিপুণভাবে পরিচালনা (Manipulated) করাই ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স ব্যবহারের মূল কারণ (key Reason), ডেটা স্ট্রাকচার (Data structure), এলগরিদম (Algorithms), ডেটা বেস তত্ত্ব (Data Base Theory), অটোমেটা তত্ত্ব (Auto mata Theory), ফরমাল ল্যাংগুয়েজ (Formal languages), কমপাইলার তত্ত্ব (Compiler Theory), কম্পিউটার নিরাপত্তা (Computer Security) এবং অপারেটিং সিস্টেম (Operating System) প্রভৃতি বিশ্লেষণ ও পরিচালনে ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স এর গুরুত্ব ও প্রয়োজনীয়তা অনস্বীকার্য।

৫৫। **লজিক (Logic) ঃ** সকল ম্যাথমেটিক্স সম্পর্কিত যুক্তির ভিত্তি কে লজিক (Logic) বলা হয়। কম্পিউটিং মেশিন বিনির্মাণে, কৃত্রিম বুদ্ধি বিবেচনায়, কম্পিউটার প্রোগ্রামিং, কম্পিউটার প্রোগ্রামিং ল্যাংগুয়েজ এবং কম্পিউটার বিজ্ঞানের অন্যান্য ক্ষেত্রে লজিক এর ব্যবহারিক প্রয়োগ পরিলক্ষিত হয়।

লজিক নীতি ম্যাথমেটিক্স এর আনুপূর্বিক বর্ণনার সারমর্মিক অর্থ প্রদান করে। এই নীতি ম্যাথমেটিক্স সম্পর্কিত যুক্তির বৈধ ও অবৈধতার মধ্যে পার্থক্য নির্ধারণে ব্যবহৃত হয়। এতদসত্ত্বেও কম্পিউটার সার্কিট বিনির্মাণ (Design of computer circuit), কম্পিউটার প্রোগ্রাম তৈরি, প্রোগ্রামের সঠিকতা সম্পর্কে নিশ্চিত হওয়া জনিত বহুবিধ বিষয়ে এই নীতির প্রভূত ব্যবহার দেখা যায়।

সেট (Set) ঃ সুনির্দিষ্টভাবে সংজ্ঞায়িত বস্তুসমূহের সমাহার বা তালিকাকে সেট বলা হয়। সেটে অন্তর্ভুক্ত বস্তুসমূহ সংখ্যা, বর্ণমালার বর্ণ, মানুষ, নদী ইত্যাদি যে কোন জিনিস হতে পারে। যে সমস্ত বস্তু নিয়ে সেট গঠিত হয় সেগুলোকে সেটের উপাদান বলা হয়।

ফাংশন ঃ একটি অন্বয় (Relation) যদি এরূপ হয় যে A সেটের উপাদান B সেটের অনন্য (Unique) উপাদানের সাথে সংশ্লিষ্ট (Associated) থাকে, তাহলে ঐ অন্বয়কে A সেট থেকে B সেটে একটি ফাংশন বলা হয়।

৫৬। তিনটি বেসিক লজিক্যাল অপারেশন যোজন (Conjunction) বিয়োজন (Disjunction) এবং অস্বীকারণ (Negation)। তিনটি ইংরেজি শব্দ যথাক্রমে এন্ড (AND), অর (OR) এবং নট (NOT) দ্বারা নির্দেশিত হয়।

১। যোজন (conjuction) $p \wedge q$ ঃ যে কোন দুটি বিবৃতি এন্ড (AND) দ্বারা যুক্ত হয়ে যৌগিক বিবৃতি (compound Proposition) গঠিত হলে তাকে মূল বিবৃতির যোজন বলা হয়।

সাংকেতিক ভাবে, $P \wedge q$

পড়া হয়, p এন্ড q যা p এবং q এর যোজন। যেহেতু p AND q হল একটি বিবৃতি। এর সত্য মান আছে এবং এই সত্য মান p এবং q এর সঠিক মানের ওপর নির্ভরশীল। বিশেষত ঃ

যদিও p এবং q সত্য হয়, তখন $p \wedge q$ সত্য অন্যথায় $p \wedge q$ সত্য অন্যথায় $p \wedge q$ মিথ্যা"।

২। বিয়োজন (Disjunction) $p \vee q$ ঃ যে কোন দু'টি বিবৃতি অর (OR) শব্দ দ্বারা যুক্ত হলে যৌগিক বিবৃতি (Compound. proposition) গঠিত হলে তাকে বিয়োজন Disjuntion) বলা হয়।

সাংকেতিকভাবে $P \vee q$

পড়া হয় "p OR q" যা p এবং q এর মধ্যে বিয়োজন। pvq সত্য হবে নাকি মিথ্যা হবে তা বিবেচ্য বিষয়। এখানে লক্ষণীয় যে, p প্রপোজিশন বা বিবৃতি সত্য হতে পারে আবার মিথ্যাও হতে পারে। q প্রপোজিশন বা বিবৃতি সত্য হতে পারে আবার মিথ্যাও হতে পারে। pvq যৌগিক (প্রপোজিশন) মিথ্যা হবে যদি p মিথ্যা হয় এবং q মিথ্যা হয়। অন্যথায় pvq বিবৃতি (proposition) সত্য হবে। এ বিষয়ে নিম্নের টেবিলের দিকে নজর দেওয়া যাক।

p	q	pvq
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

অস্বীকাকরণ (Negation) $\neg P$ ঃ একটি প্রদত্ত বিবৃতি p, এর না বিবৃতিকে অস্বীকারকরণ (Negation) বলা হয়।

সাংকেতিকভাবে

$\neg p$

পড়া হয় "NOT p" p এর অস্বীকারণ বুঝায়।

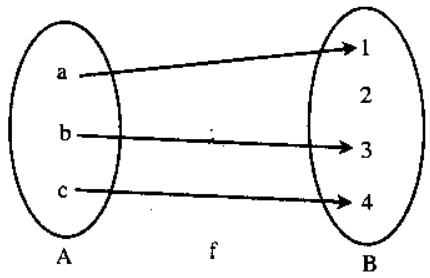
"যদি p সঠিক হয় তখন $\neg p$ মিথ্যা হয় এবং যদি p মিথ্যা হয়, তবে $\neg p$ সত্য হবে"।

এই বিষয়ে নিম্নের টেবিলের দিকে নজর দেওয়া যাক-

p	$\neg p$
F	T
T	F

৭। **এক-এক ফাংশন (One-to-One Function) ঃ** কোন ফাংশন $f : A \to B$ কে এক-এক ফাংশন (One-to-One Function) বলা হবে যদি ডোমেন A এর ভিন্ন ভিন্ন উপাদানের ভিন্ন ভিন্ন ইমেজ বিদ্যমান থাকে।

নিম্নের A সেট এবং B সেটে লক্ষ করি,

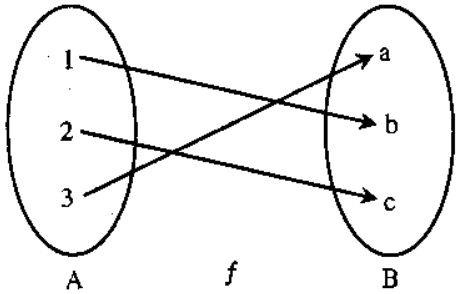


চিত্র ঃ

এখানে f একটি এক-এক ফাংশন (One-to-One Function), কারণ A সেটের একটি উপাদান a এর ইমেজ 1 এখানে a উপাদানের কেবলমাত্র একটি ইমেজ। ঠিক একইভাবে b এরও একটি করে ইমেজ। এ কারণে ফাংশন f একটি এক-এক ফাংশন।

সার্বিক বা অনটু ফাংশন (Onto function) ঃ ধরা যাক, একটি সেট A এবং অন্য সেট B। ফাংশন $f : A \to B$ অনটু ফাংশন হবে, যদি B সেটের প্রত্যেকটি উপাদান, A সেটের কোন কোন উপাদানের ইমেজ হয়।

নিম্নের A সেট ও B সেটে লক্ষ করি



চিত্র ঃ

এখানে একটি সেট A = {1, 2, 3} এবং আরো একটি সেট B = {a, b, c} উপরে বর্ণিত চিত্রে B সেটের প্রত্যেকটি উপাদান A সেটের কোননা কোন উপাদানের ইমেজ। সে কারণে f একটি অনটু ফাংশন (onto function)। এখানে উল্লেখ করা যায় যে, f ফাংশনটি একদিকে অনটু ফাংশন, আবার অন্যদিকে এক-এক (One-to-one) ফাংশন।

৫৮। কম্পিউটার ব্যবহার করে কোন সমস্যা সমাধানের জন্য প্রথমে সমাধানের উপায় স্থির করতে হয়। তারপর উপায়টিকে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশে বিভক্ত করে সেই অংশগুলোকে যুক্তি সম্মতভাবে পর্যায়ক্রমে কম্পিউটার দিয়ে সম্পন্ন করা হয়। শুধু কম্পিউটার দিয়ে সমস্যা সমাধানেই নয়, প্রাত্যহিক জীবনে সব কাজই আমরা করে থাকি ছোট ছোট আংশিক কাজের যুক্তি সম্মত ও পর্যায়ক্রমিক সমন্বয়ের মাধ্যমে। কোন কাজ করতে গিয়ে কাজের অংশগুলোর সমন্বয় সাধনের সময় যদি তাদের ক্রম ঠিক না থাকে তাহলে সেই কাজটি সম্পন্ন করা সম্ভব হয় না।

প্রাসঙ্গিক কারণেই বলতে হয় যে, সব ধরনের কাজই সুষ্ঠুভাবে সম্পন্ন হয় কাজের ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশের যুক্তিযুক্ত পর্যায়ক্রমিক সম্পাদনের ফলে। সমস্যা সমাধানের এই যৌক্তিক ক্রমানুসারী পদ্ধতিকে বলা হয় সমস্যা সমাধানের এলগরিদম।

প্রকৃতপক্ষে, কোন একটি সমস্যা সমাধানের সসীম ক্রমিক বাস্তবিক নির্দেশনা তালিকাকে এলগরিদম (Algorithm) বলা হয়। ধরা যাক, একটি x ইনপুট বিশিষ্ট ফাংশন f এর আউটপুট (Output $f(x)$ নির্ণয় করতে হবে। বাস্তবিক অর্থে একাধিক উপায়ে $f(x)$ নির্ধারণ করা যাবে।

৫৯। কম্পিউটার বিজ্ঞানের ক্ষেত্রে এলগরিদমকে বিশ্লেষণ করাই অধিক কাজ। এই বিশ্লেষণধর্মী গুণাবলিই হল এলগরিদম কমপ্লেক্সসিটি।

একটি এলগরিদম M এর কমপ্লেক্সসিটি হল f ফাংশন $f(n)$ যা এলগরিদমে ইনপুট ডেটার আকার অনুযায়ী প্রয়োজনীয় চলার সময় এবং স্টোরেজ স্থান প্রদান করে। কমপ্লেক্সসিটি ফাংশন $f(n)$, যা এলগরিদমে চলার সময় প্রদান করে ধরা হয়, সচরাচর কেবল ইনপুট ডেটা n এর আকারের উপরই নির্ভর করে না, নির্দিষ্ট ডেটা ও বিবেচনা করা হয়।

নির্দিষ্ট আকৃতির সমস্যাবলি সমাধানে প্রয়োজনীয় সময় এর বিশেষণকে টাইম কমপ্লেক্সসিটি এলগরিদম (Time complexity algorithm) এবং প্রয়োজনীয় কম্পিউটার মেমোরি (Memory) এর বিশ্লেষণকে স্পেস কমপ্লেক্সসিটি এলগরিদম (Space complexity algorithm) বলা হয়।

নিচে তিনটি এলগরিদম দেখান হল ঃ

১। সর্বোচ্চ এলিমেন্ট নির্ধারণ ঃ

ALGORITHM–1 funding the Maximum Element in a Finite Sequence.
procedure max ($a_1, a_2 \ldots . a_n$: integers)
max : = a_1
for i : = 2 **to** n
if max < a_i **then** max : = a_i
{ max is the largest element)

এলগরিদম-১

২। লিনিয়ার সার্চ এলগরিদম ঃ

ALGORITHM–2 The Linear Search Algorithm
procedure linear search (x: integer, $a_1, a_2, \ldots . a_n$: distinct integers)
i : = 1
while ($i \leq n$ and $x \neq a_i$)
i : = i + 1
if $\leq$ n **then** location : = i
else location : = 0
{location is the subscript of them that equals x, or is 0 if x is not found}

এলগরিদম-২

৩। বাইনারি সার্চ এলগরিদম ঃ

ALGORITHM–3 The Binary Search Algorithm
procedure binary search (x: integer, $a_1, a_2, \ldots . a_n$: increasing integers)
i : = 1 { i is left endpoint of search interval}
j : n { j is right endpoint if search interval}
while i < j
begin
m : = [(i + j)/2]
if x> a_m **then** i : = m + 1
else j : = m
end
if x = a_i **then** location : = i
else location : = 0
{ location is the subscripot of term equal to x, or 0 if x is not found}

এলগরিদম-৩

৬০। **(g) দ্য-মরগানের সূত্র (De-Morgan's Rule) ঃ A, B যে কোন দুটি সেট এবং A′ ও B′ তাদের পূরক সেট হলে**
(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$, (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

প্রমাণ ঃ (i) মনে করি, $x \in (A \cup B)' \Rightarrow x \in A \cup B$,

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \in B$, $\Rightarrow x \in A'$ এবং $x \in B'$

অতএব, ছেদ সেটের সংজ্ঞানুযায়ী, $x \in A' \cap B'$

এখন, মনে করি, $x \in A' \cap B' \Rightarrow x \in A'$ এবং $x \in B'$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$

$\Rightarrow x \in (A \cup B)'$

$\therefore A' \cap B' \subset (A \cup B)'$

অতএব, $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(iii) মনে করি, $x \in (A \cap B)' \Rightarrow x \in A \cap B$

$\Rightarrow x \in A$ অথবা, $x \in B \Rightarrow x \in A'$ অথবা, $x \in B'$

$\Rightarrow x \in A' \cup B'$

$\therefore (A \cap B)' \subset A' \cup B'$

আবার মনে করি, $x \in A' \cup B'$

$\Rightarrow x \in A'$ অথবা, $x \in B'$

$\Rightarrow x \in A$ অথবা, $x \in B$

$\Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \in (A \cap B)'$

$\therefore A' \cup B' \subset A' \cup B'$

অতএব, $(A \cap B)' = A' \cup B'$

দুয়ের অধিক সেটের জন্যও দ্য মরগানের সূত্র সম্প্রসারিত করা যায়। যেমন, $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$; কেননা, $(A \cup B \cup C)' = ((A \cup B) \cup C)' = (A \cup B)' \cap C' = (A' \cap B') \cap C' = A' \cap B' \cap C'$। উপরের সূত্রসমূহ প্রয়োগ করে সেট সংক্রান্ত অভেদ সহজেই প্রমাণ করা যায়।

৬১। Union ও Intersection এর মধ্যে পার্থক্য নিম্নরূপ ঃ

Union	Intersection
১। একাধিক সেটের সকল উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে সেটের Union বলা হয়।	১। একাধিক সেটের কমন উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে সেটের Intersection বলে।
২। A ও B দুটি সেট হলে এদের Union $A \cup B$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।	২। A ও B দুটি সেট হলে এদের Intersection $A \cap B$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
৩। $A \cup B$ কে A Union B পড়া হয়।	৩। $A \cap B$ কে A Intersection B পড়া হয়।
৪। গাণীতিকভাবে লেখা হয়। $A \cup B = \{ x : x \in A$ অথবা $x \in B \}$	৪। গাণীতিকভাবে লেখা হয় $A \cap B = \{ x : x \in A$ এবং $x \in B \}$
৫। $A \cup B$ তে A ও B সেটের সকল উপাদান গ্রহণ করে।	৫। $A \cap B$ তে শুধুমাত্র কমন উপাদান গ্রহণ করা হয়।

৬২।

p	q	r	$p \wedge q$	$q \vee r$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	F	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	F	F	F
F	F	T	F	T	F	F	F
F	T	F	F	T	F	F	F
T	F	F	F	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

উপরের Truth table হতে দেখা যায় যে, $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ **(প্রমাণিত)**

৬৩। **এলগরিদম ঃ**

ধাপ ০১ ঃ কাজ শুরু

ধাপ ০২ ঃ সংখ্যা তিনটির মান গ্রহণ

ধাপ ০৩ ঃ প্রথম সংখ্যাটি কি দ্বিতীয় ও তৃতীয় সংখ্যার চেয়ে বড়?

(ক) হ্যা, ফলাফল ছাপাও, প্রথম সংখ্যাটি বড়।

(খ) না।

ধাপ ০৪ ঃ দ্বিতীয় সংখ্যাটি কি তৃতীয় সংখ্যার চেয়ে বড়?

(ক) হ্যা, ফলাফল ছাপাও দ্বিতীয় সংখ্যাটি বড়।

(খ) না।

ধাপ ০৫ ঃ ফলাফল ছাপাও তৃতীয় সংখ্যাটি বড়।

ধাপ ০৬ ঃ কাজ শেষ।

▶▶ সমস্যাবলি ঃ

১। প্রথমে দেখাতে হবে $A \times (A \cap C)$ হচ্ছে $(A \times B) \cap (A \times C)$ এর উপসেট।

মনে করি, $(x, y) \in A \times (B \cap C)$;

তবে $x \in A$ এবং $y \in B \cap C$; ছেদ সেটের সংজ্ঞানুযায়ী $y \in B$ এবং $y \in C$ যেহেতু $x \in A$ এবং $y \in B$; অতএব $(x, y) \in A \times B$; আবার যেহেতু $x \in A$ এবং $y \in C$, অতএব $(x, y) \in A \times C$; আমরা পাচ্ছি $(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$;

$\therefore A \times (B \cap C) \subset (A \times B) \cap (A \times C)$

এখন দেখাতে হবে যে, $(A \times B) \cap (A \times C) \subset A \times (B \cap C)$

মনে করি, $z, w) \in (A \times B) \cap (A \times C)$; তাহলে $(z, w) \in A \times B$ এবং $(z, w) \in A \times C$; অতএব $z \in A$ এবং $W \in B$ এবং $Z \in A$ এবং $W \in C$ যেহেতু $w \in B$ এবং $w \in C$ অতএব $w \in B \cap C$, আমরা পাই, $Z \in A$ এবং $w \in B \cap C$,

অতএব, $(z, w) \in A \times (B \cap C)$

$\therefore (A \times B) \cap (A \times C) \subset \times (B \cap C)$

দুটি সেটের সমান হওয়ার শর্ত থেকে পাই,

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ **(প্রমাণিত)**

২। $pv(q \wedge r)$ এর সত্য তালিকা তৈরি করি।

p	q	r	$p \vee q$	$q \wedge r$	$p \vee r$	$pv(q \wedge r)$	$(pvq) \wedge (pvr)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	T	T	T
T	F	T	T	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	F	T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	F	F	F	F

উপরের Truth table হতে দেখা যায় যে, শেষ দুই ঘরের মান একই। সুতরাং বিবৃতিদ্বয় লজিক্যালি সমান।

৩। দেওয়া আছে,

$A = \{a, b, c, d, e\}$

$B = \{a, b, d, f, g\}$

$C = \{d, e, f, h\}$

$\therefore B \cup C = \{a, b, d, e, f, g, h\}$

$\therefore A \cap (B \cup C) = \{a, b, d, e\}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান ঃ $\{a, b, d, e\}$

৪। এখানে দেয়া আছে,

$R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$

$\therefore R_1 \cap R_2 = \{(1, 1)\}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান ঃ $\{(1, 1)\}$

২১। (i) মনে করি, $x \in A \cap B ; \Rightarrow x \in A, x \in B$

অতএব, $A \cap B \subset A$

আবার, মনে করি, $x \in A \Rightarrow x \subset B$ [$\because A \subset B$]

$\therefore x \in A \cap B$

আমরা পাচ্ছি $x \in A$ হলে, $x \in A \cap B$

অতএব, $A \subset A \cap B$

$\therefore A \cap B = A$, যদি $A \subset B$ হয়।

(ii) মনে করি, $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ অথবা $x \in B$

বা, $x \in A$ এবং $x \in B$ [$\because A \subset B$]

$\therefore A \cup B \subset B$

আবার সংযোগ সেটের সংজ্ঞানুযায়ী $B \subset A \cup B$

$\therefore A \cup B = B$ যদি $A \subset B$ হয়।

(iii) মনে করি, $A \subset B$

তবে, $x \in A$ হলে $x \in B$

বা, $x \in A$ হলে $x \in B'$

অতএব, A এবং B' নিশ্ছেদ সেট এবং $B' \cap A = \phi$

এখন, $B' = B' \cap U$ [U সার্বিক সেট]

$= B' \cap (A \cup A')$

$= (B' \cap A) \cup (B' \cap A')$

$= \phi \cup (B' \cap A')$

$= B' \cap A'$

$\therefore B' \subset A'$ (প্রমাণিত)

(iv) $A \cup (B - A) = \{x | x \in A$ অথবা, $x \in (B - A)\}$

$= \{x | x \in A$ অথবা $x \in B\}$

কিন্তু শর্ত হচ্ছে $A \subset B$;

$\therefore x \in A$ হলে $x \in B$ হবে।]

$= \{x | x \in B\}$

$= B$

$\therefore A \cup (B - A) = B$

২২। $(B \cap C) \cup A = A \cup (B \cap C)$ [বিনিময় বিধি]

$= (A \cup B) \cap (A \cup C)$ [বন্টন বিধি]

$= (B \cup A) \cap (C \cup A)$ [বিনিময় বিধি]

২৩। (i) $A \cap (A' \cup B)$

বা, $(A \cap A') \cup (A \cap B)$ [বন্টন বিধি]

বা, $\phi \cup (A \cap B)$ [পূরক বিধি]

(ii) আমরা জানি, $A \cap U = A$

$A \cup (A \cap B) \Rightarrow (A \cap U) \cup (A \cap B)$ [A-এর মান স্থাপন]

বা, $A \cap (U \cup B)$ [বন্টন বিধি]

বা, $A \cap U$ [অভেদক বিধি]

বা, A

(iii) $A \cap (A \cup B)$

$\Rightarrow (A \cup \phi) \cap (A \cup B)$

$\Rightarrow A \cup (\phi \cap B)$ [বন্টন বিধি]

$\Rightarrow A \cup \phi$ [অভেদক বিধি]

$\Rightarrow A$ [অভেদক বিধি]

(iv) মনে করি, $x \in A' - B' \Rightarrow x \in A'$ এবং $x \notin B'$

$\Rightarrow x \notin A$ এবং $x \in B \Rightarrow x \in B$ এবং $x \notin A \Rightarrow x \in (B - A)$

$\therefore A' - B' \subset B - A$

এখন মনে করি, $x \in B - A \Rightarrow x \in B$ এবং $x \notin A$

$\Rightarrow x \notin B'$ এবং $x \in A'$

$\Rightarrow x \in A'$ এবং $x \notin B'$

$\Rightarrow x \in A' - B'$

$\therefore B - A \subset A' - B'$

অতএব, $A' - B' = B - A$

২৪। $B \cup C = \{2, 3\} \cup \{3, 4\} = \{2, 3, 4\}$

$B \cap C = \{2,3\} \cap \{3, 4\} = \{3\}$

$\therefore A \times (B \cup C) = \{a, b\} \times \{2, 3, 4\}$

$= \{(a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 2), (b, 3), (b, 4)\}$

$A \times B = \{a, b\} \times \{2, 3\} = \{(a, 2), (a, 3), (b, 2), (b, 3)\}$

$A \times C = \{a, b\} \times \{3, 4\} = \{(a, 3), (a, 4), (b, 3), (b, 4)\}$

$\therefore (A \times B) \cup (A \times C) = \{(a, 2), (a, 3), (b, 2), (b, 3), (a, 4), (b, 4)\}$

অতএব, $A \times (B \cup C) = \{a, b\} \times \{2, 3, 4\}$

$= \{(a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 2), (b, 3), (b, 4)$

এখন $A \times (B \cap C) = \{a, b\} \times \{3\} = \{(a, 3), (b, 3)\}$

$(A \times B) \cap (A \times C)$

$= \{(a, 2), (a, 3), (b, 2), (b, 3)\} \cap \{(a, 3), (a, 4), (b, 3), (b, 4)\}$

$= \{(a, 3), (b, 3)\}$

অতএব, $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

২৫। $\{(A \cup B) \cup (B \cup C) \cup (C \cup A)\}'$

$= \{(B \cup A) \cup (B \cup C) \cup (C \cup A)\}'$

$= \{(B \cup (A \cup C)\} \cup (C \cup A)\}'$

$= [\{B \cup (C \cup A)\} \cup (C \cup A)]'$

$= \{B \cup (C \cup A) \cup (C \cup A)\}'$

$= (B \cup C \cup A)'$

$= B' \cap C' \cap A'$ [দ্য মইভারের সূত্র প্রয়োগ করে]

২৬। $A \cup B \cup C$

$= \{1, 2, 3, 4\} \cup \{2, 4, 6, 8\} \cup \{3, 4, 5, 6, 9\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$

$\therefore n(A \cup B \cup C) = 8$

$A \cap B \cap C = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{2, 4, 6, 8\} \cap \{3, 4, 5, 6, 9\}$

$= \{4\}$

$\therefore n(A \cap B \cap C) = 1$

$n(A) = 4, n(B) = 4, n(C) = 5$

$\therefore n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$

$= 4 + 4 + 5 - 2 - 2 - 2 + 1$

$= 8$

$= n(A \cup B \cup C)$

২৭। $A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{2, 4, 6\}$

$A \times A$ $\{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (3, 7), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (5, 7), (7, 1), (7, 3), (7, 5), (7, 7)\}$

$\therefore$ (i) $n(A \times A) = 16$

$A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (5, 2), (5,4), (5, 6), (7, 2), (7, 4), (7, 6)\}$

$\therefore$ (ii) $n(A \times B) = 12$

$B \times A = \{2, 4, 6\} \times \{1, 3, 5, 7\}$

$= \{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (4, 7), (6, 1) (6, 3), (6, 5), (6, 7)\}$

$\therefore$ (iii) $n(B \times A) = 12$

$B \times B = \{2, 4, 6\} \times \{2, 4, 6\}$

$= \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$

$\therefore$ (iv) $n(B \times B) = 9$

২৮। $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$= 17 + 28 - 14$

$= 31$

২৯। ক্রমজোড়ের সংজ্ঞানুসারে পাই,

$x + y = 9$ ..... (i)

$x - y = 4$ ..... (ii)

(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$2x = 13$

$x = \frac{13}{2}$

(i) ও (ii) বিয়োগ করে পাই,

$2y = 5$

$y = \frac{5}{2}$

$\therefore (x, y) = \left(\frac{13}{2}, \frac{5}{2}\right)$ **Ans.**

৩০। $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

বা, $y = \sqrt{1 - x^2}$ এর ডোমেন $x = 1$ থেকে $x = -1$ এর অন্তর্গত প্রতিটি বাস্তব সংখ্যা অর্থাৎ $1 \geq x \geq 1$

$\therefore$ ডোমেন $= 1 \geq x \geq -1$

এখন,

$f(-3) = \sqrt{1 - (-3)^2} = \sqrt{-8}$ যা অবাস্তব

$f(0) = \sqrt{1 - 0} = 1$ যা বাস্তব

$f(1) = \sqrt{1 - 1} = 0$ যা বাস্তব

$f(2) = \sqrt{1 - (-2)^2} = \sqrt{-3}$ যা অবাস্তব

সুতরাং, $f(0)$ ও $f(1)$ এর মান নির্ণয় করা যায়।

৩১। দেওয়া আছে,

$A = \{ 1, 2 \}$

এবং $B = \{ a, b, c \}$

$\therefore A \times B = \{ 1, 2 \} \times \{ a, b, c \}$

$= \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$ **Ans.**

৩২। দেওয়া আছে,

$U = \{a, b, c, d, e, f, g \}$

$A = \{a, b, d \}$

$B = \{ b, e, f \}$

$C = \{ a, e, g \}$

এখন, $(A \cup C) = \{a, b, d \} \cup \{ a, e, g \}$

$= \{a, b, d, e, g \}$

$\therefore (A \cup C)' = U - (A \cup C)$

$= \{a, b, c, d, e, f, g \} - \{a, b, d, e, g \}$

$= \{ c, f \}$

আবার, $B \cup C = \{b, e, f \} \cup \{a, e, g \}$

$= \{a, b, e, g, f \}$

$\therefore (B \cup C)' = U - (B \cup C)'$

$= \{a, b, c, d, e, f, g \} - \{a, b, e, g, f \}$

$= \{ c, d, \}$

এবং $(A \cup B) = \{a, b, d\} \cup \{ b, e, f \}$

$= \{ a, b, d, e, f \}$

$\therefore (A \cup B)' = U - (A \cup B)$

$= \{ a, b, c, d, e, f, g \} - \{a, b, d, e, f \}$

$= \{ c, g \}$

$\therefore (A \cup C)' \cap (B \cup C)' \cup (A \cup B)'$

$= \{ c, f \} \cap \{c, d\} \cup \{c, g\}$

$= \{c\} \cup \{c, g\}$

$= \{c, g \}$ **Ans.**

৩৩। $(p \vee r) \wedge (q \wedge r)$ এর Truth table উপরিউক্ত তথ্যানুসারে তৈরি করি।

p	q	r	$p \vee r$	$q \wedge r$	$(p \vee r) \wedge (q \wedge r)$
T	F	T	T	F	F

সুতরাং Truth table অনুসারে যৌগিক Propasitionটি মিথ্যা।

৩৪। **এলগরিদম ঃ**

ধাপ ০১ ঃ কাজ শুরু

ধাপ ০২ ঃ N এর মান গ্রহণ

ধাপ ০৩ ঃ ধরি যোগফলের জন্য চলক S = O এবং 1, 4, 7 ..... N সংখ্যক নির্দিষ্টকরণের জন্য চলক I ব্যবহৃত হয়েছে।

ধাপ ০৪ ঃ যদি I > N হয়, তবে ৭ নং ধাপে গমন কর অন্যথায় ৫ নং ধাপে গমন কর।

ধাপ ০৫ ঃ S = I + S

ধাপ ০৬ ঃ I = I + 3

ধাপ ০৭ ঃ যোগফল ছাপাও

ধাপ ০৮ ঃ কাজ শেষ।

অধ্যায়-২

অন্বয়
(Relations)

২.০ অন্বয় (Relations) ঃ

পাঠক মাত্রই গাণিতিক এবং কম্পিউটার বিজ্ঞানের বিভিন্ন অন্বয়ের সাথে পরিচিত যেমন, তুলনামূলক কম (Less than), সমদূরবর্তী (is parallel to) একটি উপসেট (is a subset of) ইত্যাদি। উদাহরণঃ দুটি সেট A = {1, 2, 3, 4} এবং B = {1,3, 5} বিবেচনা করি। A সেটের যে যে উপাদান B সেটের যে যে উপাদানের চেয়ে ছোট তাদের নিয়ে একটি ক্রম জোড়ের সেট F গঠন করি। স্পষ্টতই, F = {(1, 3), (1, 5), (2, 3) (2, 5), (3, 5), (4, 5)}। অতএব F সেটের অন্তর্ভুক্ত ক্রম জোড়গুলোর প্রথম উপাদান A সেট থেকে এবং দ্বিতীয় উপাদান B সেট থেকে এমনভাবে নেয়া হয়েছে যেন প্রথম উপাদানটি দ্বিতীয় উপাদানের চেয়ে ছোট হয়। এরূপ ক্ষেত্রে বলা হয়, F সেটটি A সেট থেকে B সেটে একটি অন্বয় বা সম্পর্ক (Relation)।

সংকেতের সাহায্যে অন্বয়টি নিম্নরূপভাবে বর্ণনা করা যায়।

$F = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B$ এবং $x < y\}$।

এখানে উল্লেখ্য যে, F সেট $A \times B$ গুণফল সেটের একটি উপসেট অর্থাৎ $F \subset A \times B$

দ্বিতীয়ত, আবার A = {2, 3, 4, 5} এবং B = {3, 6, 7, 10} দুটি সেট বিবেচনা করি। A সেটের যে সমস্ত উপাদান দ্বারা B সেটের যে উপাদানগুলো বিভাজ্য তাদের ক্রমজোড়ের একটি সেট F গঠন করি।

স্পষ্টতই, F = {(2, 6), (2, 10), (3, 3), (3, 6), (5, 10)}

এখানে, F সেটটি A সেট থেকে B সেটে একটি অন্বয় এবং F অন্বয়টি নিম্নরূপভাবে প্রকাশ করা যায়।

$F = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B$ এবং x দ্বারা y বিভাজ্য$\}$;

স্পষ্টতই, এখানে, $F \subset A \times B$

ধরা যাক, R বাস্তব সংখ্যার সেট। R এর উপাদানগুলো নিয়ে এমনভাবে ক্রমজোড়ের একটি সেট F গঠন করি যেন প্রতিটি ক্রমজোড়ের উপাদান দ্বিতীয় উপাদানের চেয়ে বড় হয়। অর্থাৎ

$F = \{(x, y) \mid x \in R, y \in R$ এবং $x > y\}$

এখানে, F সেটটি বাস্তব সংখ্যা সেট R-এ বর্ণিত একটি অন্বয়।

উল্লেখ যে, $F \subset R \times R$

২.১ অন্বয় এর সংজ্ঞা (Definition of Relations) ঃ

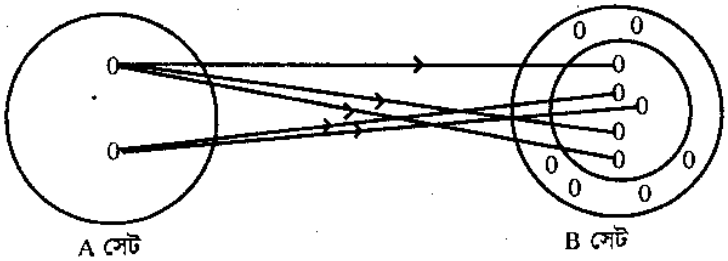
'A' এবং 'B' দুটো সেট হলে গুণজ সেট $A \times B$ এর কোন অশূন্য উপসেটকে A থেকে B- তে একটি অন্বয় (Relation) বলে।

লক্ষণীয় যে, A সেট থেকে B সেটে F একটি অন্বয় হলে

(i) A সেটের একই উপাদান F এর একাধিক ক্রমজোড়ে প্রথম উপাদান হতে পারে।

(ii) A সেটের কোন উপাদান F-এর ক্রমজোড়গুলোর কোনটিতে নাও থাকতে পারে।

(ক) ধরা যাক, A দ্বারা কম্পিউটার বিভাগের কয়েকজন শিক্ষার্থীর সেট এবং B দ্বারা উক্ত শিক্ষার্থীদের নিজস্ব পাঠ্যপুস্তকের সেট সূচিত করা হ'ল। ভেনচিত্রের সাহায্যে নিচে A ও B সেট দেখান হ'ল।



উপরের "তীর চিহ্ন" পর্যবেক্ষণ করে আমরা সহজেই বলতে পারি A সেটের প্রত্যেকটি উপাদানের সাথে B সেটের একাধিক উপাদান সংশ্লিষ্ট। কারণ, একজন শিক্ষার্থীর একাধিক পাঠ্যপুস্তক থাকতে পারে। এখানে আমরা বলি, A থেকে B সেটে a এর সাথে b অন্বিত (Related), যেখানে $a \in A$ এবং $b \in B$.

যদি এ অন্বয় (Relation) কে R দ্বারা সূচিত করা হয়, তবে লেখা হয়।

a R b.

উদাহরণ-২.১। মনে করি, R = {N, N, P(x, y)}, যেখানে N স্বাভাবিক সংখ্যার সেট এবং P(x, y) দ্বারা 'x < y' প্রকাশ করে। তাহলে R, একটি অন্বয়।

উদাহরণ-২.২। মনে করি, R_2 = {N, N, P(x, y)}, যেখানে N স্বাভাবিক সংখ্যার সেট এবং P(x, y) দ্বারা y এর সাথে x এর বিভাজ্যতা প্রকাশ করে।

তাহলে, 6 R_2 3, $15R_23$, $2R_23$

২.১.১ অন্বয়ের ডোমেন এবং রেঞ্জ (Domain and Range of Relation) ঃ

ধরা যাক, R একটি ক্রম জোড়ের উপসেট। এবার যদি A থেকে B এর যে রিলেশন R হয়, সে রিলেশনের ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদানকে ডোমেন বলা হবে। এর মানে, ডোমেন হল, A এর একটি উপসেট। অপরদিকে R সেটের প্রত্যেক ক্রমজোড়ের দ্বিতীয় উপাদানকে বলা হয় রেঞ্জ। এর মানে দাঁড়ায় রেঞ্জ (Range) হল B সেটের একটি উপসেট।

এখানে R কে একবার রিলেশন অর্থে ব্যবহার করা হয়েছে। আবার R কে ক্রম জোড়ের সেট হিসেবে ব্যবহার করা হয়েছে। R কে দু'ভাবে ব্যবহার করার অর্থ হল যে, পরবর্তীতে যদি আমরা রিলেশন R বলি, তবে এর দ্বারা R কে একটি উপসেট ধরে নিতে হবে। বিষয়টি আরো একটু ব্যাখ্যা করা হল-

ধরি, সেট A, B এবং রিলেশন R = {(1, 2), (1, 5), (2, 3), (4, 6)}

এখানে, $\{1, 2, 4\} \subset A$ অর্থাৎ, 1, 2, 4 এ উপাদানগুলো হলো ডোমেন এর অন্তর্ভুক্ত এবং $\{2, 3, 5, 6\} \subset B$, এখানে 2, 3, 5, 6 এ উপাদানগুলো হলো রেঞ্জ এর অন্তর্ভুক্ত।

উদাহরণ ২.১।

ধরি A = {1, 2, 3}, B = {x, y, z} এবং R = {(1, y), (1, z), (3, y)}। ডোমেন এবং রেঞ্জ বের কর।

সমাধান

দেয়া আছে, সেট A = {1, 2, 3} এবং

সেট B = {x, y, z}

অন্বয় R = {(1, y), (1, z), (3, y)}

যেহেতু R, $A \times B$ এর উপসেট।

অন্বয় এর আলোকে-

$1R_y$, $1R_z$, $3R_y$

সুতরাং R এর ডোমেন হলো {1, 3} এবং

রেঞ্জ হলো {y, z}

উদাহরণ-২.২। যদি A = {eggs, milk, corn} এবং B = {cows, goats, hens} হয় তবে A ও B এর মধ্যে অন্বয় নির্ণয় কর।

সমাধান

দেয়া আছে,

সেট, A = {eggs, milk, Corn}

এবং সেট B = {cows, goats, hens}

A এবং B এর মধ্যে অন্বয় $(a, b) \in R$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়, যদি a, b দ্বারা গঠিত হয়।

বিপরীতক্রমে

R = {(eggs, hens), (milk, cows), (milk, goats)}

এ অন্বয় অনুযায়ী

eggs R hens, milk R cows etc.

উদাহরণ-২.৩। যদি দুটি দেশের মধ্যে অন্তরে কিয়দাংশে অভিন্ন সীমান্ত থাকে তবে ইটালী সুজারল্যান্ড, কানাডা, মেক্সিকো এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ধারণ কর।

সমাধান

যেহেতু দুটি দেশ সন্নিহিত এবং এদের মধ্যে অন্তত কিয়দাংশে হলে ও অভিন্ন সীমান্ত বিরাজমান। তখন পৃথিবীর বুকে অন্বয় R হল A ও B এর মধ্যেকার অন্বয়,

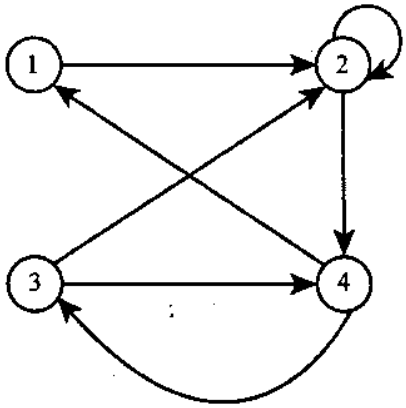
তখন, (Italy, Switzerland) $\in$ R.

কিন্তু (Canada, Maxico) $\notin$ R

২.১.২ Diagraph এ Relation কে কীভাবে উপস্থাপন করা হয়, [বাকাশিবো-২০০৩]

মনে করি, A একটি সসীম সেট। A সেট হতে A সেটে Relation R কে অন্য পদ্ধতিতে ছবির সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। প্রথমে আমরা সেটের উপাদানগুলোকে খাতায় লেখি, তারপর x এর প্রত্যেক উপাদান হতে y এর প্রত্যেক উপাদানে তীর চিহ্ন অংকন করতে হবে, যেখানে x, y তে অন্বিত। এই Diagram কে Relation এর Directed graph বলা হয়।

মনে করি, সেট A = {1, 2, 3, 4} এবং R = {(1, 2), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3)}



চিত্রে Relation টিকে দেখানো হয়েছে। এখানে লক্ষণীয় যে, একটি Arrow 2 হতে 2 তে দেখানো হয়েছে। যেহেতু R অন্বয় এ 2 is Related to 2.

২.১.৩ কার্তেসীয় গুণজ বা গুণন (Cartesian Product of set) ঃ

দুইটি সেটের সদস্য নিয়ে গঠিত সম্ভাব্য সকল ক্রম জোড়ের সেটকে উক্ত সেট দুইটির গুণফল সেট বা কার্তেসীয় গুণন সেট বলে।

ধরি A = {a : a $\in$ A} এবং B = {b : b $\in$ B} তাহলে A এবং B সেট দুইটির কার্তেসীয় গুণনকে A $\times$ B দ্বারা নির্দেশ করা হয় এবং নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়।

A $\times$ B = {(a, b) : a $\in$ A, b $\in$ B}

A $\times$ B কে A গুণন B বা A Cross B পড়া হয়।

উদাহরণ-২.৪ (ক)

A = {1, 2, 3}, B = {a, b} হলে A $\times$ B = {1, a}, {1, b}, (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)}

কার্তেসীয় গুণনে সেটের উপাদান সংখ্যা ঃ মনে করি, A এবং B দুটি সেট। এখন যদি n(A) = p এবং n(B) = q হয় তবে n (A $\times$ B) = pq.

উদাহরণ-২.৪ (খ) ঃ

মনে করি, A = {1, 2, 3}, B = {a, b} তাহলে n(A $\times$ B) = 3 $\times$ 2 = 6

অর্থাৎ A $\times$ B এর গুণন সেটে 6টি ক্রম জোড়ের উপাদান বিদ্যমান থাকবে।

২.২ অন্বয়ের বৈশিষ্ট্য (Properties of Relations) ঃ

ধরা যাক, সেট A এবং B। A থেকে B-এর অন্বয়ে বেশ কয়েকটি বৈশিষ্ট্য পাওয়া যায়। এ সকল বৈশিষ্ট্যের আলোকে রিলেশনকে নিম্নবর্ণিত 4টি ভাগে ভাগ করা হয়েছে।

(i) প্রতিফলিত বা রিফ্লেক্সিভ রিলেশন (Reflexive Relation) বা অন্বয়।

(ii) প্রতিসাম্য বা সিমেট্রিক রিলেশন (Symmetric Relation) বা অন্বয়।

(iii) অপ্রতিসাম্য বা এন্টিসিমেট্রিক রিলেশন (Anti-Symmetric Relation) বা অন্বয়।

(iv) ক্রমন্বয়ী বা ট্রানজিটিভ রিলেশন (Transitive Relation) বা অন্বয়।

উক্ত রিলেশনগুলোর বৈশিষ্ট্য নিম্নে সংক্ষেপে বর্ণনা করা হলা -

(i) প্রতিফলিত বা রিফ্লেক্সিভ রিলেশন বা অন্বয় (Reflexive Relation) ঃ

ধরি, $R \subset A \times A$ তাহলে A সেটে অন্বয় R কে প্রতিফলিত অন্বয় বলা হয়। যদি $a \in A \Rightarrow (a, a) \in R$

উদাহরণ-২.৫ ঃ

ধরি, $A = \{1, 2, 3\}$ A সেটের নিম্নের অন্বয়গুলির মধ্যে কোনগুলি প্রতিফলিত অন্বয়।

$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$

$R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3)\}$

$R_3 = \{(1, 1), (2, 3), (1, 3)\}$

$R_4 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

উপরিউক্ত অন্বয়গুলোর মধ্যে কেবল R_2 এবং R_4 হলো প্রতিফলিত অন্বয় কারণ উভয় অন্বয়ের মধ্যে ক্রমজোড় (a, a) বিশিষ্ট উপাদান আছে। কিন্তু অন্যান্য অন্বয়ে সবগুলো ক্রমজোড়ের উপস্থিতি নেই।

(ii) প্রতিসাম্য বা সিমেট্রিক রিলেশন বা অন্বয় ঃ

যদি $R \in A \times A$ তাহলে A সেটে অন্বয় R কে প্রতিসাম্য অন্বয় বলা হবে যদি $(a, b) \in R \Leftrightarrow (b, a) \in R$ অন্যভাবে A সেটে অন্বয় R প্রতিসাম্য হবে যদি এবং কেবল মাত্র $R^{-1} = R$ হয়।

উদাহরণ-২.৬ ঃ

ধরি, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ A সেটে নিচের অন্বয়গুলোর মধ্যে কোণগুলো প্রতিসাম্য বা সিমেট্রিক রিলেশন।

$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 4)\}$

$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3) (4, 4)\}$

$R_3 = \{(1, 3), (2, 1)\}$

$R_4 = \rightarrow$

$R_5 = A \times A$

এখানে R_1 প্রতিসাম্য নয় কারণ $(1, 2) \in R_1$ কিন্তু $(2, 1) \notin R_1$

R_3 প্রতিসাম্য নয়, কারণ $(1, 3) \in R_3$ কিন্তু $(3, 1) \notin R_3$

R_2 প্রতিসাম্য কারণ $(1, 2) \in R_2, (2, 1) \in R_2$

R_5 প্রতিসাম্য।

(iii) অপ্রতিসাম্য বা এন্টিসিমেট্রিক রিলেশন (Anti-Symmetric Relation) ঃ

ধরি $R \in A \times A$ তাহলে A সেটে অন্বয় R কে অপ্রতিসাম্য অন্বয় বলা হবে যদি $(a, b) \in R$ এবং $(b, a) \in R \Rightarrow a = b$

উদাহরণ-২.৭ ঃ $A = \{3, 5, 9\}$ A সেটে নিম্নের প্রত্যেকটি অন্বয় (Relation) অপ্রতিসাম্য অন্বয়।

$R_1 = \{(3, 5)\}$

$R_2 = \{(3, 3), (5, 5), (9, 9)\}$

$R_3 = \{(3, 5), (5, 3), (5, 5)\}$

উদাহরণস্বরূপ অন্বয় $R = \{(1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$ অন্বয়টি প্রতিসাম্য বা অপ্রতিসাম্য অন্বয় নয়।

পক্ষান্তরে $R' = \{(1, 1), (2, 2)\}$ অন্বয়টি প্রতিসাম্য এবং অপ্রতিসাম্য।

(iv) ক্রমবয়ী বা ট্রানজিটিভ রিলেশন (Transitive Relation) বা অন্বয় ঃ

ধরি, $R \subset A \times A$ তাহলে A সেটে অন্বয় R কে ক্রমবয়ী অন্বয় বলা হবে যদি $(a, b) \in R$ এবং $(b, c) \in R$ তখন $(a, c) \in R$

উদাহরণ-২.৮ ঃ

ধরি, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ A সেটে নিম্নের অন্বয়গুলোর মধ্যে কোণগুলো ক্রমবয়ী অন্বয়।

$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 4)\}$

$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

$R_3 = \{(1, 3), (2, 1)\}$

$R_4 = \rightarrow$

$R_5 = A \times A$

এখানে R_3 অন্বয়টি ক্রমবয়ী বা ট্রানজিটিভ রিলেশন নয় বাকি সবগুলো অন্বয় ক্রমান্বয়ী অন্বয় কারণ

$(2, 1), (1, 3) \in R_3$ কিন্তু $(2, 3) \notin R_3$

২.৩ অন্বয়ের প্রকারভেদ (Kinds of Relations) ঃ

অন্বয়কে তিনভাগে ভাগ করা যায়। যথা–

১। সমতাপূর্ণ অন্বয় (Equivalence Relations); ২। ক্রম অন্বয় (Ordered Relations); ৩। ফাংশন (Function)।

১। সমতাপূর্ণ অন্বয় (Equivalence Relations) ঃ একটি অশূন্য সেট S-এ অন্বয় R যখন রিফ্লেক্সিভ (Reflexive), সিমেট্রিক (Symmetric) এবং ট্রান্সজিটিভ (Transitive) হয়, তখন উক্ত অন্বয়কে সমতাপূর্ণ অন্বয় (Equivalence Relations) বলা হয়।

অর্থাৎ R সমতাপূর্ণ অন্বয় হবে যখন নিচের তিন বৈশিষ্ট্য থাকবে–

(i) প্রতি $a \in s$ এর জন্য, $a \, R \, a$.

(ii) যদি $a \, R \, b$ তখন $b \, R \, a$.

(iii) যদি $a \, R \, b$ এবং $b \, R \, c$, তখন $a \, R \, c$.

সাধারণত অন্বয় '=' কে কোন সেট s হলো সমতাপূর্ণ অন্বয়। অর্থাৎ

(i) $a = a$ প্রতি $a \in s$ এর জন্য

(ii) যদি $a = b$, তখন $b = a$.

(iii) যদি $a = b$ এবং $b = c$, তখন $a = c$

২। ক্রম অন্বয় (Order Relations) ঃ

ধরা যাক, R হল সেট, S হল একটি অন্বয় যা নিচের তিনটি ধর্মকে মেনে চলে–

(i) (রিফ্লেক্সিভ) যে কোন $a \in s$ এর জন্য আমরা পাই, $a \, R \, a$.

(ii) (অসমতাপূর্ণ) যদি $a \, R \, b$ এবং $b \, R \, a$, তখন $a = b$

(iii) (ট্রান্সজিটিভ) যদি $a \, R \, b$ এবং $b \, R \, c$ তখন $a \, R \, c$.

এরূপ অন্বয় R কে, খন্ডিতক্রম (Pavtial order) যা শুধু ক্রম (order) বলা হয় এবং R কে সেট s এ খন্ডিত ক্রম অন্বয় (Partial Ordering Relation) বা কেবল ক্রম অন্বয় (Ordering Relations) বলা হয়।

ক্রম অন্বয়কে সচরাচর $\leq$ এবং $a \leq b$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। একে পড়া হয় "a অগ্রবর্তী, পূর্ববর্তী b" ("a precedes b")

এরূপ ক্ষেত্রে আমরা লিখে থাকি।

$a < b$ অর্থ $a \leq b$ এবং $a \neq b$; পড়া হয়, 'a strictly precedes b"

$b \geq a$ অর্থ $a \leq b$; পড়া হয়, 'b succeeds a"

$b > a$ অর্থ $a < b$; পড়া হয় "b strictly succeeds a")

যখন কোন অনুমিততা না থাকে তখন $\leq$, $<$, $>$ এবং $\geq$ এর পরিবর্তে সরাসরি $\leq$, $<$, $>$ এবং $\geq$ প্রতীক ব্যবহার করতে হবে।

৩। **ফাংশন (Function) ঃ** মনে করি, A এবং B যে কোন দুটি সেট। A থেকে B সেটে ফাংশন f হচ্ছে $A \times B$-এর এমন একটি উপসেট যেন (i) প্রতিটি $a \in A$-এর জন্য একটি উপাদান $b \in B$ থাকে যেখানে $(a, b) \in f$ হয় এবং (ii) যদি $(a, b) \in f$ হয় এবং $(a, b') \in f$ হয় তবে অবশ্যই $b = b'$ হবে।

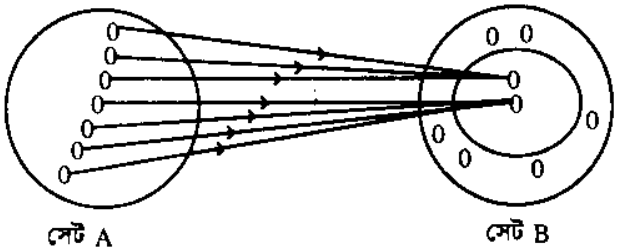
শর্ত (i) থেকে পাই প্রতিটি $a \in A$ ফাংশন f এর ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদান হবে এবং শর্ত (ii) থেকে পাই প্রতিটি $a \in A$ ফাংশন f-এর একটি এবং কেবলমাত্র একটি ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদান হবে। অতএব, দেখা যাচ্ছে, A থেকে B সেটে ফাংশন f হচ্ছে $A \times B$-এর ক্রমজোড়গুলোর একটি উপসেট যেখানে A সেটের প্রতিটি উপাদান ফাংশনে অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর কেবলমাত্র একটি ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদান হয়। সুতরাং বলা যায়, ফাংশন প্রকৃতপক্ষে একটি বিশেষ প্রকারের অন্বয়।

ফাংশনের সংকেতরূপে সাধারণত $f, g, F \Psi$ প্রভৃতি অক্ষর ব্যবহার করা হয়।

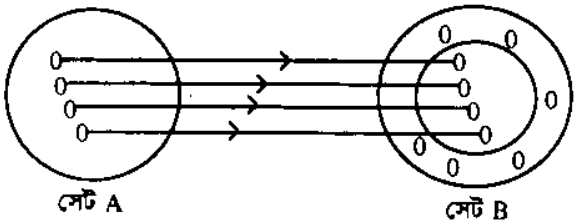
A সেট থেকে B সেটে f একটি ফাংশন হলে আমরা লিখি $f : A \to B$ এবং এটাকে পড়া হয় "f হচ্ছে A সেট থেকে B সেটে একটি ফাংশন।" যদি $(a, b) \in f$ হয়; তবে b কে f-এর অধীনে a-এর প্রতিচ্ছবি (image) বলা হয় এবং আমরা লিখি $b = f(a)$.

(ক) মনে করি, A দ্বারা শিক্ষার্থীদের এবং B দ্বারা কলেজের ছাত্রাবাসগুলোর সেট নিচে ভেনচিত্র ও তীরচিহ্ন দ্বারা সূচিত করা হল।

a R b দেখানো হল। একটি ছাত্রাবাসে একাধিক শিক্ষার্থী বাস করতে পারে। সুতরাং A সেটের একাধিক উপাদান B সেটের যে কোন অনন্য (Unique) উপাদানের সাথে সংশ্লিষ্ট।



(খ) মনে করি, A দ্বারা শিক্ষার্থীদের এবং B দ্বারা তাদের রোল নম্বরের সেট সূচিত করা হল। ভেনচিত্র ও তীরচিহ্ন দ্বারা নিচে a Rb দেখানো হল। একজন শিক্ষার্থীর কেবল একটি রোল নম্বর থাকতে পারে। সুতরাং A সেটের প্রত্যেকটি উপাদানের সাথে B সেটের যে কোন অনন্য উপাদান সংশ্লিষ্ট রয়েছে।



উপরোল্লিখিত অনুচ্ছেদে (ক) ও (খ) থেকে দেখা যাচ্ছে A সেটের প্রত্যেকটি উপাদানের সাথে B সেটের যে কোন অনন্য উপাদানকে সংশ্লিষ্ট করা যেতে পারে। এ ধরনের অন্বয়কে (Relation) বলা হয় A সেট থেকে B সেটে একটি ফাংশন (Function of A into B). এ ফাংশনকে সাধারণত f দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং লেখা হয় ঃ

$f : A \to B$.

মন্তব্য ঃ $f : A \to B$ কে সাধারণভাবে বলা হয় A সেট থেকে B সেটে চিত্রণ (Mapping of A into B).

সংজ্ঞা ঃ একটি অন্বয় (Relation) যদি এরূপ হয় যে A সেটের উপাদান B সেটের অনন্য (Unique) উপাদানের সাথে সংশ্লিষ্ট (Associated) থাকে, তাহলে ঐ অন্বয়কে A সেট থেকে B সেটে একটি ফাংশন বলা হয়।

মন্তব্য ঃ ফাংশনের সংজ্ঞা ক্রমজোড়ের সাহায্যেও দেয়া যায়। যদি কোন অন্বয়ে একই প্রথম উপাদান বিশিষ্ট দুইটি ভিন্ন ক্রমজোড় না থাকে, তবে ঐ অন্বয়কে ফাংশন বলা হয়।

সংজ্ঞা ঃ যদি $(a, b) \in f : A \to B$ হয়, তবে b- কে f এর অধীনে a এর প্রতিচ্ছবি (image) বলা হয় এবং $b = f(a)$ লেখা হয়।

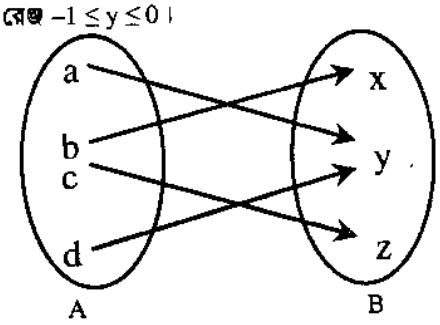
ফাংশন, ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জের উদাহরণ ঃ (i) মনে করি, f একটি ফাংশন এবং এটি প্রতিটি বাস্তব সংখ্যাকে এর বর্গের সাথে অন্বিত করে। অর্থাৎ x যদি একটি বাস্তব সংখ্যা হয়, তবে $f(x) = x^2$। স্পষ্টতই, ফাংশন f-এর ডোমেন হচ্ছে সমস্ত বাস্তব সংখ্যার সেট কিন্তু রেঞ্জ হচ্ছে কেবলমাত্র ধনাত্মক সংখ্যার সেই উদাহরণস্বরূপ বলা যায়, $f(-3) = 9$, $f(2) = 4$, $f(3) = 9$, $f(-2) =$ । আমরা বলতে পারি, (–3, 9), (3, 9), (2, 4), (–2, 4) ... ... প্রভৃতি ক্রমজোড়গুলো একটি ফাংশন এবং এ ফাংশনটি সংকেতে লিখতে পারি $f : R \to R$, $f(x) = x^2$

উল্লেখ্য যে, $f \subset R \times R$.

(ii) মনে করি, $x^2 + y^2 = 1$ একটি বৃত্তের সমীকরণ। এখানে, $y^2 = 1 - x^2$ বা, $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$

অর্থাৎ, $y = \sqrt{1 - x^2}$ এবং $y = -\sqrt{1 - x^2}$

যদি (x, y) ক্রমজোড়টি x-অক্ষের উপরিস্থিত অর্ধবৃত্তের যে কোন একটি বিন্দু হয়, তবে $y \geq 0$ এর জন্যে $y = \sqrt{1 - x^2}$ বা, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$। x-অক্ষের নিচের অর্ধবৃত্তের জন্য $y = -\sqrt{1 - x^2}$ বা, $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$। দুটি ক্ষেত্রেই f দুটি পৃথক ফাংশন সংজ্ঞায়িত করে। ফাংশন দুটি যথাক্রমে $f : R \to R$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ এবং $f : R \to R$, $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$। $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ এর ডোমেন $x = 1$ থেকে $x = -1$ এর অন্তর্গত প্রতিটি বাস্তব সংখ্যা অর্থাৎ, $-1 \leq x \leq 1$ কিন্তু এর রেঞ্জ $0 \leq y \leq 1$। $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ ফাংশনটির ডোমেন একই কিন্তু রেঞ্জ $-1 \leq y \leq 0$।



(iii) $f : R \to R$, $f(x) = \frac{1}{x}$ ফাংশনে $x = 0$ ব্যতীত, x-এর প্রতিটি বাস্তব মানের জন্য আমরা $f(x)$ এর একটি মান পাই।

(iv) মনে করি, $A = \{a, b, c, d\}$ এবং $B = (x, y, z)$ এবং চিত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : A \to B$.

এখানে f এর ডোমেন $A = \{a, b, c, d\}$ এবং রেঞ্জ $\{x, y, z\}$ $f(a) = y$, $f(b) = x$, $f(c) = z$ এবং $f(d) = y$

সুতরাং (a, y), (b, x), (c, z), (d, y) ক্রমজোড়গুলো f-এর সদস্য।

বিবিধ সমস্যা ও সমাধান ঃ

উদাহরণ-২.১০। ($A = \{5, 6, 7, 8\}$ এবং $B \{1, 2, 3, 4, 5\}$ হলে, $A \cup B$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ A এর সব উপাদানের সাথে B এর সব উপাদান নিয়ে যে সেট গঠিত হয় তা $A \cup B$.

$\therefore A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$

উদাহরণ-২.১১। $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{4, 7, 8\}$ হলে, $(A \cap B) \cap C$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ A এবং B সেটের ছেদ হল একটি সেট যাতে A এবং B এর সাধারণ উপাদানগুলো অন্তর্ভুক্ত থাকে।

$\therefore A \cap B = \{3, 4\}$, এখন $A \cap B$ এবং C-এর ছেদ হল $(A \cap B) \cap C$, $\therefore (A \cap B) \cap C = \{4\}$

উদাহরণ-২.১২। প্রমাণ কর ঃ

(ক) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

(খ) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

সমাধান ঃ (ক) সংজ্ঞানুযায়ী,

$A \cup (B \cap C) = \{x : x \in A$ অথবা $x (\in B$N$C)\}$

$= \{x : x \in A$ অথবা $(x \in B, x \in C)\}$

$= \{x : (x \in A$ অথবা $x \in B), (x \in A$ অথবা, $x \in C)\}$

$= \{x : x \in (A \cup B), x \in (A \cup C)\} = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. **(প্রমাণিত)**

(খ) সংজ্ঞানুযায়ী,

$A \cap (B \cup C) = \{x : x \in A.\ x \in (B \cup C)\}$

$= \{x : x \in A.\ (x \in B \text{ অথবা } x \in C)\}$

$= \{x : (x \in A,\ x \in B) \text{ অথবা } (x \in A.\ x \in C)\}$

$= \{x : x \in (A \cap B) \text{ অথবা } x \in (A \cap C)\} = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ **(প্রমাণিত)**

মন্তব্য ঃ উপরের প্রমাণ থেকে দেখা যায় যে, সেটের সংযোগ ও সেটের ছেদ প্রক্রিয়া দুইটির প্রত্যেকটি অপরটির উপর বন্টন নিয়ম (Distributive law) মানে।

উদাহরণ-২.১৩। ফাংশন f কে $f(x) = x^2$, যেখানে $-2 \le x \le 8$, দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হল। $f(2)$, $f(y-3)$ এবং $f(-5)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ $f(2) = (2)^2 = 4$

$f(y-5) = (y-5)^2 = y^2 - 10y + 25$ কিন্তু এ সূত্রটি সত্য হবে যদি $-2 \le y - 5 \le 8$, অর্থাৎ $3 \le y \le 13$.

$f(-5)$ এর মান সংজ্ঞায়িত নয়, কারণ -5 ফাংশনের ডোমেনের অন্তর্ভুক্ত নয়।

উদাহরণ-২.১৪। R বাস্তব সংখ্যার এবং $f : R \to R$ কে $f(x) = x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হল। f-এর রেঞ্জ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ প্রত্যেকটি বাস্তব সংখ্যা a এর একটি ঘনমূল $\sqrt[3]{a}$ আছে, যা একটি বাস্তব সংখ্যা।

$\therefore f(\sqrt[3]{a}) = (\sqrt[3]{a})^3 = a$

অর্থাৎ প্রত্যেকটি বাস্তব সংখ্যা (বাস্তব সংখ্যার সেটের একটি উপাদান) থেকে যে প্রতিচ্ছবি পাওয়া যায় তাও বাস্তব সংখ্যা।

সুতরাং f এর রেঞ্জ হল বাস্তব সংখ্যার সেট।

উদাহরণ-২.১৫। $f(x) = x^2$ যেখানে $-2 \le x \le 8$

(i) $f(2)$, (ii) $f(-3)$, (iii) $f(4)$, (iv) $f(t-3)$ নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ (i) $f(2) = 2^2 = 4$

(ii) $f(-3)$ কোন মান নির্ধারণ করা যাবে না কেননা -3 প্রদত্ত ডোমেনের অন্তর্ভুক্ত নয়।

(iii) $f(4) = 4^2 = 16$

(iv) $f(t-3) = (t-3)^2 = t^2 - 6t + 9$, এ মানটি বৈধ হবে যদি, $-2 \le t - 3 \le 8$, বা $-2 + 3 \le t \le 8 + 3$, বা, $1 \le t \le 11$ হয়।

উদাহরণ-২.১৬। $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, x > 3 \\ x^2 - 2, -2 \le x \le 3 \\ 2x + 3, x < -2 \end{cases}$ **হলে, $f(2)$, $f(4)$, $f(-1)$ এবং $f(-3)$ নির্ণয় কর।**

সমাধান ঃ $f(2) = (2)^2 - 2 = 2$ $\quad \because -2 \le x \le 3$

$f(4) = 3.4 - 1 = 11$ $\quad \because x > 3$

$f(-1) = 1^2 - 2 = -1$, $\quad \because -2 \le x \le 3$

$f(-3) = 2(-3) + 3 = -3$, $\quad \because x < -2$

উদাহরণ-২.১৭। নিচের ফাংশনগুলোর ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(i) $f(x) = \sqrt{x+4}$ (ii) $f(x) = 1/(x-2)$ (iii) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

(iv) $f(x) = 2\cos x$

সমাধান ঃ (i) f-এর ডোমেন, $x \ge -4$ এবং f-এর রেঞ্জ, $f(x) \ge 0$

(ii) f-এর ডোমেন x-এর সমস্ত বাস্তব মান, $x \ne 2$.

f-এর রেঞ্জ $f(x)$- এর সমস্ত বাস্তব মান; শূন্য ছাড়া

(iii) f-এর ডোমেন $-2 \le x \le 2$; f-এর রেঞ্জ, $0 \le f(x) \le 4$.

(iv) f-এর ডোমেন x-এর সমস্ত বাস্তব মান;

f-এর রেঞ্জ, $-2 \le f(x) \le 2$

উচ্চতর গণিত প্রথম পত্র—১১

উদাহরণ-২.১৮। $A = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ এবং $f(x) = x + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f : A \to B$. f-এর ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। ফাংশনটি কি সার্বিক?

সমাধান $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4 = 5$

অতএব, ফাংশনটির ডোমেন $= \{1, 2, 3, 4\} = A$

ফাংশনটির রেঞ্জ $= \{2, 3, 4, 5\}$

যেহেতু, $f(A) \neq B$. সুতরাং ফাংশনটি সার্বিক ফাংশন নয়।

২.৪ বিপরীত অন্বয় (Inverse Relation) ঃ

F যদি A সেট থেকে B সেটে কোন অন্বয় হয় তবে F-এর বিপরীত অন্বয় হচ্ছে B সেট থেকে A সেটে একটি অন্বয় যা, F^{-1} দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অতএব $F^{-1} = \{(b, a) | (a, b) \in F\}$। দেখা যাচ্ছে, F অন্বয়ের অন্তর্ভূত ক্রমজোড়গুলোতে প্রথম ও দ্বিতীয় উপাদান পরস্পর স্থান পরিবর্তন করলে বিপরীত অন্বয় F^{-1} পাওয়া যায়।

ধরা যাক, $A = \{1, 2, 3\}$ এবং $B = \{a, b\}$ দুটি সেট। A সেট থেকে B সেটে একটি অন্বয় $F = \{(1, a); (1, b), (3, a)\}$। F-এর বিপরীত অন্বয় হবে, $F^{-1} = \{(a, 1), (b, 1), (a, 3)\}$। উল্লেখ্য যে, F অন্বয়ের ডোমেন এবং রেঞ্জ যথাক্রমে F^{-1} অন্বয়ের রেঞ্জ এবং ডোমেন।

২.৫ সসীম সেটের রিলেশন উপস্থাপন (Representation of Relation of finite sets) ঃ

ধরা যাক, A এবং B দু'টি সসীম (Finite) সেট। এ দু'টি সসীম সেট থেকে দু'ভাবে রিলেশন R চিত্রের সাহায্যে উপস্থাপন করা যায়। ধরা যাক, সেট $A = \{1, 2, 3\}$ এবং সেট $B = \{x, y, z\}$। এ দুটি সেট থেকে একটি নির্দিষ্ট রিলেশন $R = \{(1, x), (2, y), (3, z)\}$। দু'টি প্রক্রিয়ায় চিত্রের সাহায্যে উপস্থাপন করা হল।

প্রথম প্রক্রিয়া (আয়তকার Array পদ্ধতি) ঃ নিম্নের চিত্রটি মনোযোগ সহকারে লক্ষ কর ঃ

		B		
		x	y	z
	1	1	0	0
A	2	0	1	0
	3	0	0	1

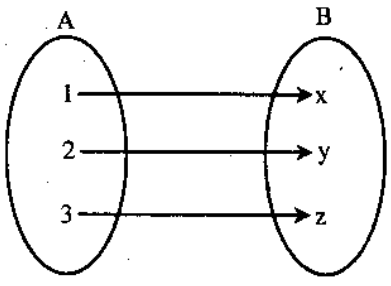
এ চিত্রটি হলো 3টি এ্যারের সাহায্যে তৈরি করা। A সেটের প্রথম উপাদান 1 এর জন্য একটি এ্যারে, 2 এর জন্য একটি এ্যারে এবং 3 এর জন্য একটি এ্যারে। যেহেতু রিলেশন R এর ক্রমজোড় তিনটির মধ্যে কেবল মাত্র একটি ক্রমজোড়ের ডোমেন 1। সে ক্রমজোড় হলো (1, x)। অতএব প্রথম এ্যারেতে x বরাবর একটি 1 হবে। অন্য দু'টি স্থানে 0 বসবে। এভাবে 1, 2, 3 এর সাথে x, y, z এর অন্বয় (রিলেশন) দেখানো হলো। যেক্ষেত্রে অন্বয় হয়েছে সেক্ষেত্রে 1 রয়েছে, আর যে ক্ষেত্রে অন্বয় হয়নি সেক্ষেত্রে 0 বসেছে। চিত্র থেকে সহজেই আমরা নিম্নবর্ণিত অন্বয় বের করে আনতে পারি।

$R = \{(1, x), (2, y), (3, z)\}$

উপরে বর্ণিত এ্যারের সংবলিত রূপকে ম্যাট্রিক্স বলে। একটি ম্যাট্রিক্সের এ্যারেকে রো বলে এবং উপর থেকে নীচ পর্যন্ত সংখ্যাগুচ্ছকে কলাম বলে। একটি ম্যাট্রিক্সের রো এবং কলাম একই হবে এমন কোন ধরা বাঁধা নিয়ম নেই।

দ্বিতীয় প্রক্রিয়া (Arrow diagram পদ্ধতি) ঃ

এবার নিম্নের চিত্রটি মনোযোগ সহকারে লক্ষ করি ঃ



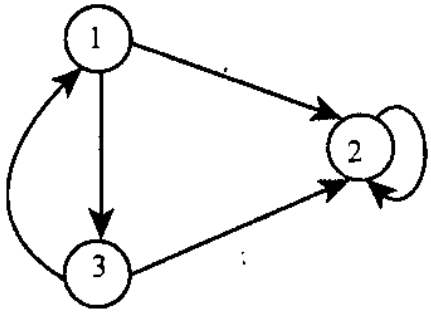
সামান্য দূরত্বে চাকতির মতো দু'টি বস্তু আঁকা হয়েছে। প্রথম চাকতি হলো সেট A এবং দ্বিতীয় চাকতিটি হলো সেট B। প্রথম চাকতির মধ্যে A সেটের উপাদান 1, 2, 3 লেখা হয়েছে। দ্বিতীয় চাকতির মধ্যে B সেটের উপাদান x, y, z লেখা হয়েছে। A সেটের যেসব উপাদান, B সেটের যে সব উপাদানের সাথে অন্বয় স্থাপন করে তাকে তীর চিহ্ন ⟶ দ্বারা যুক্ত করে দেয়া হলো। উক্ত চিত্র থেকে সহজেই রিলেশন R = {(1, x), (2, y), (3, z)} বের করা যায়। উপরে বর্ণিত চিত্রকে এ্যারো ডায়াগ্রাম বলে অভিহিত করা যায়।

সেটে সরাসরি রিলেশনের চিত্র (Directed graphs of relation on sets) ঃ

পূর্বে বর্ণিত দু'টি পদ্ধতি ছাড়া আরো একটি পদ্ধতিতে রিলেশন R কে প্রকাশ করা যায়। যখন একটি নির্দিষ্ট সসীম সেট, সে একই সেটের সাথে অন্বয় স্থাপন করে; তখন এ প্রক্রিয়ায় চিত্রে উপস্থাপন করতে হয়।

মনে করি, একটি সেট A = {1, 2, 3}। A^2 সেটের একটি অন্বয় সেট হচ্ছে।

R = {(1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 2)}।



উপরের চিত্রে লক্ষ করা যায় যে, A সেটের 3টি উপাদান 1, 2 এবং 3 তিনটি স্থানে লেখা হয়েছে। এরপর রিলেশন R এর ক্রমজোড় অনুসরণ করে তীর চিহ্ন আঁকা হয়েছে। চিত্রটি ভালোভাবে লক্ষ করে বোঝার চেস্টা করি। এ চিত্রকে ডায়রেক্টেড ডায়াগ্রাম (Directed diagram) বলে।

উপরের চিত্র থেকে খুব সহজেই রিলেশন R = {(1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 2)} খুঁজে বের করা যায়।

উদাহরণ-২.১৯।

ধরা যাক, A = {1, 2, 3}

এবং B = {x, y, z}

অন্বয় R = {(1, y), (1, z), (3, y)}

এ্যারো ডায়াগ্রাম অংকন কর।

সমাধান

এখানে দেয়া আছে,

A = {1, 2, 3}

B = {x, y, z} এবং

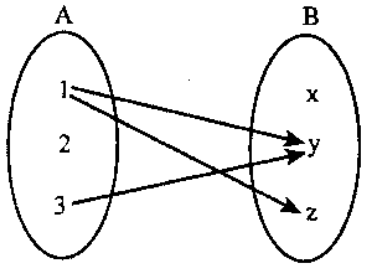
অন্বয় R = {(1, y), (1, z), (3, y)}

অতএব, অন্বয়ের সসীম সেটের নিয়ম অনুযায়ী নিম্নে চিহ্নিত হলো ঃ

প্রথম প্রক্রিয়া ঃ

		B		
		x	y	z
	1	0	1	1
A	2	0	0	0
	3	0	1	0

দ্বিতীয় প্রক্রিয়া ঃ



চিত্র ঃ

২.৬ অন্বয়ের যোজন বা কম্পোজিশন (Composition of Relations) ঃ

ধরি, A, B এবং C 3টি সেট। আরো ধরা যাক, R হচ্ছে A থেকে B এর অন্বয় (রিলেশন) এবং S হচ্ছে B থেকে C এর অন্বয় (Relation)। রিলেশন R এবং রিলেশন S একত্রিত হয়ে A থেকে C এর অন্বয় স্থাপন করে। R এবং S রিলেশন এর সমন্বয়ের জন্য RoS দ্বারা চিহ্নিত করা যায়। অন্বয়কে এরূপ সমন্বয় করাকে যোজন বা কম্পোজিশন বলে। সমন্বিত রিলেশন RoS কে কম্পোজিট অন্বয় বলে। এ অন্বয়কে নিম্নরূপভাবে বর্ণনা করা যায়।

$RoS = \{(a, c) : a \in A, b \in B, c \in C, (a, b) \in R \text{ এবং } (b, c) \in S\}$

উদাহরণ-২.২০ ।

ধরা যাক, সেট $A = \{1, 2, 3, 4\}$, সেট $B = \{a, b, c, d\}$ এবং সেট $C = \{x, y, z\}$.

আরো ধরা যাক, রিলেশন $R = \{(1, a), (2, a), (2, d), (3, c), (4, d)\}$ এবং রিলেশন $S = \{(b, x), (b, z), (c, y), (d, z)\}$ এবার R এবং S এর অন্বয় চিত্রের সাহায্যে নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ

দেয়া আছে,

সেট $A = \{1, 2, 3, 4\}$

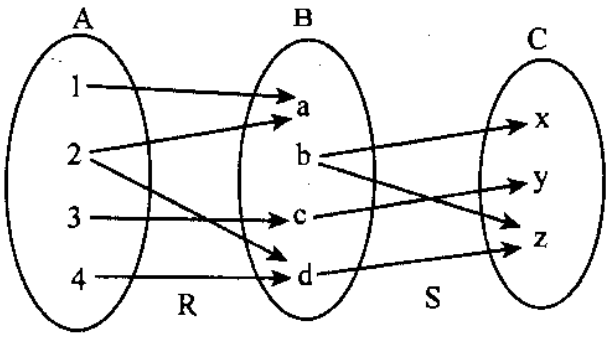
সেট $B = \{a, b, c, d\}$

সেট $C = \{x, y, z\}$

রিলেশন $R = \{(1, a), (2, a), (2, d), (3, c), (4, d)\}$ এবং

রিলেশন $S = \{(b, x), (b, z), (c, y), (d, z)\}$

এবার R এবং S এর অন্বয় নিম্নের চিত্রে লক্ষ্য করি।



রিলেশন R এ যতটি ক্রমজোড় আছে, A থেকে B সেটে ততগুলো তীর চিহ্ন দিয়ে (→) যুক্ত করে দেয়া হয়েছে। ঠিক একইভাবে S রিলেশনের সেটে যতটি ক্রমজোড় আছে। তা চিত্রের দ্বিতীয় অংশে তীর চিহ্ন দিয়ে (→) দেখানো হয়েছে। R এবং S রিলেশন সেটের সাথে চিত্রটি ভালোভাবে মিলিয়ে দেখ।

R রিলেশন সেটের প্রথম ক্রমজোড় (1, a) এ ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদান 1 এবং দ্বিতীয় উপাদান a। দ্বিতীয় উপাদান a, S সেটের কোন ক্রমজোড়ের সাথে যুক্ত নয়। অতএব (1, a) ক্রমজোড়কে R এবং S এর কম্পোজিট রিলেশনে ব্যবহার করা যাবে না। মোট কথা A সেট থেকে যে উপাদানের তীর চিহ্ন, B সেটের কোন উপাদানে যায় এবং সেখান থেকে C সেটের কোন উপাদানে যায়, তবে A সেটের সে উপাদানকে R এবং S এর কম্পোজিশনে ব্যবহার করা যাবে। A এর উপাদান 3 থেকে B সেটের উপাদান c তে যায়, এরপর c থেকে C সেটের y উপাদানে যায়। অতএব 3 এর সাথে y এর একটি অন্বয় স্থাপিত হতে পারে। আমরা তা নিম্নরূপে লিখতে পারি।

3(RoS) y

এভাবে হিসেব করে আমরা R এবং S এর কম্পোজিশন করে যে সেট পাই সেট নিম্নরূপ ঃ

RoS = {(2, z), (3, y), (4, z)}

উদাহরণ-২.২১ ঃ

ধরা যাক, A = {1, 2, 3}

এবং B = {1, 2, 3, 4}

অন্বয়, R_1 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3)}

R_2 = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)

নির্ণয় কর ঃ

(i) $R_1 \cup R_2$, (ii) $R_1 \cap R_2$ (iii) $R_1 - R_2$ এবং (iv) $R_2 - R_1$

সমাধান ঃ

এখানে দেয়া আছে,

A = {1, 2, 3}

B = {1, 2, 3, 4}

এবং R_1 = {(1, 1), (2, 2), (3, 3)}

R_2 = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)}

∴ (i) $R_1 \cup R_2$ = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (3, 3)}

(ii) $R_1 \cap R_2$ = {(1, 1)}

(iii) $R_1 - R_2$ = {(2, 2), (3, 3)}

(iv) $R_2 - R_1$ = {(1, 2), (1, 3) (1, 4)}

উদাহরণ-২.২২। R এবং S এর মধ্যে যোগজ অন্বয় বের কর।

যেখানে, R হল {1, 2, 3} এবং {1, 2, 3, 4} এর মধ্যে অন্বয়। R = {(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)

এবং S হল {(1, 2, 3, 4) এবং { 0, 1, 2} এর মধ্যে অন্বয়

সুতরাং S = {(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)}

সমাধান ঃ

SOR, R এবং S সকল ক্রম জোড় অনুযায়ী বের করা যায়। যেখানে R এর দ্বিতীয় ক্রমজোড় S এর প্রথম ক্রমজোড়কে সিদ্ধ করে।

∴ SOR = {(1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1)}

২.৭ অন্বয় ও ম্যাট্রিক্সের যোজন বা কম্পোজিশন (Composition of Relations and matrices) ঃ

ম্যাট্রিক্সে কতিপয় সংখ্যাকে রো এবং কলামে সাজিয়ে যদি সংখ্যাগুলোর উভয় দিকে [ ] বা ‖ ‖ অথবা ( ) চিহ্ন দেয়া হয়, তবে সে সংখ্যার সেটকে ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

নিম্নের চিত্রে একই উপাদান সংবলিত 3টি ম্যাট্রিক্স দেয়া হলো -

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{bmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix} \quad \left\| \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{matrix} \right\|$$

উপরের চিত্রে 3টি ম্যাট্রিক্স দেয়া আছে। এখানে প্রত্যেকটি ম্যাট্রিক্স 3 × 3 (3 বাই 3), অর্থাৎ প্রত্যেকটা ম্যাট্রিক্সে 3টি রো এবং 3টি কলাম আছে। প্রত্যেক ম্যাট্রিক্সের নোটেশন আলাদা দেয়া আছে। উক্ত 3টি নোটেশনের যে কোন একটি নোটেশন ব্যবহার করা যায়। ম্যাট্রিক্সে রো সংখ্যা এবং কলাম সংখ্যা সমান থাকা বাধ্যতামূলক নয়।

একটি ম্যাট্রিক্সের সাথে অপর ম্যাট্রিক্স যোগ বা বিয়োগ করা যায়, যদি দু'টি ম্যাট্রিক্সের রো সংখ্যা এবং কলাম সংখ্যা সমান হয়। ম্যাট্রিক্সের গুণনের সময় একটি নির্দিষ্ট নিয়ম পালন করতে হয়। কোন ম্যাট্রিক্স A যদি 4×3 হয় এবং অপর ম্যাট্রিক্স B যদি 3×2 হয়, তবে ম্যাট্রিক্স A এর সাথে ম্যাট্রিক্স B গুণ করা যাবে। অর্থাৎ প্রথম ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা এবং দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্সের রো সংখ্যা সমান হলে দু'টি ম্যাট্রিক্স গুণ করা যাবে। আলোচ্য ক্ষেত্রে A ম্যাট্রিক্সের সাথে B ম্যাট্রিক্স গুণ করা যাবে। A ম্যাট্রিক্সের সাথে B ম্যাট্রিক্স গুণ করলে একটি 4×2 ম্যাট্রিক্স পাওয়া যাবে। অপর দিকে B ম্যাট্রিক্সের A ম্যাট্রিক্স গুণ করা যাবে না। ম্যাট্রিক্সের বিষয়ে এ প্রস্তুকের তৃতীয় অধ্যায়ে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে।

ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে ও যোজন বা কম্পোজিট রিলেশন নির্ণয় করা যায়। যখন একটি রিলেশনের সাথে অন্য রিলেশনের যোজন (Composite) রিলেশন নির্ণয় করা হয়, তখন আমরা সাধারণ পদ্ধতিতে করতে পারি। কিন্তু যদি কোন একটি রিলেশনে ক্রমজোড় এর সংখ্যা বেশি থাকে তাহলে, কম্পোজিট রিলেশনে ভুল হয়ে যাবার সম্ভাবনা থাকে। এরূপ ক্ষেত্রে ম্যাট্রিক্সের সাহায্যে কিভাবে যোজন বা কম্পোজিট রিলেশন নির্ণয় করা হয়, তা নিচের সূত্রে উদাহরণের মাধ্যমে বুঝা যায়-

সূত্র ঃ ধরি, A, B, C এবং D হল সেট এবং R হলো A এবং B এর মধ্যে অন্বয় বা রিলেশন, S হল B এবং C এর মধ্যেকার অন্বয় বা রিলেশন এবং T হলো C এবং D এর মধ্যেকার অন্বয়।

তখন $(R_0S)OT = R_0(S_0T)$

উদাহরণ-২.২৩ ঃ

ধরা যাক, সেট $A = \{1, 2, 3, 4\}$

সেট $B = \{a, b, c, d\}$ এবং

সেট $C = \{x, y, z\}$

A এবং B এর মধ্যকার অন্বয় $R = \{(1, a), (2, a), (2, d), (3, c), (4, d)\}$

B এবং C এর মধ্যকার অন্বয় $S = \{(b, x), (b, z), (c, y), (d, z)\}$

$M_R \times M_S = ?$ [ম্যাট্রিক্স গুণ বের কর।] [বাকাশিবো-২০১৩]

সমাধান ঃ দেয়া আছে

R ও S অন্বয়ের সেটকে ম্যাট্রিক্সে কোডে রূপান্তর করে পাই,

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$M_S = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

ম্যাট্রিক্স M_R এবং ম্যাট্রিক্স M_S গুণ করি, ধরি নতুন ম্যাট্রিক্স M গঠিত হয়।

$$M = M_R \times M_S = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

এবার উক্ত ম্যাট্রিক্সকে ডি-কোডিং করে পাই-

$M = \{(2, z), (3, y), (4, z)\}$

$\therefore R_0S = \{(2, z), (3, y), (4, z)\}$

অতএব $M = R_0S$

অনুশীলনী-২

▸▸ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি ঃ

১। অন্বয় কী? [বাকাশিবো- ২০০৫, ২০১০R, ১২]

২। সংশ্লিষ্টতার নিয়ম কী?

৩। যদি P(a, b) সত্য হয় তবে A. B সেট এর অন্বয়কে কীভাবে লেখা যায়?

৪। A-এবং B সেটের উপাদানের অন্বয় R সংক্ষেপে লিখে প্রকাশ কর।

৫। ডোমেন কাকে বলে? [বাকাশিবো- ২০০৭]

৬। বৈশিষ্ট্যানুসারে অম্বয় কত প্রকার ও কী কী? [বাকাশিবো- ২০০৭]

৭। ফাংশন কাকে বলে? [বাকাশিবো-২০১৩R]

▸▸ সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি ঃ

৮। অন্বয় (Relation) বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০০৫, ২০০৬, ১১]

৯। অন্বয়ে কী কী বিষয় অন্তর্ভুক্ত থাকে?

১০। p(a, b) সত্য বা মিথ্যা হলে কিরূপ অন্বয় হয়?

১১। অন্বয়ের বৈশিষ্ট্য উল্লেখ কর।

১২। অন্বয় (Relation) কত প্রকার ও কী কী? [বাকাশিবো-২০০৭, ২০১৪R]

১৩। Diagraph এ Relation কে কীভাবে উপস্থাপন করা হয়, দেখাও। [বাকাশিবো-২০০৩]

১৪। সেটের কার্তেসীয় গুণজ বা গুণন কাকে বলে?

১৫। Relation (অন্বয়) এর ডোমেন এবং রেঞ্জ কাকে বলে?

১৬। Reflexive (প্রতিফলিত) রিলেশন কাকে বলে? [বাকাশিবো-২০০৩, ২০০৬, ০৭, ১৪R]

১৭। Inverse Relation (বিপরীত অন্বয়) বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০০৪, ১১, ১৩]

১৮। Symmetric Relation (প্রতিসাম্য অন্বয়) কাকে বলে? [বাকাশিবো- ২০০৮, ২০০৭]

১৯। Anti Symmetric Relation (অপ্রতিসাম্য অন্বয়) কাকে বলে?

২০। Transitive Relation (ক্রমবয়ী অন্বয়) কাকে বলে?

২১। Equivalence Relation (সমতুল্য অন্বয়) কাকে বলে? [বাকাশিবো-২০০৩]

২২। Ordered Relation (ক্রম অন্বয়) কাকে বলে? [বাকাশিবো-২০০৩]

২৩। Function Relation (ফাংশন অন্বয়) কাকে বলে? [বাকাশিবো-২০০৩]

২৪। $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ফাংশনে ডোমেন নির্ণয় কর এবং $f(-3)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ এর মাঝে কোনগুলোর মান নির্ণয় করা যায়। [বাকাশিবো-২০০৩]

▸▸ রচনামূলক প্রশ্নাবলি ঃ

২৫। অন্বয় বলতে কী বুঝায়? আলোচনা কর।

২৬। অন্বয়ের তিনটি উদাহরণসহ ব্যাখ্যা দাও। [বাকাশিবো-২০০৩]

২৭। অন্বয়ের ডোমেন এবং রেঞ্জ বলতে কী বুঝায়? আলোচনা কর।

২৮। অন্বয়ের (Relation) বৈশিষ্ট্যগুলোর (Property) বিস্তারিত বর্ণনা দাও। [বাকাশিবো-২০০৩, ০৫, ০৭, ১০, ১১R, ১৪R]

২৯। উদাহরণসহ অন্বয়ের প্রকারভেদ আলোচনা কর। [বাকাশিবো-২০০২, ০৯R, ১০, ১১]

৩০। ফাংশন বলতে কী বুঝায়? বিপরীত ফাংশন সম্পর্কে যা জান লিখ।

৩১। ফাংশনের প্রকারভেদ আলোচনা কর।

৩২। বিপরীত অন্বয় বলতে কী বুঝায়, ব্যাখ্যা কর।

৩৩। সসীম সেট অন্বয় সম্পর্কে আলোচনা কর।

৩৪। অন্বয়ের যোজন বলতে কী বুঝায়?

৩৫। অন্বয় এবং মেট্রিক্সের যোজন সম্পর্কে আলোচনা কর। [বাকাশিবো-২০০৫, ০৭]

▸▸ সমস্যাবলি ঃ

১। $A = \{1, 2, 3\}, B = \{x, y, z\}$ সেট দুটি রিলেশন $R = \{(1, y), (1, z), (3, y)$ চিত্রের সাহায্যে দেখাও। [বাকাশিবো-২০০২, ১৪R]

২। $A = \{a, b, c\}$ সেট হতে $B = \{1, 2\}$ সেটের মধ্যে মোট রিলেশনের সংখ্যা বের কর। **উত্তর ঃ** 6] [বাকাশিবো-২০০২, ০৮]

৩। $A = \{x, y, z\}, B = \{1, 2, 3\}$ সেট দুইটি রিলেশন $R = \{(x, 2), (x, 3), (z, 2)\}$ চিত্রের সাহায্যে দেখাও।
[বাকাশিবো-২০০৬, ০৫]

৪। দেয়া আছে, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, নিচের রিলেশনটির জন্য Directed গ্রাফ তৈরি কর ঃ $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 2), (4, 4)\}$ [বাকাশিবো-২০০৪, ১৩]

৫। তিনটি সেট $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, C = \{0, 1, 2\}$ এর ক্ষেত্রে A থেকে B এর Relation $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$ এবং B থেকে C এর Relation $S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$ হলে Arrow diagram এর সাথে R_0S নির্ণয় কর। [বাকাশিবো-২০০৩, ২০০৩R, ১০, ১২, ১৩R]

৬। দুটি সেট $A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c\}$ এবং $R = \{(1, a), (1, b), (3, a)\}$ অন্বয়টিকে আয়তাকার Array পদ্ধতিতে দেখাও। [বাকাশিবো-২০১২ (৪র্থ পর্ব)]

৭। দুটি সেট $A = \{1, 2, 3,\}, B = \{x, y, z\}$ এবং $R = \{(1, x), (1, y), (3, x)\}$ অন্বয়টিকে Arrow diagram পদ্ধতিতে দেখাও।

৮। যদি A, B, C তিনটি সেট হয় তবে প্রমাণ কর যে,
(i) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
(ii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

৯। $A = \{a, b, c\}$ এবং $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, c)\}$ নির্ণয় কর।
(i) Reflexive Relation
(ii) Symmetric Relation
(iii) Transitive Relation.

১০। যদি $A = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং Relation $R = \{(1, 3), (1, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)$ হয়, তবে R অন্বয় (Relation) এর ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। **[উত্তর ঃ** ডোমেন $= \{1, 3\}$, রেঞ্জ $= \{2, 3, 4\}$

১১। একটি সসীম সেট (Finite set) এ রিলেশন R = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (4, 4)} হলে একে অ্যারো ডায়াগ্রাম ও ম্যাট্রিক্স আকারে প্রকাশ কর। [বাকাশিবো-২০০৩R, ১২, ১৩]

১২। মনে কর, A = {1, 2, 3, 4}, B = {2, 4, 6, 8}, C = {3, 4, 5, 6} নিচের সেটগুলো নির্ণয় কর।

(ক) $A \cup B$ (খ) $A \cup C$ (গ) $B \cup C$ (ঘ) $A \cup A$.

উত্তর ঃ (ক) {1, 2, 3, 4, 6, 8}, (খ) {1, 2, 3, 4, 5, 6}, (গ) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8} (ঘ) {1, 2, 3, 4}

১৩। মনে কর, A = {a, b, c, d}, B = {a, d, e}, C = {a, f, g} নিচের সেটগুলো বের কর ঃ

(ক) $A \cap B$ (খ) $A \cap C$ (গ) $B \cap C$ (ঘ) $(A \cap B) \cap C$. **উত্তর ঃ** (ক) {a, d }, (খ) {a} (গ) {a} (ঘ) {a}]

১৪। মনে কর, সার্বিক সেট U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, A = {1, 2, 3}, B = {2, 4, 6, 8}, C = {3, 4, 5, 6}

মান নির্ণয় কর ঃ

(ক) A' (খ) C' (গ) $(A \cap C)'$ (ঘ) $(B')'$ (ঙ) $(B - C)'$

উত্তর ঃ (ক) {4, 5, 6, 7, 8 } (খ) {1, 2, 7, 8 }, (গ) {1, 2, 4, 5, 6, 7, 8} (ঘ) {2, 4, 6. 8] (ঙ) {1, 3, 4, 5, 6, 7}

১৫। $A \subset B$ এবং $C \subset D$ হলে, প্রমাণ কর যে, $(A \times C) \subset B \times D$.

১৬। প্রমাণ কর ঃ

মনে কর সার্বিক সেট ঃ U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}, A = {2, 4, 6, 8, 10, 12} এবং B = { 3, 6, 9, 12) হলে নিচের সেটগুলোর মান নির্ণয় কর।

(i) $(A \cup B)$ (ii) $A \cap B$ (iii) A' (iv) $A - B$.

উত্তর ঃ (ক) (i) {2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12 } (ii) {6, 12}, (iii) {1, 3, 5, 7, 9, 11} (iv) {2, 4, 8, 10]

১৭। মনে কর, A = { –2, –1, 0), f: A→R, (যেখানে R বাস্তব সংখ্যার সেট) এবং fকে $f(x) = x^2 + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হল। f এর রেঞ্জ নির্ণয় কর। **উত্তর ঃ** f এর রেঞ্জ {5, 2, 3]

১৮। মনে কর, A = { – 4, –3, –2, 0, 3, 4} এবং f : A→B কে $f(x) = x^2 + x - 3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হল। f এর রেঞ্জ নির্ণয় কর। **উত্তর ঃ** (– 3, – 1, 3, 9, 17}]

১৯। মনে কর, f: R→R কে $f(x) = x^2 - 4x + 3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হল। মান নির্ণয় কর ঃ

(ক) $f(4)$ (খ) $f(-3)$ (গ) $f(y - 2z)$. **উত্তর ঃ** (i) 3 (ii) 24 (iii) $y^2 - 4yz + 4z^2 - 4y + 8z + 3$]

২০। সেট, A = {1, 2, 3, 4 } এবং B = { x, y, z } ; ধরি Relation R = {(1,y), (2, z), (2, y)} ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। [বাকাশিবো-২০০৭]

২১। তিনটি সেট A = {1, 2, 3, 4 }, B = { a, b, c, d }, C = { x, y, a } এর ক্ষেত্রে A থেকে B এর Relation R = {(1, a), (2, a), (2, d), (3, c), (4, b)} এবং B থেকে C এর Relation S = {(b, x), (b, z), (c, y), (d, z)} হলে Mr × Ms নির্ণয় কর। [বাকাশিবো-২০১৩]

২২। Relation R = {(1, a), (1, b), (2, a) (2, c) (3, b) (4, d)}} এর মাট্রিক্স ও Arrow diagram দেখাও। [বাকাশিবো-২০১১]

২৩। দেওয়া আছে A = {1, 2, 3 }, B = {a, b, c }, C = { x, y, z } আরও দেয়া আছে A থেকে B এর রিলেশন R = {(1, b), (2, b), (2, C)} এবং B থেকে C এর রিলেশন S = {(a, y), (b, x), (c, y), (c, z)}। Ros এবং Mr, Ms নির্ণয় কর।

২৪। A = {1, 2, 3 }, B = {a, b, c }, C = {x, y, z }, অম্বয় R = {(1, 6), (2, a), (2, c)}, অম্বয় S = {(a, y), (b, x), (c, y), (c, z)} হলে Ros এর যোজিত অম্বয় এবং Ros অম্বয়ের ম্যাট্রিক্স Mros এর মান বের কর। [বাকাশিবো-২০০৮]

অনুশীলনী-২ এর সমাধান

▸▸ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

১। A' এবং 'B' দুটো সেট হলে গুণজ সেট $A \times B$ এর কোন অশূন্য উপসেটকে A থেকে B তে একটি অন্বয় (relation) বলে।

২। A ও B দুটো সেটের উপাদানের মধ্যে যে নিয়মে অন্বয় হয় তাকে সংশ্লিষ্টতার নিয়ম বলে।

৩। যদি P(a, b) সত্য হয় তবে আমরা লেখি aRb. যার অর্থ A সেটের a থেকে B সেটে b এর সাথে অন্বিত।

৪। অন্বয় R = {A, B, P(x, y)}

৫। F সেটে অন্তর্ভুক্ত ক্রমগুলোর প্রথম উপাদানসমূহের সেট D কে, অন্বয় F এর ডোমেন (Domain) বলে।

৬। বৈশিষ্টের বিচারে অন্বয়কে চারভাগে ভাগ করা যায়। যথা ঃ

(i) প্রতিফলিত (Reflexive) অন্বয়।

(ii) প্রতিসাম্য (Symmetric) অন্বয়।

(iii) অপ্রতিসাম্য (Anti-Symmetric) অন্বয়।

(iv) ক্রমস্বীয় (Transitive) অন্বয়।

৭। মনে করি, A এবং B যে কোন দুটি সেট। A থেকে B সেটে ফাংশন f হচ্ছে $A \times B$ এর এমন একটি উপসেট যেমন–

(i) প্রতিটি $a \in A$ এর জন্য একটি উপাদান $b \in B$ থাকে যেখানে $(a, b) \in f$ এবং

(ii) যদি $(a, b) \in f$ হয় এবং $(a, b') \in f$ হয় তবে অবশ্যই $b = b'$ হবে।

A সেট থেকে B সেটে f একটি ফাংশন হলে আমরা লিখি $f : A \to B$ হয়, তবে b কে f এর অধীনে a এর ইমেজ বলা হয় এবং আমরা লিখি $b = f(a)$.

▸▸ সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

৮। A এবং B দুটো সেট হলে, গুণজ সেট $A \times B$ এর কোন শূন্য উপসেটকে 'A' থেকে 'B' তে একটি অন্বয় (relation) বলে।

দু'টি সেট A ও B এর মধ্যে অন্বয় হলে

(i) A সেটের একই উপাদান F এর একাধিক ক্রমজোড়ে প্রথম উপাদান হতে পারে।

(ii) A সেটের কোন উপাদান F এর ক্রমজোড়গুলোর কোনটিতে নাও থাকতে পারে।

৯। অন্বয়ে মূলত তিনটি বিষয় অন্তর্ভুক্ত থাকে। যথা–

(i) A সেট

(ii) B সেট

(iii) p(x, y) যাতে p(a, b) সত্য বা মিথ্যা হতে পারে যেখানে, $(a, b) \in A \times B$.

১০। (i) যদি p(a, b) সত্য হয়, তবে আমরা লেখি aRb যার অর্থ A থেকে B সেটে b এর সাথে a অন্বিত।

(ii) যদি p(a, b) মিথ্যা হয়, তবে আমরা লেখি ARb D যার অর্থ A থেকে B সেটে b এর সাথে a অন্বিত।

১১। একটি সেটে অন্বয় শ্রেণিবদ্ধ করলে বহুবিধ বৈশিষ্ট্য পরিলক্ষিত হয়। এসব বৈশিষ্ট্যের প্রধান কয়েকটি নিম্নে তুলে ধরা হল ঃ

(i) 'A' একটি সেটে অন্বয় হলে 'R' কে রিফ্লেক্সিভ (Reflexive) বলা হয় যদি প্রতিটি উপাদান $a \in A$ এর জন্য $(a, a) \in R$ হয়।

(ii) যদি $(b, a) \in R : (a, b) \in A$ এর জন্য প্রতি ক্ষেত্রেই $(a, b) \in R$ হয় তবে সেট A এর অন্বয় R কে প্রতিসম বলা হয়।

(iii) যদি যখনই $(a, b) \in R$ এবং $(b, c) \in R$ হয়, তখন $(a, b, c) \in A$ এর জন্য $(a, c) \in R$ হয় তবে সেট A এর জন্য অন্বয় R কে ট্রান্সজিটিভ বলে।

১২। অন্বয় তিন প্রকার; যথা–

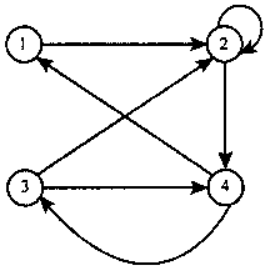
১। সমতাপূর্ণ অন্বয় (Equivalence Relation)

২। ক্রম অন্বয় (Ordered Relation)

৩। ফাংশন (Function)

১৩। মনে করি A একটি সসীম সেট। A সেট হতে A সেটে Relation R কে অন্য পদ্ধতিতে ছবির সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। প্রথমে আমরা সেটের উপাদানগুলোকে খাতায় লেখি, তারপর x এর প্রত্যেক উপাদান হতে y এর প্রত্যেক উপাদানে তীর চিহ্ন অংকন করি। যেখানে x, y তে অন্বিত। এই Diagram কে Relation এর Directed graph বলা হয়।

মনে করি, সেট A = {1, 2, 3, 4} এবং R = {(1, 2), (2,2) (2,4), (3,2), (3,4), (4,1), (4,3)}



১৪। **সেটের কার্তেসীয় গুণজ বা গুণন ঃ**

দু'টি সেটের সদস্য নিয়ে গঠিত সম্ভাব্য সকল ক্রম জোড়ের সেটকে উক্ত সেট দু'টির গুণফল সেট বা কার্তেসীয় গুণন সেট বলে।

ধরি $A = (a : a \in A)$ এবং $B = \{ b : b \in B\}$ তাহলে A এবং B সেট দু'টির কার্তেসীয় গুণনকে $A \times B$ দ্বারা নির্দেশিত হয় এবং নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়।

$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

$A \times B$ কে A গুণন B বা A cross B পড়া হয়।

১৫। ধরা যাক, R একটি ক্রম জোড়ের উপসেট। এবার যদি A থেকে B এর যে রিলেশন R হয়। সে রিলেশনের ক্রম জোড়ের প্রথম উপাদানকে ডোমেন বলা হবে। এর মানে, ডোমেন হল, A এর একটি উপসেট। অপর দিকে R সেটের প্রত্যেক ক্রম জোড়ের দ্বিতীয় উপাদানকে বলা হয় রেঞ্জ। এর মানে দাঁড়ায় রেঞ্জ (RANGE) হল B সেটের একটি উপসেট।

এখানে R কে একবার রিলেশন অর্থে ব্যবহার করা হয়েছে। আবার R কে ক্রম জোড়ের সেট হিসেবে ব্যবহার করা হয়েছে। R কে দু'ভাবে ব্যবহার করার অর্থ হল যে, পরবর্তীতে যদি আমরা রিলেশন R বলি, তবে এর দ্বারা R কে একটি উপসেট ধরে নিতে হবে।

ধরি, সেট A, B এবং রিলেশন R = {(1, 2), (1, 5), (2, 3), (4, 6)} এখানে $\{1, 2, 4\} \subset A$ অর্থাৎ 1, 2, 4 এ উপাদানগুলো হলো ডোমেন এর অন্তর্ভুক্ত এবং $\{2, 3, 5, 6\} \subset B$, এখানে 2, 3, 5, 6 এ উপাদানগুলো হলো রেঞ্জ এর অন্তর্ভুক্ত।

১৬। ধরি, $R \subset A \times B$ তাহলে A সেটে অন্বয় R কে রিফ্লেক্সিব অন্বয় বা প্রতিফলিত অন্বয় বলা হয়। যদি $a \in A \Rightarrow (a, a) \in R$

উদাহরণ ঃ

ধরি, A = {1, 2, 3}, A সেটের নিম্নের অন্বয়গুলির মধ্যে কোনগুলি প্রতিনিয়ত বা রিফ্লেক্সিব অন্বয়।

$R_1 = \{(1, 1), (1,2), (1, 3)\}$

$R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3)$

$R_3 = \{(1, 1), (2, 3), (1, 3)\}$

$R_4 = \{(1, 1), (2,2), (3, 3)\}$

উপরিউক্ত Relation গুলোর মধ্যে কেবল R_2 এবং R_4 হলে Reflesive Relation বা প্রতিফলিত অন্বয়। কারণ উভয় Relation এর মধ্যে ক্রমজোড় (a, a) বিশিষ্ট উপাদান আছে। কিন্তু অন্যান্য অন্বয়ে সবগুলো ক্রমজোড়ের উপস্থিতি নেই।

১৭। F যদি A সেটে থেকে B সেটে কোন অন্বয় হয়, তবে F এর বিপরীত অন্বয় হচ্ছে B সেট থেকে A সেটে একটি অন্বয় যা F^{-1} দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অতএব, $F^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in F\}$ । দেখা যাচ্ছে, F অন্বয়ের অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোতে প্রথম ও দ্বিতীয় উপাদান পরস্পর স্থান পরিবর্তন করলে বিপরীত অন্বয় F^{-1} পাওয়া যায়।

১৮। **Symmetric Relation ঃ**

যদি $R \in A \times A$ তাহলে A সেটে অন্বয় R কে প্রতিসাম্য অন্বয় বলা হবে, যদি $(a, b) R \in (b, a) \in R$ অন্যভাবে A সেটে অন্বয় R প্রতিসাম্য হবে যদি কেবলমাত্র $R^{-1} = R$ হয়।

উদাহরণ ঃ

ধরি, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, A সেটে নিচের অন্বয়গুলোর মধ্যে কোনগুলো প্রতিসাম্য বা সিমেট্রিক রিলেশন।

$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 4)\}$
$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
$R_3 = \{(1, 3), (2, 1)\}$
$R_4 = \phi$
$R_5 = A \times A$

এখানে, R_1 প্রতিসাম্য নয় কারণ $(1, 2) \in R_1$ কিন্তু $(2, 1) \notin R$
R_3 প্রতিসাম্য নয় কারণ $(1, 3) \in R_3$ কিন্তু $(3, 1) \notin R_3$
R_4 প্রতিসাম্য নয় কারণ $(1, 2) \in R_2, (2, 1) \in R_2$
R_3 প্রতিসাম্য।

১৯। ধরি, $R \in A \times A$ তাহলে A সেটে অন্বয় R কে অপ্রতিসাম্য অন্বয় বলা হবে যদি $(a, b) \in R$ এবং $(b, a) \in R \Rightarrow a = b$

উদাহরণ ঃ

$A = \{3, 5, 9\}$ সেটে নিম্নের প্রত্যেকটি অন্বয় (Relation) অপ্রতিসাম্য অন্বয়।

$R_1 = \{(3, 5)\}$
$R_2 = \{(3, 3), (5, 5), (9, 9)\}$
$R_3 = \{(3, 5), (5, 3), (5, 5)\}$

উদাহরণস্বরূপ, অন্বয় $R = \{(1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$ অন্বয়টি প্রতিসাম্য বা অপ্রতিসাম্য অন্বয় নয়।

পক্ষান্তরে $R' = \{(1, 1), (2, 2)\}$ অন্বয়টি প্রতিসাম্য এবং অপ্রতিসাম্য।

২০। ধরি $R \subset A \times A$ তাহলে A সেটে অন্বয় R কে ক্রমবয়ী অন্বয় বলা হবে যদি $(a, b) \in R$ এবং $(b, c) \in R$ তখন $(a, c) \in R$

উদাহরণ ঃ ধরি, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ A সেটে নিম্নের অন্বয়গুলোর মধ্যে কোনগুলো ক্রমবয়ী অন্বয়।

$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 4)\}$
$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
$R_3 = \{(1, 3), (2, 1)\}$
$R_4 = \phi$
$R_5 = A \times A$

এখানে R_3 অন্বয়টি ক্রমবয়ী বা ট্রানজিটিভ রিলেশন নয় বাকি সবগুলো অন্বয় ক্রমাবয়ী অন্বয় কারণ

$(2, 1), (1, 3), \in R_3$ কিন্তু $(2, 3) \notin R_3$

২১। একটি অশূন্য সেট S- এ অন্বয় R যখন রিফ্লেক্সিভ (Reflexive), সিমেট্রিক (Symmetric), এবং ট্রান্সজিটিভ (Transitive) হয়, তখন উক্ত অন্বয়কে সমতাপূর্ণ অন্বয় (Equaivalence Relations) বলা হয়।

অর্থাৎ R সমতাপূর্ণ অন্বয় হবে যখন নিচের তিনটি বৈশিষ্ট্য থাকবে-

(i) প্রতি $a \in s$ এর জন্য $a R a$
(ii) যদি $a R b$ তখন $b R a$
(iii) যদি $a R b$ এবং $b R c$ তখন $a R c$

সাধারণত অন্বয় ' = ' কে কোন সেট s হলো সমতাপূর্ণ অন্বয়। অর্থাৎ

(i) $a = a$ প্রতি $a \in s$ এর জন্য
(ii) যদি $a = b$ তখন $b = a$
(iii) যদি $a = b$ এবং $b = c$ তখন $a = c$

২২। ধরা যাক, R হল সেট, S হল একটি অন্বয় যা নিচের তিনটি ধর্মকে মেনে চলে-

(i) (রিফ্লেক্সিভ) যে কোন $a \in S$ এর জন্য আমরা পাই, $a R a$

(ii) (অসমতাপূর্ণ) যদি $a R b$ এবং $b R a$, তখন $a = b$

(iii) (ট্রান্সজিটিভ) যদি $a R b$ এবং $b R c$ তখন $a R c$

এরূপ অন্বয় R কে, খন্ডিতক্রম (Pavtial order) বা শুধু ক্রম (order) বলা হয় এবং R কে সেট S এ খন্ডিত ক্রম অন্বয় (Partial order Relation) বা কেবল ক্রম অন্বয় (Order Relations) বলা হয়।

ক্রম অন্বয়কে সচরাচর $\leq$ এবং $a \leq b$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। একে পড়া হয় a অগ্রবর্তী, পূর্ববর্তী b" ("a precedes b")

এরূপ ক্ষেত্রে আমরা লিখে থাকি।

$a < b$ অর্থ $a \leq b$ এবং $a \neq b$; পড়া হয়, 'a stricty precedes b" $b \geq a$ অর্থ $a \leq b$ পড়া হয়, "b succeds a" $b \geq c$ অর্থ $a \leq b$; পড়া হয়, "b strictly succeds a")

যখন কোন অনুমিততা না থাকে তখন $\leq, <, >$ এবং $\geq$ এর পরিবর্তে সরাসরি $\leq, <>$ এবং $\geq$ প্রতীক ব্যবহার করতে হবে।

২৩। একটি অন্বয় (Relation) যদি এরূপ হয় যে, A সেটের উপাদান B সেটের অনন্য (Unique) উপাদানের সাথে সংশ্লিষ্ট Associated) থাকে, তাহলে ঐ অন্বয়কে A সেট থেকে B সেটে একটি ফাংশন (Function) বলা হয়।

ফাংশনের সংজ্ঞা ক্রমজোড়ের সাহায্যেও দেয়া হয়। যদি কোন অন্বয়ে একই প্রথম উপাদান বিশিষ্ট দুইটি ভিন্ন ক্রমজোড় না থাকে, তবে ঐ অন্বয়কে ফাংশন বলা হয়।

২৪। $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ফাংশনে ডোমেন -1 ও 1

অর্থাৎ $-1 \leq 0 \leq 1$

এবং $f(3)$, $f(0)$, $f(1)$ ও $f(2)$ এর মাঝে

$f(0)$ ও $f(1)$ এর মান নির্ণয় করা যায়।

▶▶ রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ঃ

২৫। 'A' এবং 'B' দুটো সেট হলে গুণজ সেট $A \times B$ এর কোন অশূন্য উপসেটকে A থেকে B- তে একটি অন্বয় (Relation) বলে। লক্ষণীয় যে, A সেট থেকে B সেটে F একটি অন্বয় হলে।

(i) A সেটের একই উপাদান F এর একাধিক ক্রমজোড়ে প্রথম উপাদান হতে পারে।

(ii) A সেটের কোন উপাদান F-এর ক্রমজোড়গুলোর কোনটিতে নাও থাকতে পারে।

পাঠক মাত্রই গাণিতিক এবং কম্পিউটার বিজ্ঞানের বিভিন্ন অন্বয়ের সাথে পরিচিত যেমন- তুলনামূলক কম (Less than) , সমদূরবর্তী (is parallel to) একটি উপসেট (is a subset of) ইত্যাদি। উদাহরণত দুটি সেট $A = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং $B = \{1,3, 5\}$ বিবেচনা করি। A সেটের যে যে উপাদান B সেটের যে যে উপাদানের চেয়ে ছোট তাদের নিয়ে একটি ক্রম জোড়ের সেট F গঠন করি। স্পষ্টতই, $F = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3) (2, 5), (3, 5), (4, 5)\}$। অতএব F সেটের অন্তর্ভুক্ত ক্রম জোড়গুলোর প্রথম উপাদান A সেট থেকে এবং দ্বিতীয় উপাদান B সেট থেকে এমনভাবে নেয়া হয়েছে যেন প্রথম উপাদানটি দ্বিতীয় উপাদানের চেয়ে ছোট হয়। এরূপ ক্ষেত্রে বলা হয়, F সেটটি A সেট থেকে B সেটে একটি অন্বয় বা সম্পর্ক (Relation)।

সংকেতের সাহায্যে অন্বয়টি নিম্নরূপভাবে বর্ণনা করা যায়।

$F = \{(x, y) : x \in A, y \in B$ এবং $x < y\}$।

এখানে উল্লেখ্য যে, F সেট $A \times B$ গুণফল সেটের একটি উপসেট অর্থাৎ $F \subset A \times B$

দ্বিতীয়ত, আবার $A = \{2, 3, 4, 5\}$ এবং $B = \{3, 6, 7, 10\}$ দুটি সেট বিবেচনা করি। A সেটের যে সমস্ত উপাদান দ্বারা B সেটের যে উপাদানগুলো বিভাজ্য তাদের ক্রমজোড়ের একটি সেট F গঠন করি।

স্পষ্টতই, $F = \{(2, 6), (2, 10), (3, 3), (3, 6), (5, 10)\}$

এখানে, F সেটটি A সেট থেকে B সেটে একটি অন্বয় এবং F অন্বয়টি নিম্নরূপভাবে প্রকাশ করা যায়।

$F = \{(x, y) : x \in A, y \in B$ এবং x দ্বারা y বিভাজ্য$\}$;

স্পষ্টতই, এখানে, $F \subset A \times B$

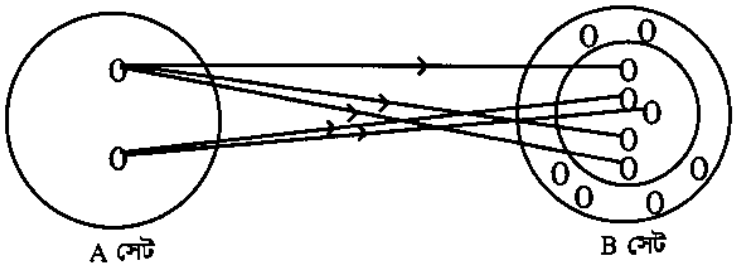
ধরা যাক, R বাস্তব সংখ্যার সেট। R এর উপাদানগুলো নিয়ে এমনভাবে ক্রমজোড়ের একটি সেট F গঠন করি যেন প্রতিটি ক্রমজোড়ের উপাদান দ্বিতীয় উপাদানের চেয়ে বড় হয়। অর্থাৎ

$F = \{(x, y) : x \in R, y \in R$ এবং $x > y\}$

এখানে, F সেটটি বাস্তব সংখ্যা সেট R-এ বর্ণিত একটি অন্বয়।

উল্লেখ্য যে, $F \subset R \times R$

২৬। (ক) ধরা যাক, A দ্বারা কম্পিউটার বিভাগের কয়েকজন শিক্ষার্থীর সেট এবং B দ্বারা উক্ত শিক্ষার্থীদের নিজস্ব পাঠ্য পুস্তকের সেট সূচিত করা হ'ল। ভেনচিত্রের সাহায্যে নিচে A ও B সেট দেখান হ'ল।



উপরের "তীর চিহ্ন" পর্যবেক্ষণ করে আমরা সহজেই বলতে পারি A সেটের প্রত্যেকটি উপাদানের সাথে B সেটের একাধিক উপাদান সংশ্লিষ্ট। কারণ, একজন শিক্ষার্থীর একাধিক পাঠ্যপুস্তক থাকতে পারে। এখানে আমরা বলি, A থেকে B সেটে a এর সাথে b অন্বিত (Related), যেখানে $a \in A$ এবং $b \in B$.

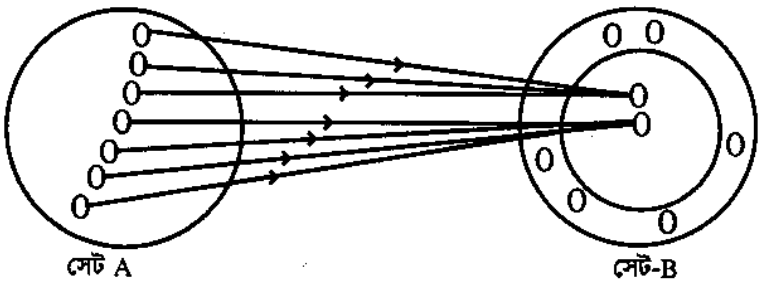
যদি এ অন্বয় (Relation) কে R দ্বারা সূচিত করা হয়, তবে লেখা হয়

a R b.

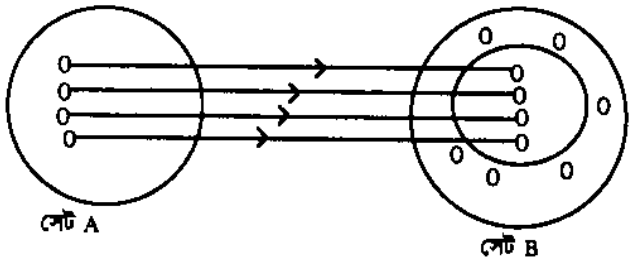
(খ) মনে করা যাক, A দ্বারা শিক্ষার্থীদের এবং B দ্বারা পলিটেকনিকের ছাত্রাবাসগুলোর সেট সূচিত করা হলো। নিচে ভেনচিত্র ও তীর চিহ্ন দ্বারা–

a R b অন্বয়টি দেখান হলো।

একটি ছাত্রাবাসে একাধিক শিক্ষার্থী বাস করতে পারে। সুতরাং A সেটের একাধিক উপাদান B সেটের যে কোন অনন্য (Unique) উপাদানের সাথে সংশ্লিষ্ট।



(গ) ধরা যাক, A দ্বারা শিক্ষার্থীদের এবং B দ্বারা তাদের রোল নম্বরের সেট সূচিত করা হল। ভেনচিত্র ও তীর চিহ্ন দ্বারা নিচে a R b দেখানো হলো। একজন শিক্ষার্থীর কেবল একটি রোল নম্বর থাকতে পারে। সুতরাং A সেটের প্রত্যেকটি উপাদানের সাথে B সেটের যেকোন অনন্য উপাদান সংশ্লিষ্ট রয়েছে।



উপরোল্লিখিত, (ক), (খ) ও (গ) এর উদাহরণের প্রত্যেকটিতে দেখা যাচ্ছে A সেটের উপাদানের সাথে B সেটের উপাদানের একটি সংশ্লিষ্টতার নিয়ম (Rule of correspondence) আছে।

২৭। ধরা যাক, R একটি ক্রম জোড়ের উপসেট। এবার যদি A থেকে B এর যে রিলেশন R হয়, সে রিলেশনের ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদানকে ডোমেন বলা হবে। এর মানে ডোমেন হল, A এর একটি উপসেট। অপরদিকে R সেটের প্রত্যেক ক্রমজোড়ের দ্বিতীয় উপাদানকে বলা হয় রেঞ্জ। এর মানে দাঁড়ায় রেঞ্জ (Range) হল B সেটের একটি উপসেট।

এখানে R কে রিলেশন অর্থে ব্যবহার করা হয়েছে।

ধরি সেট A, B এবং রিলেশন R = {(1, 2), (1, 5), (2, 3), (4, 6)}

এখানে {1, 2, 4} ⊂ A অর্থাৎ 1, 2, 4 এ উপাদানগুলো হলো ডোমেন এর অন্তর্ভুক্ত এবং {2, 3, 5, 6} ⊂B এখানে 2, 3, 5, 6 এ উপাদানগুলো হলো রেঞ্জ এর অন্তর্ভুক্ত।

উদাহরণ ঃ ধরি, A = {1, 2, 3} B = {x, y, z} এবং R = {(1, y), (1, z), (3, y)} ডোমেন এবং রেঞ্জ বের কর।

সমাধান ঃ

দেয়া আছে, A = {1, 2, 3} এবং সেট B = {x, y, z}

রিলেশন R = {(1, y), (1, z) (3, y)}

যেহেতু R, A × B এর উপসেট

রিলেশনের আলোকে

1Ry, 1Rz, 3Ry

সুতরাং R এর ডোমেন হলো (1, 3) এবং

রেঞ্জ হলো (y, z)

২৮। ধরা যাক, সেট A এবং B। A থেকে B এর অন্বয়ে বেশ কয়েকটি বৈশিষ্ট্য পাওয়া যায়। এই সকল বৈশিষ্ট্যের আলোকে রিলেশনকে নিম্নবর্ণিত 4 (চার)টি ভাগে ভাগ করা হচ্ছে-

(a) প্রতিফলিত অন্বয় বা রিফ্লেক্সিভ রিলেশন (Reflexive Relation)

(b) প্রতিসাম্য অন্বয় বা সিমেট্রিক রিলেশন (Symmetric Relation)

(c) অপ্রতিসাম্য অন্বয় বা এন্টিসিমেট্রিক রিলেশন (Anti-Symme Aric Relation)

(d) ক্রমন্বয়ী অন্বয় বা ট্রানজিটিভ রিলেশন (Transitive Relation)।

উক্ত রিলেশনগুলোর বৈশিষ্ট্য নিম্নে বর্ণনা করা হল

(a) প্রতিফলিত অন্বয় বা রিফ্লেক্সিভ রিলেশন (Reflexive Relation) ঃ

ধরি R⊂A × A তাহলে A সেটে অন্বয় R কে প্রতিফলিত অন্বয় বলা হয়। যদি $a \in A \Rightarrow (a, a) \in R$

উদাহরণ ঃ ধরি, A = {1, 2, 3, 4} A সেটের নিম্নের অন্বয় (Relation) গুলোর মধ্যে কোনগুলো প্রতিফলিত অন্বয়।

$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$

$R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3)\}$

$R_3 = \{(1, 1), (2, 3), (1, 3)\}$

$R_4 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

উপরিউক্ত অন্বয়গুলোর মধ্যে কেবল R_2 এবং R_4 হলো প্রফিলিত অন্বয়, কারণ উভয় অন্বয়ের মধ্যে ক্রমজোড় (a, a) বিশিষ্ট উপাদান আছে। কিন্তু অন্যান্য অন্বয়ে সবগুলো ক্রমজোড়ের উপস্থিতি নেই।

(b) প্রতিসাম্য বা সিমেট্রিক রিলেশন বা অন্বয় ঃ যদি $R \in A \times A$ তাহলে A সেটে অন্বয় R কে প্রতিসাম্য অন্বয় বলা হবে যদি $(a, a) \in R \Leftrightarrow (b, a) \in R$, অন্যভাবে A সেটে অন্বয় R প্রতিসাম্য হবে যদি কেবল মাত্র $R^{-1} = R$ হয়।

উদাহরণ ঃ ধরি, A = {1, 2, 3, 4} A সেটের নিচের অন্বয়গুলোর মধ্যে কোনগুলো প্রতিসাম্য বা সিমেট্রিক রিলেশন।

$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 4)\}$

$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

$R_3 = \{(1, 3), (2, 1)\}$

$R_4 \phi$

$R_5 = A \times A$

এখানে, R_1 প্রতিসাম্য নয় কারণ $(1, 2) \in R_1$ কিন্তু $(2, 1) \notin R_1$

R_3 প্রতিসাম্য নয় কারণ $(1, 3) \in R_3$ কিন্তু $(3, 1) \notin R_3$

R_2 প্রতিসাম্য কারণ $(1, 2) \in R_2, (2,1) \in R_2$

R_5 প্রতিসাম্য।

(c) অপ্রতিসাম্য বা এন্টিসিমেট্রিক রিলেশন ঃ ধরি, $R \in A \times A$ তাহলে A সেটে অন্বয় R কে অপ্রতিসাম্য অন্বয় বলা হবে যদি $(b, a) \in R$ এবং $(b, a) \in R \Rightarrow a = b$

উদাহরণ ঃ

A = {3, 5, 9} A সেটে নিম্নের প্রত্যেকটি অন্বয় অপ্রতিসাম্য অন্বয়

$R_1 = \{(3, 5)\}$

$R_2 = \{(3, 3), (5, 5), (9,9)\}$

$R_3 = \{(3, 5), (5, 3), (5, 5)\}$

উদাহরণস্বরূপ অন্বয় $R = \{(1, 3), (3, 1), (2, 3)\}$ অন্বয়টি প্রতিসাম্য বা অপ্রতিসাম্য অন্বয় নয়।

পক্ষান্তরে $R = \{(1, 1), (2, 2)\}$ অন্বয়টি প্রতিসাম্য এবং অপ্রতিসাম্য

(d) ক্রমন্বয়ী বা ট্রানজিটিভ রিলেশন ঃ ধরি, $R \subset A \times A$ তাহলে A সেটে অন্বয় R কে ক্রমন্বয়ী অন্বয় বলা হবে যদি $(a, b) \in R$ এবং $(b, c) \in R$ তখন $(a, c) \in R$

উদাহরণ ঃ ধরি, A = {1, 2, 3, 4}, A সেটে নিম্নের অন্বয়গুলোর মধ্যে কোনগুলো ক্রমন্বয়ী অন্বয়।

$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3), (4, 4)\}$

$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

$R_3 = \{(1, 3), (2, 1)\}$

$R_4 = \phi$

$R_5 = A \times A$

এখানে R_3 অন্বয়টি ক্রমন্বয়ী বা ট্রানজিটিভ রিলেশন নয় বাকি সবগুলো অন্বয় ক্রমন্বয়ী অন্বয় কারণ $(2, 1), (1, 3), \in R_3$ কিন্তু $(2, 3) \notin R_3$

২৯। অন্বয়কে তিনভাগে ভাগ করা যায়। যথা–

(ক) সমতাপূর্ণ অন্বয় (Equivalence Relations)

(খ) ক্রম অন্বয় (Ordered Relations)

(গ) ফাংশন (Function)।

(ক) সমতাপূর্ণ অন্বয় (Equivalence Relations) ঃ একটি অশূন্য সেট S-এ অন্বয় R যখন রিফ্লেক্সিভ (Reflexive), সিমেট্রিক (Symmetric) এবং ট্রান্সজিটিভ (Transitive) হয়, তখন উক্ত অন্বয়কে সমতাপূর্ণ অন্বয় (Equivalence Relations) বলা হয়।

অর্থাৎ R সমতাপূর্ণ অন্বয় হবে যখন নিচের তিনটি বৈশিষ্ট্য থাকবে–

(i) প্রতি $a \in S$ এর জন্য, $a R a$.

(ii) যদি $a R b$ তখন $b R a$.

(iii) যদি $a R b$ এবং $b R c$, তখন $a R c$.

সাধারণত অন্বয় '=' কে কোন সেট S হলো সমতাপূর্ণ অন্বয়। অর্থাৎ

(i) $a = a$ প্রতি $a \in S$ এর জন্য

(ii) যদি $a = b$, তখন $b = a$.

(iii) যদি $a = b$ এবং $b = c$, তখন $a = c$

(খ) ক্রম অন্বয় (Ordering Relations) ঃ

ধরা যাক R হল সেট, S এ একটি অন্বয় যা নিচের তিনটি ধর্মকে মেনে চলে–

(i) (রিফ্লেক্সিভ) যে কোন $a \in S$ এর জন্য আমরা পাই, $a R a$.

(ii) (অসমতাপূর্ণ) যদি $a R b$ and $b R a$, তখন $a = b$

(iii) (ট্রান্সজিটিভ) যদি $a R b$ এবং $b R c$ তখন $a R c$.

এরূপ অন্বয় R কে, খন্ডিতক্রম (Pavtial order) বা শুধু ক্রম (order) বলা হয় এবং R কে সেট s এ খন্ডিত ক্রম অন্বয় (Partial ordering Relation) বা কেবল ক্রম অন্বয় (Ordering Relations) বলা হয়।

ক্রম অন্বয়কে সচরাচর $\lesssim$ এবং $a \lesssim b$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। একে পড়া হয় "a অগ্রবর্তী, পূর্ববর্তী b" ("a precedes b")

এরূপ ক্ষেত্রে আমরা লিখে থাকি।

$a < b$ অর্থ $a \lesssim b$ এবং $a \neq b$; পড়া হয়, 'a strictly precedes b"

$b \gtrsim a$ অর্থ $a \lesssim b$; পড়া হয়, 'b succeeds a"

$b > a$ অর্থ $a < b$; পড়া হয় "b strictly succeeds a")

যখন কোন অনুমিততা না থাকে তখন $\lesssim, <, >$ এবং $\gtrsim$ এর পরিবর্তে সরাসরি $\leq, <, >$ এবং $\geq$ প্রতীক ব্যবহার করতে হবে।

(গ) ফাংশন (Function) ঃ মনে করি, A এবং B যে কোন দুটি সেট। A থেকে B সেটে ফাংশন f হচ্ছে $A \times B$-এর এমন একটি উপসেট যেন (i) প্রতিটি $a \in A$-এর জন্য একটি উপাদান $b \in B$ থাকে যেখানে $(a, b) \in f$ হয় এবং (ii) যদি $(a, b) \in f$ হয় এবং $(a, b') \in f$ হয় তবে অবশ্যই $b = b'$ হবে।

শর্ত (i) থেকে পাই প্রতিটি $a \in A$ ফাংশন f এর ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদান হবে এবং শর্ত (ii) থেকে পাই প্রতিটি $a \in A$ ফাংশন f-এর একটি এবং কেবলমাত্র একটি ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদান হবে। অতএব, দেখা যাচ্ছে, A থেকে B সেটে ফাংশন f হচ্ছে $A \times B$-এর ক্রমজোড়গুলোর একটি উপসেট যেখানে A সেটের প্রতিটি উপাদান ফাংশনে অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর কেবলমাত্র একটি ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদান হয়। সুতরাং বলা যায়, ফাংশন প্রকৃতপক্ষে একটি বিশেষ প্রকারের অন্বয়।

ফাংশনের সংকেতরূপে সাধারণত $f, g, F \Psi$ প্রভৃতি অক্ষর ব্যবহার করা হয়।

A সেট থেকে B সেটে f একটি ফাংশন হলে আমরা লিখি $f : A \to B$ এবং এটাকে পড়া হয় "f হচ্ছে A সেট থেকে B সেটে একটি ফাংশন।" যদি $(a, b) \in f$ হয়; তবে b কে f-এর অধীনে a-এর প্রতিচ্ছবি (image) বলা হয় এবং আমরা লিখি $b = f(a)$.

৩০। **ফাংশন (Function) ঃ** মনে করি, A এবং B যে কোন দুটি সেট। A থেকে B সেটে ফাংশন f হচ্ছে $A \times B$-এর এমন একটি উপসেট যেন (i) প্রতিটি $a \in A$-এর জন্য একটি উপাদান $b \in B$ থাকে যেখানে $(a, b) \in f$ হয় এবং (ii) যদি $(a, b) \in f$ হয় এবং $(a, b') \in f$ হয় তবে অবশ্যই $b = b'$ হবে।

শর্ত (i) থেকে পাই প্রতিটি $a \in A$ ফাংশন f এর ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদান হবে এবং শর্ত (ii) থেকে পাই প্রতিটি $a \in A$ ফাংশন f-এর একটি এবং কেবলমাত্র একটি ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদান হবে। অতএব, দেখা যাচ্ছে, A থেকে B সেটে ফাংশন f হচ্ছে $A \times B$-এর ক্রমজোড়গুলোর একটি উপসেট যেখানে A সেটের প্রতিটি উপাদান ফাংশনে অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর কেবলমাত্র একটি ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদান হয়। সুতরাং বলা যায়, ফাংশন প্রকৃতপক্ষে একটি বিশেষ প্রকারের অন্বয়।

ফাংশনের সংকেতরূপে সাধারণত $f, g, F \Psi$ প্রভৃতি অক্ষর ব্যবহার করা হয়।

বিপরীত ফাংশন (Inverse function) ঃ ধরি, A সেট থেকে B সেটে f একটি ফাংশন। উপরের উদাহরণ থেকে লক্ষ্য করছি যে $f^{-1}(b)$ এ একাধিক উপাদান অন্তর্ভুক্ত থাকতে পারে। এমন কি এটি একটি ফাঁকা সেট $\square$ হতে পারে। যদি $f : A \to B$ এক-এক এবং সর্বগ্রাহী উভয় ধরনের ফাংশন হয়, তবে প্রত্যেকটি $b \in B$ এর জন্য $f^{-1}(b)$ এর অনন্য উপাদান A সেটে অন্তর্ভুক্ত থাকবে। সুতরাং আমরা একটি নিয়ম পাই যা প্রত্যেকটি $b \in p$ এ আরোপ করলে $f^{-1}(b)$ এর জন্য অনন্য (Unique) উপাদান A সেটে পাওয়া যায়। তাহলে, f^{-1} হল B সেট থেকে A সেটে একটি ফাংশন। এ ফাংশনকে f^{-1} $B \to A$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়। f^{-1} কে f এর বিপরীত ফাংশন বলা হয় (অবশ্য $f : A \to B$ এক-এক এবং সর্বগ্রাহী উভয় ধরনের ফাংশন হওয়া অপরিহার্য।

ধরা যাক, $f : A \to B$ এবং $b \in B$। f^{-1} (b) (b), A সেটের এমন একটি বা একাধিক উপাদান নির্দেশ করে যায় বা যাদের প্রতিচ্ছবি হচ্ছে b। b যদি a সেটের কোন উপাদানের প্রতিচ্ছবি না হয় তবে f^{-1} (b) তে কোন উপাদান থাকবে না। অতএব, f^{-1} (b) তে এক বা একাধিক উপাদান থাকতে পারে অথবা আদৌ কোন উপাদান নাও থাকতে পারে। কিন্তু f যদি একই সাথে এক-এক এবং সার্বিক ফাংশন হয়, তবে $f(A) = B$ অর্থাৎ B সেটের সমস্ত উপাদানই f এর রেঞ্জ হয় এবং B সেটের পৃথক পৃথক উপাদান A সেটের ভিন্ন ভিন্ন উপাদানের প্রতিচ্ছবি হয়। সেক্ষেত্রে f^{-1} (b)-এর মান অনন্য অর্থাৎ $b \subset B$ এর জন্য A সেটে f^{-1} (b) একটি মাত্র উপাদান পাওয়া যাবে। অর্থাৎ $b \in B$-এর জন্য A সেটে আমরা একটি মাত্র উপাদান পাই। এ ফাংশনটিকেই বিপরীত ফাংশন বলা হয় এবং আমরা লিখি $f^{-1} : B \to A$। উল্লেখ্য যে, কোন ফাংশনের বিপরীত ফাংশন পাওয়া যাবে যখন $f : A \to B$ একই সাথে এক-এক এবং সার্বিক ফাংশন হবে।

৩১। **এক-এক ফাংশন (One-one function) ঃ** মনে করি, $f : A \to B$। যদি ফাংশনটি B সেটের পৃথক পৃথক উপাদানকে A সেটের পৃথক পৃথক উপাদানের সাথে সংশ্লিষ্ট করে তখন ফাংশনটিকে এক-এক ফাংশন বলা হয়। এক-এক ফাংশনে অবশ্যই A সেটের যে কোন দুটি উপাদানের একই প্রতিচ্ছবি থাকবে না। এক-এক ফাংশনে $f(a) = f(a')$ হলে বুঝতে হবে যে $a = a'$।

মনে করি, প্রদত্ত ফাংশন হল $f : A \to B$ যদি $a_1 \in A$. $a_2 \in A$. যেখানে $a_1 \neq a_2$ এবং $f(a_1)$ হয়, তবে f- কে এক-এক ফাংশন বলা হয়। যেমন, $f : R \to R$ কে $f(x) = x^3$ সূত্র দ্বারা সংজ্ঞায়িত করলে f এক এক ফাংশন হবে; কারণ $x = 3, -3$ হলে, $f(3) = 27$ এবং $f(-3) = -27$.

সংজ্ঞা ঃ যদি f ফাংশন এর অধীনে তার ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের প্রতিচ্ছবি ভিন্ন ভিন্ন হয়, তবে f কে এক-এক ফাংশন বলা হয়।

অভেদ ফাংশন (Identity function) ঃ যদি কোন ফাংশন কোন সেটের উপাদানকে একই সেটের ঐ উপাদানের সাথেই অন্বিত করে তখন ফাংশনটিকে অভেদ ফাংশন বলা হয়। ধরি, R বাস্তব সংখ্যার সেট এবং $f(x) = x$ ফর্মুলা কর্তৃক সংজ্ঞায়িত $f : R \to R$। এক্ষেত্রে f একটি অভেদ ফাংশন। কারণ $f(1) = 1, f(-1) = -1, f(3) = 3, f(4) = 4$ ইত্যাদি। উল্লেখ্য যে, অভেদ ফাংশন সব সময়ই এক-এক ফাংশন।

সার্বিক ফাংশন (Onto function) ঃ মনে করি, $f : A \to B$। f-এর রেঞ্জ $f(A)$ সাধারণত B সেটের এটি উপসেট হয় অর্থাৎ $f(A) \subset B$; কিন্তু যখন $f(A) = B$ হয় অর্থাৎ B সেটের সমস্ত উপাদানই A সেটের উপাদানের রেঞ্জ হিসেবে পাওয়া যায় তখন ফাংশনটিকে সার্বিক ফাংশন বলা হয়।

৩২। F যদি A সেট থেকে B সেটে কোন অন্বয় হয় তবে F-এর বিপরীত অন্বয় হচ্ছে B সেট থেকে A সেটে একটি অন্বয় যা, F^{-1} দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অতএব $F^{-1} = \{(b, a) | (a, b) \in F\}$। দেখা যাচ্ছে, F অন্বয়ের অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোতে প্রথম ও দ্বিতীয় উপাদান পরস্পর স্থান পরিবর্তন করলে বিপরীত অন্বয় F^{-1} পাওয়া যায়।

ধরা যাক, $A = \{1, 2, 3\}$ এবং $B = \{a, b\}$ দুটি সেট। A সেট থেকে B সেটে একটি অন্বয় $F = \{(1, a); (1, b), (3, a)\}$। F-এর বিপরীত অন্বয় হবে, $F^{-1} = \{(a, 1), (b, 1), (a, 3)\}$। উল্লেখ্য যে, F অন্বয়ের ডোমেন এবং রেঞ্জ যথাক্রমে F^{-1} অন্বয়ের রেঞ্জ এবং ডোমেন।

৩৩। ধরা যাক, A এবং B দুটি সসীম (Finite) সেট। এ দুটি সসীম সেট থেকে দু'ভাবে রিলেশন R চিত্রের সাহায্যে উপস্থাপন করা যায়। ধরা যাক, সেট $A = \{1, 2, 3\}$ এবং সেট $B = \{x, y, z\}$। এ দু'টি সেট থেকে একটি নির্দিষ্ট রিলেশন $R = \{(1, x), (2, y), (3, z)\}$ দুটি প্রক্রিয়ায় চিত্রের সাহায্যে উপস্থাপন করা হলো

(a) আয়তাকার Array পদ্ধতি ঃ নিম্নের চিত্রটি মনোযোগ সহকারে লক্ষ করি-

		B		
		x	y	z
	1	1	0	0
A	2	0	1	0
	3	0	0	1

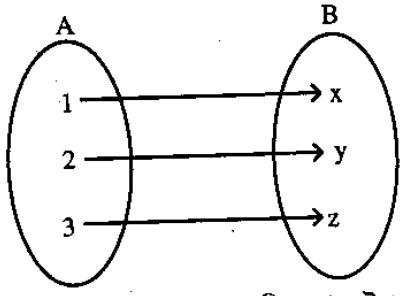
উপরিউক্ত চিত্রটি 3টি এ্যারের সাহায্যে তৈরি করা হল। A সেটের প্রথম উপাদান 1 এর জন্য একটি এ্যারে, 2 এর জন্য একটি অ্যারে এবং 3 এর জন্য একটি এ্যারে।

যেহেতু রিলেশন R এর ক্রমজোড় তিনটির মধ্যে কেবলমাত্র একটি ক্রমজোড়ের ডোমেন 1। সে ক্রমজোড় হলো (1, x)। অতএব প্রথম এ্যারেতে x বরাবর একটি 1 হবে। অন্য দু'ট স্থানে 0 (শূন্য) বসবে। এভাবে 1, 2, 3 এর সাথে x, y, z এর রিলেশন দেখানো হলো। যেক্ষেত্রে অন্বয় বা রিলেশন হয়েছে সেক্ষেত্রে 1 রয়েছে, আর যেক্ষেত্রে অন্বয় হয়নি সেক্ষেত্রে 0 (শূন্য) বসেছে। চিত্র থেকে সহজেই আমরা নিম্নবর্ণিত রিলেশন বের করে আনতে পারি।

$R = \{(1, x), (2, y), (3, z)\}$

উপরে বর্ণিত এ্যারের সম্বলিত রূপকে ম্যাট্রিক্স বলে। একটি ম্যাট্রিক্সের এ্যারেকে Row বলে এবং উপর থেকে নীচ পর্যন্ত সংখ্যাগুচ্ছকে কলাম বলে।

(b) Arrow diagram পদ্ধতি ঃ এবার নিম্নের চিত্রটি লক্ষ করি



সামান্য দূরত্বে চাকতির মতো দু'টি বস্তু আঁকা হয়েছে। প্রথম চাকতি হলো সেট A এবং দ্বিতীয় চাকতিটি হলো সেট B। প্রথম চাকতির মধ্যে A সেটের উপাদান 1, 2, 3 লেখা হয়েছে। দ্বিতীয় চাকতির মধ্যে B সেটের উপাদান x, y, z লেখা হয়েছে। A সেটের যেসব উপাদান, B সেটের যেসব উপাদানের সাথে অন্বয় স্থাপন করে তাকে তীর চিহ্ন $\rightarrow$ দ্বারা যুক্ত করে দেয়া হলো। উক্ত চিত্র থেকে সহজেই রিলেশন $R = \{(1, x), (2, y), (3, z)\}$ বের করা যায়।

সুতরাং উপরে বর্ণিত চিত্রকে diagram বলে অভিহিত করা যায়।

উদাহরণ ঃ

ধরা যাক, $A = \{1, 2, 3\}$

এবং $B = \{x, y, z\}$

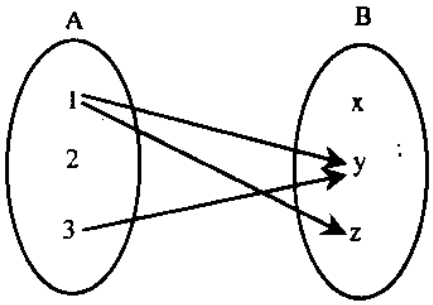
রিলেশন $R = \{(1, y), (1, z), (3, y)\}$

অতএব, অন্বয়ের সসীম সেটের নিয়মানুযায়ী নিম্নে চিহ্নিত হলো ঃ

(a) আয়তকার Array পদ্ধতি ঃ

		B		
		x	y	z
	1	0	1	1
A	2	0	0	0
	3	0	1	0

(b) Arrow diagram পদ্ধতি ঃ



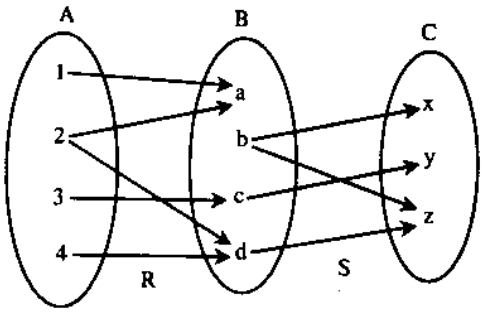
৩৪। ধরি, A, B এবং C 3 টি সেট। আরো ধরা যাক, R হচ্ছে A থেকে B এর রিলেশন এবং S হচ্ছে B থেকে C এর রিলেশন। রিলেশন R এবং রিলেশন S একত্রিত হয়ে A থেকে C এর রিলেশন স্থাপন করে। R এবং S রিলেশন এর সমন্বয়ের জন্য RoS দ্বারা চিহ্নিত করা যায়। রিলেশনকে এরূপ সমন্বয় করাকে যোজন বা কম্পোজিশন বলে। সমন্বিত রিলেশন RoS কে কম্পোজিট রিলেশন বলে। এ রিলেশনকে নিম্নরূপ ভাবে বর্ণনা করা যায়-

$RoS = \{(a, c) : a \in A, b \in B, c \in C, (a, b) \in R$ এবং $(b, c) \in S\}$

উদাহরণ ঃ ধরা যাক, সেট $A = \{1, 2, 3, 4\}$ সেট $B = \{a, b, c, d\}$ এবং সেট $C = \{x, y, z\}$

আরো ধরা যাক, রিলেশন $R = \{(1, a), (2, a), (2, d), (3, c), (4, d)\}$ এবং রিলেশন $S = \{(b, x), (b, z), (c,y), (d, z)\}$

এবার R এবং S এর রিলেশন চিত্রের সাহায্যে নির্ণয় করি-



রিলেশন R এ যতটি ক্রমজোড় আছে, A থেকে B সেটে ততগুলো তীরচিহ্ন দিয়ে (→) যুক্ত করে দেয়া হয়েছে। ঠিক একইভাবে, S রিলেশনের সেটে যতটি ক্রমজোড় আছে তা চিত্রের দ্বিতীয় অংশে তীর চিহ্ন দিয়ে (→) দেখানো হয়েছে।

R রিলেশন সেটের প্রথম ক্রমজোড় (1, a), এ ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদান 1 এবং দ্বিতীয় উপাদান a আবার দ্বিতীয় উপাদান a, S সেটের কোন ক্রমজোড়ের সাথে যুক্ত নয়। অতএব (1, a) ক্রমজোড়কে R এবং S এর কম্পোজিট রিলেশন বা যোজন অন্বয় এ ব্যবহার করা যাবে না। মোট কথা A সেট থেকে যে উপাদানের তীরচিহ্ন, B সেটের কোন উপাদানে যায় এবং সেখান থেকে C সেটের কোন উপাদানে যায়, তবে A সেটের সে উপাদানকে R এবং S এর কম্পোজিশনে ব্যবহার করা যাবে।

A এর উপাদান 3 থেকে B সেটের উপাদান c তে যায় এরপর c থেকে C সেটের y উপাদানে যায়। অতএব 3 এর সাথে y এর একটি রিলেশন স্থাপিত হতে পারে। এরূপ রিলেশন লিখতে 3(RoS)y

এভাবে হিসেব করে আমরা R এবং S এর কম্পোজিশন করে যে সেট পাই সেই সেট নিম্নরূপ -

RoS = {(2, z), (3, y), (4, z)

৩৫। ধরা যাক, M_R এবং M_S হল যথাক্রমে অন্বয় R এবং S এর মেট্রিক্স

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

এবং $M_S = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

M_R এবং M_s গুণন করে M মেট্রিক্স গঠিত হয়

$$M = M_R M_S = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

সূত্র ঃ ধরি A, B, C এবং D হল সেট। এর R হল A এবং B এর মধ্যে অন্বয়, S হল B এবং C এর মধ্যেকার অন্বয় এবং T হলো C এবং D এর মধ্যেকার অন্বয়।

তখন (RoS) oT = Ro (SoT)।

▶▶ সমস্যাবলি ঃ

১। উক্ত প্রশ্নোত্তর এ রিলেশনকে চিত্রের সাহায্যে দুভাবে দেখানো যায়-

(a) আয়তাকার Array পদ্ধতি

(b) Arrow diagram পদ্ধতি

দেয়া আছে,

A = {1, 2, 3}

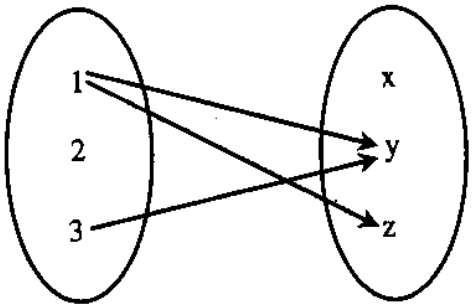
B = {x, y, z}

রিলেশন R = {(1, y), (1, z), (3, y)}

(a) আয়তাকার Array পদ্ধতিতে চিত্রের সাহায্যে দেখানো হল-

		x	y	z
	1	0	1	1
A	2	0	0	0
	3	0	1	0

(b) উক্ত রিলেশনকে আবার Arrow diagram পদ্ধতিতেও উপস্থাপন করা যায়।

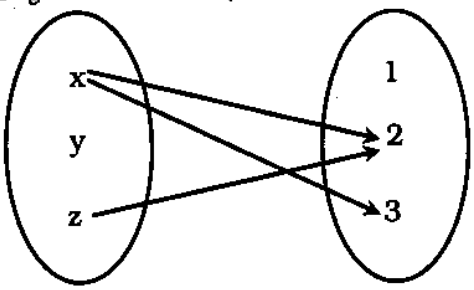


২। দেয়া আছে A = {a, b, c} এবং
B = {1, 2}
মোট রিলেশনের সংখ্যা
$n(A \times B) = 3 \times 2$
সুতরাং উক্ত রিলেশনে R এ ক্রমজোড় = 06
সুতরাং উক্ত রিলেশনের সংখ্যা = 06

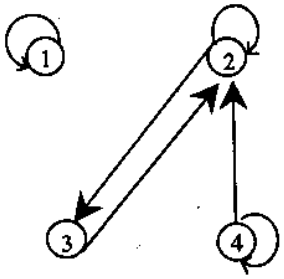
৩। উক্ত প্রশ্নোত্তর রিলেশনকে চিত্রের সাহায্যে দু'ভাবে দেখানো যায়-
(a) আয়তাকার Array পদ্ধতি
(b) Arrow diagram পদ্ধতি
দেয়া আছে, A = {x, y, z}
B = {1, 2, 3}
রিলেশন R = {(x, z), (x, 3) (z, 2)}
(a) আয়তাকার Array পদ্ধতিতে চিত্রের সাহায্যে দেখানো হল-

		1	2	3
	x	0	1	1
A	y	0	0	0
	z	0	1	0

উক্ত রিলেশনকে আবার Arrow diagram পদ্ধতিতে উপস্থাপন করা যায়-



৪। দেয়া আছে, A = {1, 2, 3, 4}
এবং রিলেশন R = {(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 2), (4, 4)}
উক্ত রিলেশনকে Directed graph এর মাধ্যমে উপস্থাপন করা যায়

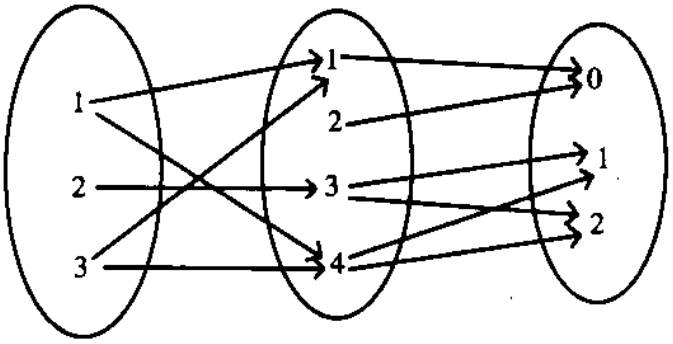


৫। দেয়া আছে,

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং $C = \{0, 1, 2\}$

$R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$

$S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$



সুতরাং $RoS = \{(1, 0), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 0), (3, 1)\}$

৬। দেয়া আছে,

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{a, b, c\}$

এবং রিলেশন $R = \{(1, a), (1, b), (3, a)\}$

উক্ত রিলেশনকে আয়তাকার Array পদ্ধতিতে দেখানো হল–

		a	b	c
	1	1	1	0
A	2	0	0	0
	3	1	0	0

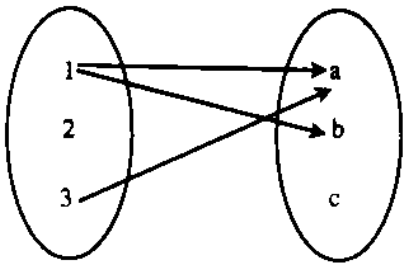
৭। দেয়া আছে,

সেট $A = \{1, 2, 3\}$

এবং সেট $B = \{a, b, c\}$

এবং রিলেশন $R = \{(1, a), (1, b), (3,a)\}$

উক্ত Relation কে Arrow diagram পদ্ধতিতে দেখানো হল



৮। (i) L.H.S

$$\begin{aligned} A \times (B \cup C) &= \{(x, y) : x \in A, y \in B \cup C\} \\ &= \{(x, y) : x \in A, (y \in B, y \in C)\} \\ &= \{(x, y) : (x \in A, y \in B), (x \in A, y \in C)\} \\ &= \{(x, y) : (x, y) \in A \times B, (x, y) \in A \times C\} \\ &= \{(x, y) : (x, y) \in (A \times B) \cup A \times C)\} \\ &= (A \times B) \cup (A \times C) \end{aligned}$$

আবার

$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(x, y) : (x, y) \in A \times B, (x, y) \in A \times C\}$
$= \{(x, y) : (x \in A, y \in B), (x \in A, y \in C)\}$
$= \{(x, y) : x \in A, (y \in B, y \in C)\}$
$= \{(x, y) : x \in A, y \in (B \cup C)\}$
$= A \times (B \cup C)$ **(প্রমাণিত)**

(ii) এখানে $A \times (B \cap C) = \{(x, y) : x \in A, y \in (B \cap C)\}$
$= \{(x, y) : x \in A, (y \in B, y \in C)\}$
$= \{(x, y) : (x \in A, y \in B), (x \in A, y \in C)\}$
$= \{(x, y) : (x, y) \in A \times B, (x, y) \in A \times C\}$
$= \{(x, y) : (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)\}$
$= \{(A \times B) \cap (A \times C)$

আবার,

$(A \times B) \cap (A \times C) = \{(x, y) : (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)\}$
$= \{(x, y) : (x, y) \in A \times B, (x, y) \in A \times C\}$
$= \{(x, y) : (x \in A, y \in B), (x \in A, y \in C)\}$
$= \{(x, y) : x \in A, (y \in B, y \in C)\}$
$= \{(x, y) : x \in A, y \in (B \cap C)\}$
$= \{(x, y) : (x, y) \in A \times (B \cap C)\}$
$= A \times (B \cap C)$ **(প্রমাণিত)**

৯। দেয়া আছে, $A = \{a, b, c\}$

এবং রিলেশন $R = \{(a, a), (a , b), (b, c), (c, c)\}$

(i) Reflexive $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (b, b), (c, c)$

(ii) Symmetric, $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (c, c)\}$

(iii) transitive : $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (a, c), (c, c)\}$

১০। দেয়া আছে, $A = \{1, 2, 3, 4\}$

এবং $R = \{(1, 3), (1, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$

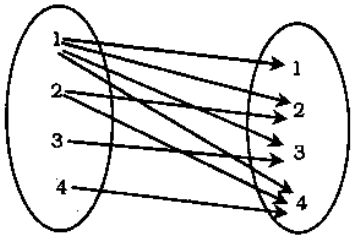
R এর ডোমেন $= \{1, 3\}$

R এর রেঞ্জ $= \{2, 3, 4\}$

১১। মনে করি, $A = \{1, 2, 3, 4\}$

রিলেশন $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$

উক্ত Relation কে Arrow diagram আকার নিম্নে প্রকাশ করা হল



এবং ম্যাট্রিক্স আকারে ঃ

$$M_R = \begin{array}{c} a \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

১২। দেয়া আছে, A = {1, 2, 3, 4}, B = (2, 4, 6, 8}

C = (3, 4, 5, 6)

(ক) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$; (খ) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

(গ) $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$; (ঘ) $A \cup A = \{1, 2, 3, 4\}$,

১৩। (ক) $A \cap B = \{a, d\}$; (খ) $A \cap C = \{a\}$; (গ) $B \cap C = \{a\}$;

(ঘ) এখানে $A \cap B = \{a, d\}$ এবং $C = \{a, f, g\}$; $\therefore (A \cap B) \cap C = \{a\}$.

১৪। (ক) $A' = U - A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ (খ) $C' = U - C = \{1, 2, 7, 8\}$

(গ) $(A \cap C)' = U - (A \cap C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} - \{3\} = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$;

(ঘ) $B' = \{1, 3, 5, 7\}$. $\therefore (B')' = U - B' = \{2, 4, 6, 8\}$;

(ঙ) $B - C = \{2, 8\}$; $\therefore (B - C)' = U - (B - C) = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

১৫। ধরি, $(x, y) \in (A \times C)$

তাহলে, $x \in A$ এবং $y \in C$

$\Rightarrow x \in B$ এবং $y \in D$

[$\therefore A \subset B$ এবং $C \subset D$]

$\Rightarrow (x, y) \in (B \times D)$

$\therefore (A \times C) \subset (B \times B)$ **(প্রমাণিত)**।

১৬। (i) $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \cup \{3, 6, 9, 12\} = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$

(ii) $A \cap B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \cap \{3, 6, 9, 12\} = \{6, 12\}$

(iii) $A' = U - A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

(iv) $A - B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} - \{3, 6, 9, 12\} = \{2, 4, 8, 10\}$.

১৭। f এর ডোমেন, অর্থাৎ A সেটের উপাদানগুলোর প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করলে আমরা পাই,

$f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$,

$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$,

$f(0) = (0 + 1) = 1$

$\therefore f$ এর রেঞ্জ $\{5, 2, 1\}$

১৮। f এর ডোমেন, অর্থাৎ A সেটের উপাদানগুলোর প্রতিচ্ছবি নির্ণয় করলে আমরা পাই,

$f(-4) = (-4)^2 - 4 - 3 = 9$,

$f(-3) = (-3)^2 - 3 - 3 = 3$,

$f(-2) = (-2)^2 - 2 - 3 = -1$,

$f(0) = 0 + 0 - 3 = -3$

$f(3) = 3^2 + 3 - 3 = 9$

$f(4) = 4^2 + 4 - 3 = 17$

$\therefore f$ এর রেঞ্জ $\{-3, -1, 3, 9, 9, 17\}$.

অর্থাৎ $\{-3, -1, 3, 9, 17\}$

১৯। প্রদত্ত ফাংশনের সূত্রটি যে কোন বাস্তব সংখ্যার জন্য প্রযোজ্য। সুতরাং

(ক) $f(4) = (4)^2 - 4(4) + 3 = 3$,

(খ) $f(-3) = (-3)^2 - 4(-3) + 3 = 24$,

(গ) $f(y - 2z) = (y - 2z)^2 - 4(y - 2z) + 3$

$= y^2 - 4yz + 4z^2 - 4y + 8z + 3$.

২০। দেওয়া আছে, সেট, A = {1, 2, 3, 4 } এবং

সেট, B = {x, y, z }

অম্বয়, = { (1, P), (2, z), (2, y) }

যেহেতু R, A × B এর উপসেট

অম্বয় এর আলোকে

1Ry, 2Rz, 2Ry

সুতরাং R এর ডোমেন হল = {1, 2 }

এবং R এর রেঞ্জ হল = { y, z }

২১। ধরি Mr এবং Ms হল যথাক্রমে অম্বয় R এবং S এর ম্যাট্রিক্স

$$Mr = \begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix}\begin{pmatrix}a & b & c & d\\1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\1 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

এবং

$$Ms = \begin{matrix}a\\b\\c\\d\end{matrix}\begin{pmatrix}x & y & z\\0 & 0 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

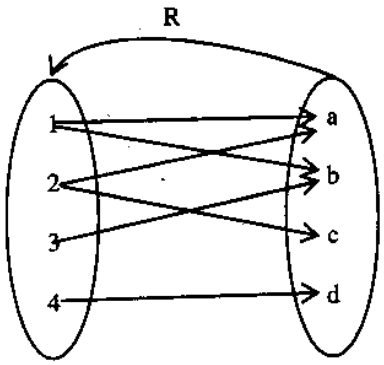
$$\therefore Mr \times Ms = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\1 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$ **Ans.**

২২। Relation R এর ম্যাট্রিক্স

$$M_R = \begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

এবং এর Arrow diagram হল ঃ

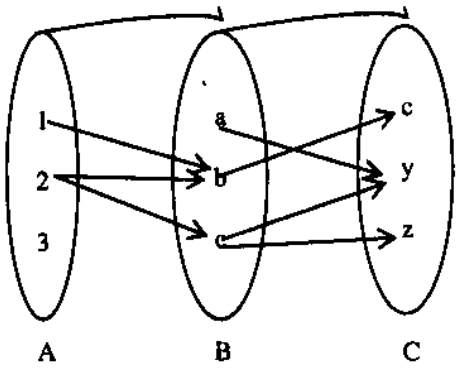


২৩। দেওয়া আছে, $A = \{ 1, 2, 3 \}$

$B = \{ a, b, c \}$

$C = \{ x, y, z \}$

A থেকে B এবং B থেকে C এর রিলেশন Arrow diagram এর মাধ্যমে দেখানো হল ঃ



চিত্র হতে দেখা যাচ্ছে যে, A সেটের 1, C সেটের x এর সাথে অর্থাৎ $1 \to b \to x$ সুতরাং (1, x) Ros এর একটি উপাদান। অনুরূপভাবে (2, x) (2, y) (2, z) Ros এর অন্তর্ভুক্ত কাজেই।

$Ros = \{(1, x) (2, x) (2, y) (2, z) \}$

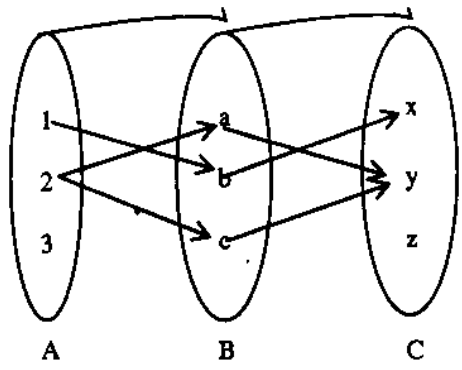
এবং $M_R = \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$ এবং $M_R = \begin{matrix} \\ 1 \\ b \\ c \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$

২৪। দেওয়া আছে, $A = \{ 1, 2, 3 \}$

$B = \{ a, b, c \}$

$C = \{ x, y, z \}$

অম্বয় R ও S এর Arrow diagram এর মাধ্যমে দেখানো হল ঃ



চিত্র হতে দেখা যাচ্ছে যে, A সেটের 1, C সেটের x এর সাথে অর্থাৎ $1 \to b \to x$ সুতরাং (1, x) Ros এর একটি উপাদান, অনুরূপভাবে (2, y) (2, y) Ros এর উপাদান।

$\therefore Ros = \{ (1, x), (2, y), (2, y) \}$

অধ্যায়-৩

ভেক্টরস্ এবং ম্যাট্রিক্স
(Vectors and Matrices)

৩.০ ভেক্টরস্ এবং ম্যাট্রিক্স (Vectors and Matrices) ঃ

ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স এর ক্ষেত্রে ভেক্টরস্ এবং ম্যাট্রিক্স মূলত বিভিন্ন সেট এবং উহার উপাদানসমূহের মধ্যে সম্পর্ক তুলে ধরার ক্ষেত্রে ব্যবহৃত হয়। যখন কতক উপাত্ত (Data) ক্রম বিন্যাস কৃতভাবে অ্যারেতে (Arrays) সাজান হয়, তখন সেটি একটি সেট (Set) হয়। এই সেটের উপাদানগুলো এক বা একাধিক নিম্ন খাত দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এরূপ একমাত্রা (One dimensional) বিশিষ্ট অ্যারে (Array) কে ভেক্টরস্ (Vectors) এবং দুই মাত্রা বিশিষ্ট অ্যারে (Array) কে ম্যাট্রিক্স (Matrices) বলা হয়। এখানে মাত্রাকে বিভিন্ন সংখ্যাসূচক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

৩.১ ভেক্টরস্ এবং ম্যাট্রিক্স এর সংজ্ঞা (Define of Vectors and Matrices) ঃ

(ক) ভেক্টরস্ (Vectors) ঃ ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স (Discrecte Mathematies) এর ক্ষেত্রে যখন কতক উপাত্ত (Data) ক্রম বিন্যাসকৃতভাবে অ্যারে (Array) এর মধ্যে সাজান হয়, তখন সেটি একটি সেট (Set) হয়। এই সেটের উপাদানসমূহ এক বা একাধিক সংখ্যা ঘাত দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এরূপ একমাত্রা বিশিষ্ট (One dimensional) অ্যারে (Array) কে ভেক্টরস্ (Vectors) বলা হয়।

ধরা যাক, আট জন ছাত্রের ওজন (পাউন্ডস্) তালিকা নিম্নরূপ-

134, 156, 127, 145, 203, 186, 145, 138

এসকল মানকে একটি নিম্নঘাত বিশিষ্ট সাংকেতিক চিহ্ন দিয়ে প্রকাশ করা যায়।

$W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6, W_7, W_8$

প্রতিটি নিম্নঘাত ক্রম তালিকায় বর্ণিত পরিমাণগত অবস্থান নির্দেশ করে। উদাহরণ স্বরূপ-

$W_1 = 134$ হল প্রথম নাম্বার

$W_2 = 156$ হল দ্বিতীয় নাম্বার

এ ধরনের তালিকা বদ্ধ মানকে ভেক্টর (Vector) বলা হয়।

যখন কতকগুলো উপাদান $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots a_n$ নিয়ে ভেক্টর u গঠিত হয়, তখন একে নিম্নরূপভাবে প্রকাশ করা হয়।

$u = (a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots a_n)$

যদি $a_i = 0$ হয় তবে সে ভেক্টরকে Zero Vectore বলা হয়। অর্থাৎ কোন উপাদান শূন্য হলে সে ভেক্টরকে Zero Vectore বলে।

(খ) ম্যাট্রিক্স (Matrices) ঃ একটি আয়তকার নাম্বারের এ্যারে যা দুটি বন্ধনী দ্বারা নিয়মানুযায়ী আবদ্ধ থাকে, তাকে ম্যাট্রিক্স (Matrices) বলে। যেমন ঃ

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ এবং $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ দুটি ম্যাট্রিক্স

ম্যাট্রিক্সকে তৃতীয় বন্ধনী [ ] বা দুই জোড়া সমান্তরাল ‖ ‖ দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

যে সমস্ত সংখ্যা নিয়ে ম্যাট্রিক্স গঠিত হয় তাদের প্রত্যেকটিকে এক একটি উপাদান বা Element বলে। ম্যাট্রিক্সে এক বা একাধিক সারি (Row) ও কলাম (Column) থাকতে পারে। উপরের প্রথম ম্যাট্রিক্সে ২টি সারি এবং 3টি কলাম আছে তাই ইহাকে 2×3 ম্যাট্রিক্স বলা হয়। আবার দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্সে 3টি সারি ও 3টি কলাম আছে তাই ইহাকে 3×3 ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

ম্যাট্রিক্সের ক্রম বা Order বলতে প্রথমে সারির সংখ্যা এবং পরে কলামের সংখ্যা উল্লেখ করতে হয়। mn সংখ্যাকে m সারিতে ও n কলামে বা স্তম্ভে সাজানো আকারকে $m \times n$ ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ am_1 & am_2 & am_3 \ldots\ldots\ldots amn \end{bmatrix}$$

বা, $[aij]$ $i = 1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots m$

$j = 1, 2, 3 \ldots\ldots\ldots n$

৩.২ ভেক্টরস্ ও ম্যাট্রিক্স পর্যালোচনা (Review of the Vectors and Matrices) ঃ

ভেক্টরস্ (Vectors) এবং ম্যাট্রিক্স (Matrices) সচরাচর ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্সে বিভিন্ন সেট এর উপাদান এর মধ্যে সমন্বয় সাধনের জন্য প্রয়োগ করা হয়। অধুনা এদেরকে কমিউনিকেশন নেটওয়ার্ক ও যোগাযোগ ব্যবস্থার মডেল রূপে ব্যবহার করা হয়। এজন্য অসংখ্য এলগরিদম (Algorithum) এসব মডেল এর আলোকে উন্নয়ন লাভ করছে।

(ক) ভেক্টরস্ (Vectors) ঃ ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স এর ক্ষেত্রে যখন কতক উপাত্ত (Data) ক্রম বিন্যাসকৃতভাবে কোন অ্যারে (Array) তে সাজান হয় তখন একে সেট (Set) বলা হয়। এই সেটের উপাদানসমূহ এক বা একাধিক সংখ্যা ঘাত দ্বারা দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

এরূপ একমাত্রা বিশিষ্ট অ্যারেকে ভেক্টরস্ (Vectors) বলা হয়। যখন কোন অ্যারে (Array) এর মধ্যে w এর নিম্নঘাত বিশিষ্ট আটটি উপাত্ত থাকে। তবে এদেরকে নিম্নরূপে যোগ বা গড় করা যায়।

যোগফল, $S = \sum_{k=1}^{8} w_k = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots\ldots\ldots + w_8$

এবং গড়, $A = \frac{S}{8} = \frac{1}{8}\left[\sum_{k=1}^{8} w_k\right]$

যখন কোন তালিকা $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots\ldots a_n$ সংখ্যক উপাত্ত থাকে এবং যদি u ভেক্টর গঠিত হয় তবে,

$u = (a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots\ldots\ldots a_n) = (a_i)$

a_i সংখ্যাটিকে ভেক্টরস্ উপাদান বলা হয়। যদি সকল a_i উপাদান শূন্য হয় তবে তাকে জিরো (Zero) ভেক্টর বলা হয়। দুটি ভেক্টর u এবং v সমান অর্থাৎ $u = v$ হবে যদি উভয় ভেক্টরের মধ্যে সমান সংখ্যক উপাদান এবং নির্দিষ্ট অবস্থানের উপাদানগুলোর মান সর্বদা সমান হয়।

উদাহরণ-৩.১। ভেক্টরস্ (3, – 4), (6, 8), (0, 0, 0), (2, 3, 4) বর্ণনা দাও।

বর্ণনা ঃ এখানে প্রথম দুটি ভেক্টরস্ দুটি করে উপাদান নিয়ে গঠিত"। অপরদিকে বাকি দুটি ভেক্টরস্ তিনটি উপাদান নিয়ে গঠিত। তৃতীয় ভেক্টরটি শূন্য (Zero) ভেক্টর যা তিনটি উপাদান নিয়ে গঠিত।

ভেক্টরের উদাহরণ ঃ

(i) রো ভেক্টর (Row Vector) ঃ যখন ভেক্টরস্ এর উপাদানগুলো আনুভূমিক সারিতে সাজান থাকে, তাকে রো ভেক্টর (Row Vector) বলা হয়।

$u = (a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots\ldots a_n)$ একটি রো ভেক্টর।

(ii) কলাম ভেক্টর (Column Vector) ঃ যখন ভেক্টরস্ এর উপাদানগুলো উল্লম্ব সারিতে সাজান থাকে তাকে কলাম ভেক্টর (Column Vector) বলা হয়।

$v = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$ একটি কলাম ভেক্টর।

ভেক্টরের যোগ, বিয়োগ ও গুণ ঃ

(i) ভেক্টরের যোগ (Addition of Vectors) ঃ যে কোন দুটি একই সংখ্যক উপাদানবিশিষ্ট ভেক্টর u এবং v কল্পনা করা যাক,

ধরি $u = (a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots\ldots a_n)$

এবং $v = (b_1, b_2 \ldots\ldots\ldots\ldots b_n)$

সুতরাং $u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots\ldots a_n + b_n)$

(ii) ভেক্টরের বিয়োগ (Subtraction of Vectors) ঃ উপরিউক্ত ভেক্টর u এবং v এর ক্ষেত্রে

$u - v = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots\ldots a_n - b_n)$

(iii) স্কেলার গুণ (Scalar Product) ঃ উপরিউক্ত v ভেক্টরকে স্কেলার k দ্বারা গুণ করলে পাওয়া যায়-

$ku = (ka_1, ka_2, \ldots\ldots\ldots ka_n)$

অনুরূপভাবে,

$-u = -1\ (u) = [-1\ (a_1), -1\ (a_2), \ldots\ldots -1\ (a_n)]$

ভেক্টর-u কে u এর নেগেটিভ ভেক্টর বলা হয়।

(iv) ভেক্টর গুণ (Vector Product) ঃ উপরোক্ত ভেক্টর u এবং v এর গুণফল

$u.v = (a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots a_n).(b_1, b_2, \ldots\ldots\ldots b_n)$

$= a_1.b_1 + a_2b_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_nb_n$

(v) ভেক্টর দৈর্ঘ্য (Norm or Length of the Vector) ঃ উপরিউক্ত u ভেক্টর-এর দৈর্ঘ্য

$\| u \| = \sqrt{u.J} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots\ldots\ldots a_n^2}$

বিঃদ্রঃ $\| u \| = 0$ হয়ে যদি একমাত্র $u = 0$ হয়।

অন্যথায় $\| u \| > 0$

উদাহরণ-৩.২। দুটি ভেক্টর u = (2, 3, – 4) এবং V = (1, –5, 8) দেয়া আছে। নির্ণয় কর।

(i) u + u, (ii) 5u (iii) – v

(iv) 2u – 3 v (v) u. v (vi) $\| u \|$

সমাধান ঃ এখানে দেয়া আছে,

u = (2, 3, – 4) এবং v = (1, – 5, 8)

(i) $u + v = (2 + 1, 3 - 5, -4 + 8)$

$= (3, -2, 4)$

(ii) $5v = 5\ (2, 3, -4)$

$= (5.2, 5.3, 5(-4)$

$= (10, 15, -20)$

(iii) $-v = -1\ (1, -5, 8)$

$= (-1, 5, -8)$

(iv) $2u - 3v = 2(2, 3, -4) - 3\ (1, -5, 8)$

$= (4, 6, -8) + (-3, 15, -24)$

$= (4 - 3, 6 + 15, -8 + (-24))$

$= (1, 21, -32)$

(v) $u.v = (2, 3, -4)\ (1, -5, 8)$

$= 2.1 + 3.(-5) + (-4).8$

$= 2 - 15 - 32$

$= -45.$

(vi) $\| u \| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-4)^2}$

$= \sqrt{4 + 9 + 16}$

$= \sqrt{29}.$

উদাহরণ-৩.৩ । দুটি কলাম ভেক্টর $u = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ এবং $v = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ দেয়া আছে। নির্ণয় কর।

(i) $2u - 3v$; (ii) u.v. (iii) $\| u \|$

সমাধান দেয়া আছে,

$$u = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \text{ এবং } v = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

সুতরাং,

$$\text{(i) } 2u - 3v = 2\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10-9 \\ 6+3 \\ -8+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{(ii) } u.v = 5 \times 3 + 3(-1) + (-4)(-2) = 15 - 3 + 8 = 20$$

$$\text{(iii) } \| u \| = \sqrt{5^2 + 3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25 + 9 + 16} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

(খ) ম্যাট্রিক্স (Matrices) ঃ ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্সের ক্ষেত্রে বিভিন্ন সেট-এর উপদ্যানগুলোর মধ্যে অন্বয় তুলে ধরার জন্য ম্যাট্রিক্স ব্যবহার করা হয়। অধুনা ম্যাট্রিক্স কমিউনিকেশন নেটওয়ার্ক (Communication Network) এবং যোগাযোগ ব্যবস্থার (Transportation system) মডেল হিসেবে ব্যবহৃত হয়।

এসব বর্ণনার ক্ষেত্রে যে যে উপাত্ত ব্যবহার করা হয় এদেরকে সারি (Row) এবং স্তম্ভ (Column) এ সাজালে একটি আয়তাকার বিন্যাস (Rectangular Array) পাওয়া যায়। এ আয়তাকার বিন্যাসকেই ম্যাট্রিক্স (Matrices) বলা হয়। ম্যাট্রিক্স বোঝাতে দুটি তৃতীয় বন্ধনী [ ] বা দুটি প্রথম বন্ধনী ( ) ব্যবহার করা হয়। কখনও কখনও ' ।। ।।' প্রতীকের সাহায্যেও ম্যাট্রিক্স বোঝান হয়।

aij সমূহ যে কোন রাশি হলে-

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ am_1 & am_2 & am_3 & \cdots & am_n \end{bmatrix}$$ কে m × n ম্যাট্রিক্স বলা হয়

aij কে ম্যাট্রিক্সের উপাদান বলা হয়। aij উপাদানের অবস্থান i-তম সারি এবং j-তম কলাম

$(a_{11}, a_{12}, a_{13} \ldots\ldots\ldots a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, a_{23} \ldots\ldots a_{2n}) \ldots\ldots\ldots (am_1, am_2, am_3 \ldots\ldots\ldots am_n)$ ম্যাট্রিক্সের সারিসমূহ।

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ am_1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ am_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$ এগুলো ম্যাট্রিক্সের কলাম।

ম্যাট্রিক্সের সারির সংখ্যা m এবং কলামের সংখ্যা n হলে m × n কে ম্যাট্রিক্সের ক্রম বা পর্যায় (Order) বলে।

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ এটি একটি ম্যাট্রিক্স

এই ম্যাট্রিক্সে 2টি সারি এবং 3টি কলাম আছে। সুতরাং এর পর্যায় 2 × 3।

মনে করি, $x' = a_1x + b_1y$ এবং $y' = a_2x + b_2y$ দুইটি প্রদত্ত সমীকরণ, যেখানে a_1, b_1, a_2, b_2 ধ্রুবক (Constrant) এ দুইটি সমীকরণকে রূপান্তর করে আমরা এ ধরনের অসংখ্য সমীকরণ গঠন করতে পারি। এখানে একটি বাস্তব উদাহরণ দেয়া হল ঃ

ধরি, A' তার দৈনিক কাজে 12 টাকার মালামাল ব্যবহার করলে তাকে দৈনিক 15 টাকা মজুরি দেয়া হয়। আবার B তার 14 টাকা মজুরি দেয়া হয়। এভাবে A এবং B যথাক্রমে x সংখ্যক ও y সংখ্যক দিন কাজ করল। যদি তারা দুজনে একত্রে x' টাকা মজুরি পায় এবং সর্বমোট y' টাকার মালামাল ব্যবহার করা হয়, তবে আমরা পাই-

$$\left.\begin{aligned} x' &= 15x + 14y \\ y' &= 12x + 10y \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

উপরের দুটি সমীকরণ থেকে আমরা বলতে পারি,

যদি A ও B যথাক্রমে 7 দিন ও 5 দিন কাজ করে। তাহলে দুই জনের মোট মজুরি অর্থাৎ $x' = 175$ এবং মালামালের জন্য মোট ব্যয়, অর্থাৎ $y' = 134$।

প্রদত্ত সমীকরণের ধ্রুবকগুলোকে অর্থাৎ সংখ্যাগুলোকে সারি (Row) এবং স্তম্ভ (Column) এ সাজালে একটি আয়তাকার বিন্যাস (Rectangular Array) পাওয়া যায়। এ আয়তাকার বিন্যাসকে বলা হয় ম্যাট্রিক্স (Matrices)।

প্রদত্ত সমীকরণ (i) থেকে ম্যাট্রিক্স হল-

$$\begin{bmatrix} 15 & 14 \\ 12 & 10 \end{bmatrix}$$

নিচের কয়েকটি ম্যাট্রিক্স লেখা হল ঃ

(i) $\left|\begin{matrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 7 \end{matrix}\right|$, যা 2×3 ম্যাট্রিক্স।

(ii) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 10 \end{bmatrix}$, যা 3×3 ম্যাট্রিক্স।

(iii) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$, যা 3×2 ম্যাট্রিক্স।

সাধারণভাবে, একটি ম্যাট্রিক্সের সারি ও কলাম যথাক্রমে m ও n হলে, ঐ ম্যাট্রিক্স কে $m \times n$ মাত্রার (Order) ম্যাট্রিক্স বলা হয়। $m = n$ হলে, ম্যাট্রিক্সকে বর্গ ম্যাট্রিক্স এবং $m \neq n$ হলে, ম্যাট্রিক্সকে আয়তাকার (Rectangular) ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ (Types of Matrices) ঃ

(i) রো ম্যাট্রিক্স (Row Matrices) ঃ একটি মাত্র সারিবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সকে রো ম্যাট্রিক্স (Row Matrices) বা রো ভেক্টর (Row Vector) বলে।

$A = [a_{11}, \quad a_{12} \quad a_{13} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n}]$ একটি রো ম্যাট্রিক্স। এর সারির সংখ্যা 1 কিন্তু কলামের সংখ্যা n। সুতরাং এটা $(1 \times n)$ পর্যায়ের ম্যাট্রিক্স।

(ii) কলাম ম্যাট্রিক্স (Column Matrices) ঃ একটি মাত্র কলামবিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সকে কলাম ম্যাট্রিক্স (Column Matrices) বলা হয়।

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$ একটি কলাম ম্যাট্রিক্স 1 এর কলাম সংখ্যা 1 কিন্তু সারির সংখ্যা m।

সুতরাং ম্যাট্রিক্সটি $(m \times 1)$ পর্যায়ের ম্যাট্রিক্স।

(iii) বর্গ ম্যাট্রিক্স (Square Matrices) ঃ যে ম্যাট্রিক্সের সারি এবং কলামের সংখ্যা সমান তাকে বর্গ ম্যাট্রিক্স (Square Matrices) বলা হয়।

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n_1} & a_{n_2} \ldots\ldots\ldots a_{nn} \end{bmatrix}$$

A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স কেননা এর সারি এবং কলামের সংখ্যা n। এরূপ n সংখ্যক সারি এবং n সংখ্যক কলাম বিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স এর পর্যায় (Order) n।

বর্গ ম্যাট্রিক্সের a_{11}, a_{22}, ... a_{nn}, উপাদানগুলোকে কর্ণস্থিত উপাদান (Diagonal Element) বলা হয়। কর্ণস্থিত উপাদানসমূহের সমষ্টিকে ট্রেস (Trace) বলে।

(iv) কর্ণ ম্যাট্রিক্স (Diagonal Matrices) ঃ যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের $a_{ij} = 0$, যখন $i \neq j$, তখন ম্যাট্রিক্সটিকে কর্ণ ম্যাট্রিক্স (Diagonal Matrices) বলা হয়।

$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$ একটি ডায়াগোনাল ম্যাট্রিক্স।

(v) স্কেলার ম্যাট্রিক্স (Scalar Matrices) ঃ যে ডায়াগোনাল ম্যাট্রিক্সের অশূন্য উপাদানগুলো সমান, তাকে স্কেলার ম্যাট্রিক্স (Scalar Matrices) বলা হয়।

$D = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ একটি স্কেলার ম্যাট্রিক্স।

(vi) অভেদ ম্যাট্রিক্স (Identity Matrices) ঃ স্কেলার ম্যাট্রিক্সের অশূন্য উপাদানগুলো একক হলে ম্যাট্রিক্সকে অভেদ ম্যাট্রিক্স (Identity Matrices) বা একক (Unit) ম্যাট্রিক্স বলা হয়। n পর্যায়ের ইউনিট ম্যাট্রিক্সকে 1_n দিয়ে নির্দেশ করা হয়। যেমন-

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(vii) শূন্য ম্যাট্রিক্স (Zero Matrices) ঃ শূন্য ম্যাট্রিক্সের সারি এবং কলামের প্রতিটি উপাদান শূন্য।

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স

(ix) ট্রান্সপোজড ম্যাট্রিক্স (Transpose Matrices) ঃ যদি $m \times n$ কোন ম্যাট্রিক্স A হয় এবং যদি সে ম্যাট্রিক্স এর প্রথম রো প্রথম কলামের স্থানে, দ্বিতীয় রো দ্বিতীয় কলামের স্থানে লেখা হয়, এভাবে অন্যান্য রো-ও লেখা হয় তবে সে ম্যাট্রিক্সকে A এর ট্রান্সপোজড ম্যাট্রিক্স বলে। A এর ট্রান্সপোজড ম্যাট্রিক্সকে A^T দ্বারা সূচিত করা হয়। A^T ম্যাট্রিক্স $n \times m$ হবে।

উদাহরণ ঃ

একটি ম্যাট্রিক্স $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

A এর ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্স $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(x) ক্ষমতা বা ধাপ ম্যাট্রিক্স (Echelon Matrices) ঃ ম্যাট্রিক্স A কে ইচিলন ম্যাট্রিক্স (ক্ষমতা ম্যাট্রিক্স) বা ইচিলন ফরম (Echelon Form) বলা হবে যদি ম্যাট্রিক্স A নিচের দুটি শর্ত মেনে চলে-

১। সকল শূন্য সারি (Row) বা যদি কোন শূন্য সারি থাকে তবে ম্যাট্রিক্সের নিচের সারি থেকে রাখতে শুরু করতে হবে।

২। যদি পরপর কোন সারির সকল এন্ট্রি 0 না হয়, তবে পূর্ববর্তী সারির যে এন্ট্রি 1 আছে, তা দ্বিতীয় বা তৎপরবর্তী রো এর ডান দিকের প্রথম এন্ট্রি 1 হবে।

(xi) রো কেনোনিক্যাল ফর্ম ঃ কোন ইচিলন ম্যাট্রিক্স যদি নিচের দু'টি শর্ত মেনে চলে তবে সে ম্যাট্রিক্সকে রো কেননিক্যাল ফর্ম বলে।

(i) প্রত্যেক মুখ্য (Leading) অশূন্য (Nonzero) এন্ট্রি যদি 1 হয়।

(ii) প্রত্যেক অশূন্য (Leading Zero) এন্ট্রি একমাত্র ইহার অশূন্য কলামে বসবে।

যে কোন নাম্বারের সারি বা কালামের শূন্য ম্যাট্রিক্স (Zero matrix) 0 রো কেনোনিক্যাল (Row canonical form) ফর্ম এর উৎকৃষ্ট উদাহরণ। এছাড়া n-Square (বর্গ) Identity (অভেদ) ম্যাট্রিক্স In ও রো কেনোনিকেল ফর্ম-এর আরো একটি উদাহরণ।

(xii) ট্রাইএনগুলার ফর্ম (Triangular form) ঃ একটি Square matrices (বর্গ ম্যাট্রিক্স) A কে ট্রাইএনগুলার ফর্ম (Triangular form) বলা হবে যদি ইহার কর্ণ এন্ট্রিগুলো (Diagonal entries) $a_{11}, a_{22} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{nn}$ অশূন্য এন্ট্রি হয়।

উদাহরণ ঃ

$$\underset{\text{(ক)}}{\begin{bmatrix} \textcircled{2} & 3 & 2 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{6} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \quad \underset{\text{(খ)}}{\begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \quad \underset{\text{(গ)}}{\begin{bmatrix} 0 & \textcircled{1} & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 2 \end{bmatrix}} \quad \underset{\text{(ঘ)}}{\begin{bmatrix} \textcircled{2} & 4 & 7 \\ 0 & \textcircled{5} & 8 \\ 0 & 0 & \textcircled{6} \end{bmatrix}}$$

তৃতীয় ম্যাট্রিক্স (গ) রো কেনোনিকেল ফর্ম (Row canonical form)। দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্স (খ) রো কেনোনিকেল ফর্ম না। কারণ ইহার তৃতীয় কলাম অশূন্য এন্ট্রি নাই (Non zero entry)। প্রথম ম্যাট্রিক্স (ক) রো কেনোনিকেল ফর্ম না, কারণ ইহার অশূন্য এন্ট্রি 1 নাই। শেষের ম্যাট্রিক্স (ঘ) ট্রাইএনগুলার ফর্ম (Triangular form)।

ম্যাট্রিক্সের যোগ এবং বিয়োগ (Addition and Subtraction of Matrices) ঃ $A = [a_{ij}]$ এবং $B = [b_{ij}]$ দুটি $m \times n$ ম্যাট্রিক্স। $C = [C_{ij}]$ এমন একটি $m \times n$ ম্যাট্রিক্স যার প্রতিটি উপাদান A এবং B এর সংশ্লিষ্ট উপাদান দুটির যোগফল। এক্ষেত্রে C-কে A এবং B ম্যাট্রিক্স দুটির যোগফল বলা হয়। আর যদি C এর প্রতিটি উপাদান A এবং B-এর সংশ্লিষ্ট উপাদান দুটির বিয়োগফল হয় তবে C কে A এবং B ম্যাট্রিক্স দুটির বিয়োগফল ম্যাট্রিক্স বলে।

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ এবং } B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+3 & -2+0 & 2+2 \\ 4-7 & 5+1 & 6+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -3 & 6 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\text{এবং } A - B = \begin{bmatrix} 1-3 & -2-0 & 2-2 \\ 4+7 & 5-1 & 6-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 11 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ হয়, তবে

$$A + A + A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\therefore 3A = \begin{bmatrix} 3.1 & 3.2 \\ 3.2 & 3.-3 \end{bmatrix}$$

অতএব, কোন স্কেলার K এর জন্য-

$$KA = \begin{bmatrix} K.1 & K.2 \\ K.2 & K.-3 \end{bmatrix}$$

অর্থাৎ, ম্যাট্রিক্স A এর প্রতিটি উপাদান K দিয়ে গুণ করলে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তা KA দ্বারা নির্দেশিত হয়। দুটি ম্যাট্রিক্সের পর্যায় ভিন্ন হলে ম্যাট্রিক্স দুটি যোগ অথবা বিয়োগ করা যায় না। পর্যায় (Order) একই হলে ম্যাট্রিক্স যোগ অথবা বিয়োগ করা যায়। তখন ম্যাট্রিক্স দুটিকে যোগ অথবা বিয়োগের জন্য যোগ্য (Confirmable for Addition and Subtraction) বলা হয়।

যদি A, B এবং C ম্যাট্রিক্সগুলোকে যোগের জন্য যোগ্য ধরা হয় তবে,

(i) $A + B = B + A$

(ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(iii) $K(A + B) = KA + KB = (A + B)K$, যেখানে K একটি স্কেলার।

ম্যাট্রিক্সের গুণন (Multiplication of Matrices) : সারি ম্যাট্রিক্স $A = [a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \ldots\ldots\ \ldots\ a_{1n}]$ এবং

কলাম ম্যাট্রিক্স, $B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n1} \end{bmatrix}$ - এর গুণফল বিবেচনা করা যাক।

যদি প্রথম ম্যাট্রিক্সের কলামের সংখ্যা দ্বিতীয়টির সারির সংখ্যার সমান হয় তবে গুণন সম্ভব হবে।

$$AB = [a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \ldots\ldots\ \ldots\ a_{1n}] \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n1} \end{bmatrix}$$

$$= [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}b_{n1}] = C$$

A ম্যাট্রিক্সের পর্যায় $1 \times n$ এবং B ম্যাট্রিক্সের পর্যায় $n \times 1$ এবং ম্যাট্রিক্স দুটির গুণফল C এর পর্যায়-

$(1 \times n).(n \times 1) = 1 \times 1$;

এরূপ গুণন প্রক্রিয়াই প্রথম ম্যাট্রিক্সের সারির প্রতিটি উপাদানকে দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্সের কলামের সংশ্লিষ্ট উপাদান দিয়ে গুণ করে গুণফলগুলো যোগ করা হয়েছে।

ধরি, A একটি 2×3 ম্যাট্রিক্স এবং B একটি 3×2 ম্যাট্রিক্স। তাহলে A এবং B- এর গুণফল $(2 \times 3).(3 \times 2) = (2 \times 2)$ ম্যাট্রিক্স হবে।

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \end{bmatrix} \text{ এবং } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$$

গুণ পদ্ধতির এই প্রক্রিয়াই প্রথম ম্যাট্রিক্সের কলামের সংখ্যা দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্সের সারির সংখ্যা সমান হতে হবে। তখন ম্যাট্রিক্স দুটিকে গুণনের জন্য যোগ্য অথবা গুণনযোগ্য (Confirmable for multiplication) বলা হয়। যদি A, B, C ম্যাট্রিক্সগুলো যোগ এবং গুণনের জন্য যোগ্য হয়। তবে-

(i) $A(B + C) = AB + AC$.

(ii) $(A + B)C = AC + BC$.

(iii) $A(BC) = (AB)C$.

কিন্তু

(i) $AB \neq BA$, সাধারণত

(ii) $AB = 0$ হলে, $A = 0$ অথবা, $B = 0$ নাও হতে পারে।

(iii) $AB = AC$ হলে, $B = C$ নাও হতে পারে।

উদাহরণ-৩.৪। $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & 6 & -4\end{bmatrix}$ এবং $B=\begin{bmatrix}6 & 0 & -4\\ 5 & 3 & -1\end{bmatrix}$ হলে $A+B$ নির্ণয় কর।

সমাধান $A+B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & 6 & -4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & 0 & -4\\ 5 & 3 & -1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2+6 & -1+0 & 3+(-4)\\ 3+5 & 6+3 & -4+(-1)\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}8 & -1 & -1\\ 8 & 9 & -5\end{bmatrix}$

মন্তব্য ঃ A ও B এর উভয়ে 2×3 মাত্রার ম্যাট্রিক্স।

সুতরাং, $A+B$ হলে 2×3 ম্যাট্রিক্স এবং এর উপাদান সংখ্যা 2×3

উদাহরণ-৩.৫। $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & -2 & -1\end{bmatrix}$ এবং $B=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 4 & 0\\ 2 & 6\end{bmatrix}$ হলে, AB নির্ণয় কর। প্রমাণ কর যে, $AB\neq BA$ [বাকাশিবো-০৯R]

সমাধান এখানে দেয়া আছে, $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & -2 & -1\end{bmatrix}$ এবং $B=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 4 & 0\\ 2 & 6\end{bmatrix}$

$\therefore AB=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & -2 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 4 & 0\\ 2 & 6\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-1+0-4 & 3+0-12\\ -3-8-2 & 9+0-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & -9\\ -13 & 3\end{bmatrix}$

আবার $BA=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 4 & 0\\ 2 & 6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & -2 & -1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-1+9 & 0-6 & 2-3\\ 4+0 & 0+0 & -8+0\\ 2+18 & 0-12 & -4-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & -6 & -1\\ 4 & 0 & -8\\ 20 & -12 & -10\end{bmatrix}$

$\therefore AB\neq BA$

মন্তব্য ঃ ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে গুণনের বিনিময় বিধি প্রযোজ্য নয়।

উদাহরণ-৩.৬। $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 5 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 5\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}$ এবং $C=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}$ হলে,

(i) $A+B$, (ii) $A-C$, (iii) $-2A$ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, (iv) $A+(B-C)=(A+B)-C$।

সমাধান

(i) $A+B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 5 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 5\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}$

$A+B=\begin{bmatrix}1+3 & 2-1 & -3+2\\ 5+4 & 0+2 & 2+5\\ 1+2 & -1+0 & 1+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 1 & -1\\ 9 & 2 & 7\\ 3 & -1 & 4\end{bmatrix}$

(ii) $A-C=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 5 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$

$A-C=\begin{bmatrix}1-4 & 2-1 & -3-2\\ 5-0 & 0-3 & 2-2\\ 1-1 & -1+2 & 1-3\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-3 & 1 & -5\\ 5 & -3 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}$

(iii) $-2A = -2\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\5 & 0 & 2\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

$-2A = \begin{bmatrix}-2 & -4 & 6\\-10 & 0 & -4\\-2 & 2 & -2\end{bmatrix}$

(iv) $B - C = \begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\4 & 2 & 5\\2 & 0 & 3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\0 & 3 & 2\\1 & -2 & 3\end{bmatrix}$

$B - C = \begin{bmatrix}3-4 & -1-1 & 2-2\\4-0 & 2-3 & 5-2\\2-1 & 0+2 & 3-3\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\4 & -1 & 3\\1 & 2 & 0\end{bmatrix}$

অতএব, $A + (B - C) = \begin{bmatrix}1-1 & 2-2 & -3+0\\5+4 & 0-1 & 2+3\\1+1 & -1+2 & 1+0\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}0 & 0 & -3\\9 & -1 & 5\\2 & 1 & 1\end{bmatrix}$

(i) থেকে, $(A + B) - C = \begin{bmatrix}4-4 & 1-1 & -1-2\\9-0 & 2-3 & 7-2\\3-1 & -1+2 & 4-3\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}0 & 0 & -3\\9 & -1 & 5\\2 & 1 & 1\end{bmatrix}$

অতএব, $A + (B - C) = (A + B) - C$.

উদাহরণ-৩.৭। $A = \begin{bmatrix}5 & -7 & 1\\-1 & 2 & -3\\4 & -2 & -16\end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\2 & 3 & 2\\1 & 5 & 1\end{bmatrix}$ দেখাও যে, $AB \neq BA$

সমাধান

$AB = \begin{bmatrix}15-14+1 & 10-21+5 & 5-14+1\\-3+4-3 & -2+6-15 & -1+4-3\\12-4-16 & 8-6-80 & 4-4-16\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}2 & -6 & -8\\-2 & -11 & 0\\-8 & -78 & -16\end{bmatrix}$

$BA = \begin{bmatrix}15-2+4 & -21+4-2 & 3-6-16\\10-3+8 & -14+6-4 & 1-9-32\\5-5+4 & -7+10-2 & 1-15-16\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}17 & -19 & -19\\15 & -12 & -39\\4 & 1 & -30\end{bmatrix}$

অতএব, $AB \neq BA$

উদাহরণ-৩.৮। যদি $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix}$ **হয় তবে** A^2 **এর মান নির্ণয় কর এবং দেখাও যে,** $A^2+3A-10I=0$; **যেখানে** $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ [বাকাশিবো-২০০৪]

সমাধান

$$A^2=A.A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1+6 & 2-8\\ 3-12 & 6+16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -6\\ -9 & 22\end{bmatrix}$$

অতএব, $A^2+3A-10I=\begin{bmatrix}7 & -6\\ -9 & 22\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix}-10\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}7 & -6\\ -9 & 22\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 6\\ 9 & -12\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 10\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}7+3-10 & -6+6+0\\ -9+9-0 & 22-12-10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0$$ **প্রমাণিত**

উদাহরণ-৩.৯। যদি $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}$ **হয়, তবে** A^2 **এবং** A^3 **এর মান নির্ণয় কর এবং দেখাও যে,** $A^2+2A-11I=0$, **যেখানে,** $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

সমাধান দেয়া আছে, $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}$ এবং $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

সুতরাং $A^2=A.A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1.1+2.4 & 1.2+2.(-3)\\ 4.1+(-3).4 & 4.2+(-3)(-3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & -4\\ -9 & 17\end{bmatrix}$$

$$A^3=A.A^2=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9 & -4\\ -8 & 17\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.9+2(-8) & 1.(-4)+2.17\\ 4.9+(-3)(-8) & 4.(-4)+(-3).17\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-7 & 30\\ 10 & -67\end{bmatrix}$$

সুতরাং

$$A^2+2A-11I=\begin{bmatrix}9 & -4\\ -8 & 17\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{bmatrix}-11\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}9 & -4\\ -8 & 17\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 4\\ 8 & -6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9+2-11 & -4+4-0\\ -8+8-0 & 17-6-11\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0$$ **(প্রমাণিত)**

উদাহরণ-৩.১০। যদি $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 4 & 5\end{bmatrix}$ **এবং** $B=\begin{bmatrix}4 & 6 & 8\\ 1 & -3 & -7\end{bmatrix}$ **হয়, তবে নির্ণয় কর**

(i) $A+B$ (ii) $2A-3B$ (iii) $3A$

সমাধান এখানে, দেয়া আছে, $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 4 & 5\end{bmatrix}$ এবং

$B=\begin{bmatrix}4 & 6 & 8\\ 1 & -3 & -7\end{bmatrix}$

সুতরাং (i) $A+B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 4 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 6 & 8\\ 1 & -3 & -7\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1+4 & -2+6 & 3+8\\ 0+1 & 4+(-3) & 5+(-7)\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}5 & 4 & 11\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

(ii) $2A - 3B = 2\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\0 & 4 & 5\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}4 & 6 & 8\\1 & -3 & -7\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}2 & -4 & 6\\0 & 8 & 10\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-12 & -18 & -24\\-3 & 9 & 21\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}2-12 & -4-18 & 6-24\\0-3 & 8+9 & 10+21\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}-10 & -22 & -18\\-3 & 17 & 31\end{bmatrix}$

(iii) $3A = 3\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\0 & 4 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -6 & 9\\0 & 12 & 15\end{bmatrix}$

ম্যাট্রিকস এবং ম্যাট্রিকস যোগের এবং স্কেলার গুণনের থেকে নিম্নরূপ অনুসিদ্ধান্ত সমূহ অনুসরণ করা হয় ঃ

(i) $(A + B) + C = A + (B + C)$

(ii) $A + 0 = 0 + A$

(iii) $A + (-A) = (-A) + 0 = A$

(iv) $A + B = B + A$

(v) $K(A + B) = KA + KB$

(vi) $(K + K')A = KA + K'A$.

(vii) $(KK')A = K(K'A)$

(viii) $IA = A$

উদাহরণ-৩.১১। যদি $A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 4\\2 & 1 & 1\\3 & 1 & 0\\0 & 2 & 2\end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix}2 & 4\\1 & 1\\3 & 0\end{bmatrix}$ হয় তবে AB এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান এখানে দেয়া আছে, $A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 4\\2 & 1 & 1\\3 & 1 & 0\\0 & 2 & 2\end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix}2 & 4\\1 & 1\\3 & 0\end{bmatrix}$

যেহেতু A হল 4×3 ম্যাট্রিক্স এবং B হলো 3×2, এদের গুণফল নির্ণায়ন যোগ্য (Defined) এবং ইহা 4×2 ম্যাট্রিক্স হবে।

$$\therefore AB = \begin{bmatrix}1.2 + 0.1 + 4.3 & 1.4 + 0.1 + 4.0\\2.2 + 1.1 + 1.3 & 2.4 + 1.1 + 1.0\\3.2 + 1.1 + 0.3 & 3.4 + 1.1 + 0.0\\0.2 + 2.1 + 2.3 & 0.4 + 2.1 + 2.0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}14 & 4\\8 & 9\\7 & 13\\8 & 2\end{bmatrix}$$

উদাহরণ-৩.১২। যদি $A = \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 1\end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$ হয়, তবে কি $AB = BA$?

সমাধান এখানে দেয়া আছে,

$A = \begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 1\end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$

সুতরাং $AB = \begin{bmatrix}1.2 + 1.1 & 1.1 + 1.1.\\2.2 + 1.1 & 2.1 + 1.1\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}3 & 2\\5 & 3\end{bmatrix}$

এবং $BA = \begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2.1 + 1.2 & 2.1 + 1.1\\2.1 + 1.1 & 1.1 + 1.1\end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix}4 & 3\\3 & 2\end{bmatrix}$

এবং, $AB \neq BA$

৩.৩ ম্যাট্রিক্স গণিতের এলগরিদম (Algorithm of Matrices Arithmatic) ঃ

প্রাসঙ্গিক কারণেই বলতে হয় যে, সব ধরনের কাজই সুষ্ঠুভাবে সম্পন্ন হয় কাজের ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশের যুক্তিযুক্ত পর্যায় ক্রমিক সম্পাদনের ফলে। সমস্যা সমাধানের এই যৌক্তিক ক্রমানুসারি পদ্ধতিকে বলা হয় সমস্যা সমাধানের এলগরিদম। কম্পিউটার দিয়ে সমস্যা সমাধানের জন্য যে এলগরিদম নির্মাণ করা হয় তাকে কম্পিউটারের ভাষায় অনুবাদ করতে হয়। এই অনুবাদকৃত কম্পিউটারের ভাষাকেই এলগরিদম বলে। ম্যাট্রিক্স গণিতের ক্ষেত্রে সমস্যার সমাধান করার জন্য অর্থাৎ দু'টি ম্যাট্রিক্সের মধ্যে গুণন বা যোগ করার জন্য কম্পিউটারের মাধ্যমে অনুবাদকৃত ভাষাকেই ম্যাট্রিক্স গণিতের এলগরিদম (Algorithm of Matrices Arithmatic) বলা হয়। নিম্নে ম্যাট্রিক্স গণিতের এলগরিদম তুলে ধরা হল।

১। ম্যাট্রিক্স যোগের জন্য এলগরিদম (Algorithm for Matrices Addition) ঃ

এলগরিদম 1 ঃ ম্যাট্রিক্স যোগ (i, j, Sum, q, A, B)

ধাপ 1 ঃ i এর মান 1 থেকে m পর্যন্ত ঘোষণা করা (For loop)।

ধাপ 2 ঃ j এর মান 1 থেকে n পর্যন্ত ঘোষণা করা (For loop)।

ধাপ 3 ঃ Sum = 0

q এর মান 1 থেকে k পর্যন্ত ঘোষণা করা (For loop)।

ধাপ 4 ঃ Sum = Sum + aiq + bqj

ধাপ 5 ঃ For লুপ i শেষ

For লুপ j শেষ

ধাপ 6 ঃ সমাপ্ত।

Algorithm 1 : Matrices Addition

Procedure : Matrices Addition (A, B : Matrices)

For i : = 1 to m

begin for j : = 1 to n

Sum = 0

forq = 1 to k

Sum = Sum + a_{iq} + b_{qj}

end for i

end for j

২। ম্যাট্রিক্স গুণনের এলগরিদম (Algorithm for Matrices Multiplication) ঃ [বাকাশিবো-২০০৩]

এলগরিদম-২ ঃ ম্যাট্রিক্স গুণন (i, j, s, q, a, b, c ভেরিয়াবেল গ্রহণ)

ধাপ-১ ঃ i এর মান 1 থেকে m পর্যন্ত ঘোষণা করা (For loop ব্যবহার করা)

ধাপ-২ ঃ s এর মান 1 থেকে n পর্যন্ত ঘোষণা করা (For loop ব্যবহার করা)

ধাপ-৩ ঃ Cij = 0

q এর মান 1 থেকে k পর্যন্ত ঘোষণা করা (For loop ব্যবহার করা)

ধাপ-৪ ঃ C_{ij} + C_{ij} + a_{iq} + b_{iq}

ধাপ-৫ ঃ For লুপ i শেষ

For লুপ

ধাপ-৬ ঃ সমাপ্ত

৩.৩ ম্যাট্রিক্স গণিতের এলগরিদম (Algorithm of Matrices Arithmatic) ঃ

প্রাসঙ্গিক কারণেই বলতে হয় যে, সব ধরনের কাজই সুষ্ঠুভাবে সম্পন্ন হয় কাজের ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশের যুক্তিযুক্ত পর্যায় ক্রমিক সম্পাদনের ফলে। সমস্যা সমাধানের এই যৌক্তিক ক্রমানুসারি পদ্ধতিকে বলা হয় সমস্যা সমাধানের এলগরিদম। কম্পিউটার দিয়ে সমস্যা সমাধানের জন্য যে এলগরিদম নির্মাণ করা হয় তাকে কম্পিউটারের ভাষায় অনুবাদ করতে হয়। এই অনুবাদকৃত কম্পিউটারের ভাষাকেই এলগরিদম বলে। ম্যাট্রিক্স গণিতের ক্ষেত্রে সমস্যার সমাধান করার জন্য অর্থাৎ দু'টি ম্যাট্রিক্সের মধ্যে গুণন বা যোগ করার জন্য কম্পিউটারের মাধ্যমে অনুবাদকৃত ভাষাকেই ম্যাট্রিক্স গণিতের এলগরিদম (Algorithm of Matrices Arithmatic) বলা হয়। নিম্নে ম্যাট্রিক্স গণিতের এলগরিদম তুলে ধরা হল।

১। ম্যাট্রিক্স যোগের জন্য এলগরিদম (Algorithm for Matrices Addition) ঃ

এলগরিদম 1 ঃ ম্যাট্রিক্স যোগ (i, j, Sum, q, A, B)

ধাপ 1 ঃ i এর মান 1 থেকে m পর্যন্ত ঘোষণা করা (For loop)।

ধাপ 2 ঃ j এর মান 1 থেকে n পর্যন্ত ঘোষণা করা (For loop)।

ধাপ 3 ঃ Sum = 0

q এর মান 1 থেকে k পর্যন্ত ঘোষণা করা (For loop)।

ধাপ 4 ঃ Sum = Sum + aiq + bqj

ধাপ 5 ঃ For লুপ i শেষ

For লুপ j শেষ

ধাপ 6 ঃ সমাপ্ত।

Algorithm 1 : Matrices Addition

Procedure : Matrices Addition (A, B : Matrices)

For i : = 1 to m

begin for j : = 1 to n

Sum = 0

forq = 1 to k

Sum = Sum + a_{iq} + b_{qj}

end for i

end for j

২। ম্যাট্রিক্স গুণনের এলগরিদম (Algorithm for Matrices Multiplication) ঃ [বাকাশিবো-২০০৩]

এলগরিদম-২ ঃ ম্যাট্রিক্স গুণন (i, j, s, q, a, b, c ভেরিয়াবেল গ্রহণ)

ধাপ-১ ঃ i এর মান 1 থেকে m পর্যন্ত ঘোষণা করা (For loop ব্যবহার করা)

ধাপ-২ ঃ s এর মান 1 থেকে n পর্যন্ত ঘোষণা করা (For loop ব্যবহার করা)

ধাপ-৩ ঃ Cij = 0

q এর মান 1 থেকে k পর্যন্ত ঘোষণা করা (For loop ব্যবহার করা)

ধাপ-৪ ঃ C_{ij} + C_{ij} + a_{iq} + b_{sj}

ধাপ-৫ ঃ For লুপ i শেষ

For লুপ

ধাপ-৬ ঃ সমাপ্ত

Algorithm 2. Matrices Maltiplication
procedure Matrices Multiplication (A, B : Matrices)
for i : 1 to m
begin
for s : 1 to n
begin
cij = 0
for q : = 1 to k
cij = cij + aiq bqj
end
end {c = [cij] b the product of A and B}

● **ম্যাট্রিক্স গুণনের প্রোগ্রাম ঃ**

```
# include < stdio.h>
# include < conio.h>
main ( )
{
int i, j, k ;
int a[3] [3] = 20 {0}, b[3] [3] = {0}, c [3] [3] = {0} ;
clrscr ( ) ;
// input data 1st matrix
printf ("Enter Data for first Matrix : \n") ;
for (i = o; i < 3; i ++ )
{
for (j = o ; j < 3; j + + )
{
scanf ("% d", & a [i] [j);
}
}
// input data 2nd matrix
printf ("Enter Data for Second Matrix" \n") ;
for (i = o ; i < 3; i + +)
{
for (j = 0 ; j < 3 ; j ++ )
{
scanf ("% d", & b [j] [j]) ;
}
}
// calculate data
for (i = o ; i < 3; i ++)
for (j = o ; j <3 ; j ++)
for (k = o ; k < 3 ; k ++)
c [i] [j] + = a [i] [k] * b [k] [j] ;
// output data
clrscr ( ) ;
printf ("Result of matrix 1 and matrix 2 : \n ") ;
for (i = o ; i < 3 ; 1 ++) {
for (j = o ; j < 3 j ++ )
printf (" % 5d", c [i] [j]] ;
}
printf ("\n") ;
{
getch ( ) ;
}
```

৩.৪ বিপরীত বা ইনভার্স ম্যাট্রিক্স (Inverse Matrices) ঃ

একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A কে বিপরীত বা ইনভার্স ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি এরূপ একটি বৈশিষ্ট্য সম্পন্ন B ম্যাট্রিক্স গঠন করে যা- $AB = BA = I$, আইডেন্টিটি ম্যাট্রিক্স (Identity matrix) এরূপ ম্যাট্রিক্স B হল একক; একে A এর ইনভার্স ম্যাট্রিক্স বলা হয় এবং A^{-1} দ্বারা নির্দেশ করা হয়। লক্ষণীয় যে, B হল A এর ইনভার্স ম্যাট্রিক্স যদি এবং কেবল যদি A, B এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স হয়।

উদাহরণ, ধরা যাক,

$$A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix} \text{ এবং } B=\begin{bmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\text{তখন } AB=\begin{bmatrix}6-5 & -10+10\\ 3-3 & -5+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\text{এবং } BA=\begin{bmatrix}6-5 & 15-15\\ -2+2 & -5+6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

অতএব A এবং B বিপরীত ম্যাট্রিক্স।

অর্থাৎ $AB = I$ যদি এবং কেবল যদি $BA = I$

উদাহরণ-৩.১৬। $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 8\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}-11 & 2 & 2\\ -4 & 0 & 1\\ 6 & -1 & -1\end{bmatrix}$

দেখাও যে উহারা ইনভার্স ম্যাট্রিক্স।

সমাধান ঃ

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-11 & 2 & 2\\ -4 & 0 & 1\\ 6 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-11+0+12 & 2+0-2 & 2+0-2\\ -22+4+18 & 4+0-3 & 4-1-3\\ -44-4+48 & 8+0-8 & 8+1-8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

অতএব A ও B হল ইনভার্স ম্যাট্রিক্স।

একটি ম্যাট্রিক্স ইনভার্স করার এলগরিদম ঃ $n \times n$ একটি ম্যাট্রিক্স A, এটাকে ইনভার্স করতে নিম্নবর্ণিত ধাপগুলো কাজ করতে হবে।

ধাপ-১ ঃ প্রথমেই $M = [A, I]$ ধরনের একটি $n \times 2n$ ম্যাট্রিক্স গঠন করতে হবে। A হবে M ম্যাট্রিক্সের বামপক্ষের অর্ধেক এবং I হবে M ম্যাট্রিক্সের ডানপক্ষের অর্ধেক।

ধাপ-২ ঃ

M কে রো এশালন (Row echelon form) ফর্মে নেয়ার পদক্ষেপ নেয়া হোক। যদি M ম্যাট্রিক্সের A অংশের রো-এর সবগুলো এন্ট্রি শূন্য হয়ে যায় তবে ইনভার্স ম্যাট্রিক্স পাওয়া যাবে না। আর যদি কোন রো এর সবগুলো এন্ট্রি শূন্য না হয়, তবে ম্যাট্রিক্সের A অংশের শূন্যগুলো ট্রায়াংগুলার আকৃতি হবে।

ধাপ-৩ ঃ এবার ম্যাট্রিক্স M কে রো কেনোনিকেল ফর্মে নেয়া হোক। এতে $M \sim [I, B]$ ফর্মে হবে। অর্থাৎ বামপক্ষে A ম্যাট্রিক্সের স্থলে I হবে।

ধাপ-৪ ঃ M ম্যাট্রিক্সের ডানপক্ষে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া গেল, সে ম্যাট্রিক্সকে B নাম দেয়া হোক। এ B ই হল $A^{-1} = B$

উদাহরণ ৩.১৭ ঃ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

A এর ইনভার্স ম্যাট্রিক্স বের কর। [বাকাশিবো-২০০৭, ২০১০, ১০R

সমাধান ঃ প্রথমে ম্যাট্রিক্স M = [A, I] গঠন করি।

$$M = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} R'_2 \sim R_2 - 2R_1 \\ R'_3 \sim R_3 - 4R_1 \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] R'_3 \sim R_3 + R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} R'_2 \sim R_2 - 2R_3 \\ R'_3 \sim -R_3 \end{matrix}$$

এটা হল Row echelan form. এবার পূর্ববর্তী ম্যাট্রিক্সে রো-কেনোনিকেল ফর্মে নিয়ে যাই।

$$M \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right] R'_2 \sim -R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right] M = [I, A^{-1}] \text{ ফর্ম}$$

এখানে, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

৩.৫ ম্যাট্রিক্সের ফর্ম পরিবর্তনের গাউশিয়ান ইলিমিনেশন (Gaussian elimination in matrix form) ঃ

গাউশিয়ান ইলিমিনেশন পদ্ধতি ঃ

জার্মান গণিতবিদ (১৭৭৭-১৮৫৫) কার্ল ফ্রেডরিক গাউস ম্যাট্রিক্সকে রো ক্যানোনিক্যাল আকারে পরিবর্তনের জন্য যে পদ্ধতি আলোচনা করা হয়েছে তা গাউশিয়ান ইলিমেনশন পদ্ধতি বলে। এ পদ্ধতিতে একটি ম্যাট্রিক্সকে প্রথমে ইচিলন আকারে এবং পরে রো ক্যানোনিক্যাল আকারে পরবর্তন করা হয়। অর্থা প্রথমে সম্মুখাভিমুখী বর্জন প্রক্রিয়ায় ইচিলন আকারে এবং পরে পশ্চাতাভিমুখী বর্জন প্রক্রিয়ায় রো ক্যানোনিক্যাল আকার পরিবর্তন করা হয়। একটি তিনচলক বিশিষ্ট সমীকরণ জোটের সমাধানের জন্য গাউশিয়ান ইলিমিনেশন পদ্ধতির প্রয়োগ ব্যাখ্যা করা হল ঃ

মনে করি, সমীকরণ জোট

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

প্রথমে $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix}$ .....(ii)

দ্বিতীয় সমীকরণ থেকে x_1 বর্জন করার জন্য প্রথম সমীকরণে $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ গুণ করে দ্বিতীয় সমীকরণের সাথে যোগ করি।

অনুরূপভাবে তৃতীয় থেকে x_1 বর্জন করার জন্য প্রথম সমীকরণের $\frac{a_{31}}{a_{11}}$ গুণ করে তৃতীয় সমীকরণের সাথে যোগ করি।

পদ্ধতিটিকে নিম্নরূপে দেখানো যায় ঃ

$$-\frac{a_{21}}{a_{11}}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix} \quad \text{.....(ii)}$$
$$\frac{a_{31}}{a_{11}}$$

যেখানে $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ ও $\frac{a_{31}}{a_{11}}$ কে বর্জনের প্রথম ধাপের পুনিয়ক বলে। এ ধাপে আমরা ধরে নিই $a_{11} \neq 0$ প্রথম সমীকরণটিকে বলে কেন্দ্রীয় সমীকরণ ও a_{11} কে বলে প্রথম কেন্দ্র। প্রথম ধাপের পরে নতুন ম্যাট্রিক্সটি হবে ঃ

$$-\frac{a_{32}'}{a_{22}'}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2' \\ 0 & a_{32}' & a_{33}' & b_3' \end{bmatrix} \quad \text{.....(iv)}$$

যেখানে– a_{22}', a_{23}' হল পরিবর্তিত উপাদান। a_{22}' হল নতুন কেন্দ্র এবং গুনিয়ক $-\frac{a_{32}'}{a_{22}'}$ অর্থাৎ দ্বিতীয় ধাপে দ্বিতীয় সারিকে $-\frac{a_{32}'}{a_{22}'}$ দ্বারা গুণ করে তৃতীয় সারির সাথে যোগ করে নতুন ম্যাট্রিক্স পাওয়া যাবে।

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22}' & a_{23}' & b_2' \\ 0 & 0 & a_{33}'' & b_3' \end{bmatrix} \quad \text{.....(v)}$$

হ' একটি আপার (Upper) ত্রিভুজাকৃতির ম্যাট্রিক্স। এ ম্যাট্রিক্স থেকে পশ্চাৎ প্রতিস্থাপন পদ্ধতি প্রয়োগ করে x_1, x_2 ও x_3 এর মান বের করা যায়।

যদি a_{11}, a_{22} অথবা a_{33} এর যে কোনো একটি শূন্য হয়ে যায় তবে এ পদ্ধতিটি ব্যর্থ হবে। এ ক্ষেত্রে ম্যাট্রিক্সটিকে নতুনভাবে সাজাতে হবে যেন কেন্দ্রীয় উপাদান শূন্য না হয়। কিন্তু তা অসম্ভব হলে ম্যাট্রিক্সটি হবে সিঙ্গুলার এবং সমীকরণ জোটের কোনোসমাধান থাকবে না। (v) এর অশূন্য সারির সংখ্যাকে (11) ম্যাট্রিক্সের র‍্যাংক বা মাত্রা বলে।

দ্বিতীয় ধাপের পরে যদি পরিবর্তিত ম্যাট্রিক্সটি নিম্নরূপ হয়, তবে একে আর পরিবর্তন করা লাগবে না।

$$\begin{bmatrix} a_{11}' & 0 & a_{12}' & b_1' \\ 0 & a_{22}' & a_{23}' & b_2' \\ 0 & 0 & a_{33}'' & b_3'' \end{bmatrix} \quad \text{.....(vi)}$$

এক্ষেত্রে (vi) নং ম্যাট্রিক্স থেকেই সরাসরি সমাধান পাওয়া যাবে। গসিয়ান বর্জন পদ্ধতির পরিবর্তিত এ পদ্ধতিকে 'গাউস-জার্দান' পদ্ধতি বলে।

(v) নং ম্যাট্রিক্স একটি ইচিলন আকার, একে রো ক্যানোনিক্যাল করার জন্য প্রথমে ১ম, ২য় ও ৩য় সারিকে যথাক্রমে a_{11}, a_{22}' ও a_{33}'' দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\begin{bmatrix} a & a_{12}' & a_{13}' & b_1' \\ 0 & 1 & a_{23}'' & b_2'' \\ 0 & 0 & 1 & b_3''' \end{bmatrix} \quad \text{.....(vii)}$$

এখন ৩য় সারিকে a_{23}'' দ্বারা গুণ করে ২য় সারি থেকে এবং a_{12}' দ্বারা গুণ করে ১ম সারি থেকে বাদ দিয়ে পাই,

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}' & 0 & b_1'' \\ 0 & 1 & 0 & b_2''' \\ 0 & 0 & 1 & b_3''' \end{bmatrix} \quad \text{.....(viii)}$$

আবার ২য় সারিকে a_{12} দ্বারা গুণ করে ১ম সারি থেকে বাদ দিয়ে নিচের রো ক্যানোনিক্যাল আকারের ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় ঃ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b_{11}''' \\ 0 & 1 & 0 & b_2''' \\ 0 & 0 & 1 & b_3''' \end{bmatrix} \quad \text{.....(ix)}$$

সুতরাং $x_1 = b_1'''$, $x_2''' = b_2'''$ ও $x_3 = b_3'''$

উদাহরণ-৩.৫.১। গসিয়ান ইলিমিনিশন পদ্ধতি ব্যবহার করে

সমাধান

$3x + 5y - 72 = 13$

$4x - y - 12z = 6$ ..... (i)

$2x + 9y - 3z = 20$

(ii) সমীকরণটিকে লিখা যায় নিম্নরূপে–

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -7 & 13 \\ 4 & -1 & -12 & 6 \\ 2 & 9 & -3 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & -7 & 13 \\ 0 & 23 & 8 & 34 \\ 0 & -19 & -6 & -34 \end{bmatrix} \qquad r'_2 = 4r_1 - 3r_2, \quad r'_3 = r_2 - 2r_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & -201 & 129 \\ 0 & 23 & 8 & 34 \\ 0 & 0 & 14 & -136 \end{bmatrix} \qquad r'_3 = 19r_2 + 23r_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & -201 & 129 \\ 0 & 23 & 8 & 34 \\ 0 & 0 & 14 & -136 \end{bmatrix} \qquad r'_1 = 23r_1 - 5r_1, \quad r'_2 = 14r_2 - 8r_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 69 & 0 & 0 & 25530 \\ 0 & 306 & 0 & 612 \\ 0 & 0 & 14 & -136 \end{bmatrix} \qquad r'_1 = 14r_1 + 201r_1$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 370 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{68}{7} \end{bmatrix}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 370, y = 2, z = -\frac{68}{7}$

Algorithm 1 : ধরি যে কোন একটি ম্যাট্রিক্স $A = [a_{ij}]$

Step-1 : প্রথম কলাম এমনভাবে নির্ণয় করি যেন এর মান শূন্য না হয়। যদি এরূপ কোন কলাম এর অস্থিত্ব পাওয়া না যায় তবে তা গ্রহণযোগ্য নয়। অন্যথায় ঐ কলামটিকে j_1 দ্বারা সূচিত করি।

(a) এমনভাবে সাজাই যেন $a_{1j_1} \neq 0$ অর্থাৎ যদি প্রয়োজন হয় তবে সারিকে পরস্পর বিনিময় করি যেন j_1 কলামের মধ্যে প্রথম সারিতে অশূন্য উপাদান বর্তমান থাকে।

(b) a_{1j_1} কে Pivot হিসেবে ধরি এবং a_{1j_1} এর নিচের উপাদানগুলিকে এমনভাবে নির্ণয় করি যেন a_{1j_1} এর নিচের উপাদানগুলি শূন্য হয়।

(1) Set $m = a_{ij_1}/a_{1j_1}$ (2) Add aL_1 to Li অর্থাৎ সারি Ri কে $\left(\frac{a_{ij_1}}{a_{1j_1}}\right) R_1 + R_i$ দ্বারা প্রতিস্থাপিত করি।

Step-2 : উপম্যাট্রিক্স-এর প্রতিটি সারি তৈরি করার সময় Step-1 পুনরায় প্রয়োগ করি, প্রথম সারি বাদ।

এখানে আমরা উপম্যাট্রিক্সের প্রথম কলামকে j_2 দ্বারা সূচিত করি যেন এর মান অশূন্য হয়। সুতরাং Step-2 এর শেষ পর্যায়ে আমরা পাই-

$a_{2j_2} \neq 0$

Step-3 : এতে $n + 1$, ধারাবাহিকভাবে উপরের পদ্ধতি প্রয়োগ করি যতক্ষণ পর্যন্ত উপম্যাট্রিক্স এ অশূন্য উপাদান না আসে।

Remark-1 : Step-1(b) এর মধ্যে সংখ্যা

$m = -\frac{a_{il}}{a_{1l}} = -\frac{\text{সহগ উঠাতে হবে}}{\text{Pivot}}$ একে গুণক বলা হয়।

Remark-2 : Step-1(b) এর অপারেশন নিম্নলিখিতভাবে পরিবর্তন করা যাবে,

$R'i = -aij_1R_1 + a_1j_1 R_i$

যদি সকল স্কেলার রাশি পূর্ণ সংখ্যা হয় তবে ভগ্নাংশ পরিত্যাগ করা উচিত।

Algorithm 2 :

ধরি input ম্যাট্রিক্স

$A = [a_{ij}]$ in echelon form এ Pivot হিসেবে $a_{1j_1}, a_{2j_2}, a_{3j_3}$ ..... a_{rj_r} ধরতে হবে।

ধাপ 1.(a) শেষ অশূন্য R_r সারিকে $\frac{1}{a_{rj_r}}$ দ্বারা গুণ করতে হবে যেমন Pivot হিসেবে 1 পাই।

(b) $a_{rj_r} = 1$ কে Pivot হিসেবে ধরে Pivot এর উপরের উপাদানগুলি শূন্য করতে হবে।

অর্থাৎ i = r–1, r – 2 1

(1) Set $m = -a_{ir}$

(2) Add mRr to R_i

অপর পক্ষে, মৌলিক Row operation প্রয়োগ করে $R'_i = -air_1R'_r + R_i$

ধাপ 2 to r–1 ধাপ 1 পুনঃ প্রয়োগ করি।

$R_{r-1}, R_{r-2}, R_{r-3}$ ..... R_2 সারির জন্য

ধাপ r.R_1 কে $\frac{1}{a_{1j_1}}$ দ্বারা গুণ করি।

Algorithm 3 : (Forward Elimination) :

The input is an avbitvary Matrix A [aij]

Step 1. Find the first column with a non zero entry.

If no such column exists. then FXIT. (we have the zero matrix.) otherwise, let Ji denote the number of this column.

(a) Arrange so that $aij \neq 0$. That is, of necessary, interchange rows so that a nonzero entry appears in the first row in column J1.

(b) Use a_{1j_1} as a pivot to obtain zero below a_{1j_1}

That is for i > 1:

(i) Set $m = -a_{1j_1} / a_{1j_1}$

(2) Add aL_1 to Li.

[This replace row Ri by $(aiji / a_{1j_1}) R_1 + Ri$]

Step 2. Repeat step 1 with the submatrix formed by all the rows, excluding the first row. Here we let j_2 denote the first column in the submatric with a non zero entry. Hence, at the end of step 2, we have $a_{2j_2} \neq 0$

Step 3 to r + 1. Continue the above process until the submatrix has no non zero entry.

Algorithm 4 (Backward Elimination) :

The input is a matrix A = [aij] in echelon form with pivot entries a_{1j_1}, a_{2j_2} .... ari

Step i. (a) Multiply the last non zero row Rr by 1/arj

So that the pivot entry is equal to i

(b) Use arjr = 1 to obtain zeros above the pivot. That is, for i = r – 1, r – 2, ..., 1 :

(i) Set m = –airi

(2) Add mR_r to Ri

In other words, apply the elementary row operations

"Add- air_1 Rr to Ri"

[This replace row Ri by- air_1 Rv + Ri]

step 2 to r – 1. Repeat step 1 for rows R_{r-1}, R_{r-2} ..... R_2

Step r. Multiply R_1 by $1/a_{1j_1}$.

অনুশীলনী-৩

অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি ঃ

১। ভেক্টরস্ (Vectors) কী? [বাকাশিবো-২০০৪, ০৮, ১৩]

২। ম্যাট্রিক্স (Metrices) কী? [বাকাশিবো-২০০৪, ১৩]

৩। মাত্রাকে কী দ্বারা প্রকাশ করা হয়?

৪। সেট (Set) কী?

৫। ভেক্টরস্ এবং ম্যাট্রিক্স অধুনা কী কী কাজে ব্যবহার করা হয়?

৬। কর্ণ ম্যাট্রিক্স (Digenal matrices) কী বুঝায়। [বাকাশিবো-২০০৬, ২০০৫ (৪র্থ পর্ব)]

৭। (Inverse matrix) বিপরীত ম্যাট্রিক্স কাকে বলে? [বাকাশিবো-২০০২, ০৩, ০৩R, ০৭, ০৯R, ১০, ১০R]
অথবা, A ও B Matrices দুটি বিপরীত হওয়ার শর্ত লেখ। [বাকাশিবো-২০১১R]

৮। Echelon (বুহু) ম্যাট্রিক্সের শর্ত দুটি লিখ। [বাকাশিবো-২০০৫, ১৩, ১২, ১৪R]

৯। Row cononical ম্যাট্রিক্সের ধর্ম লিখ।
অথবা, একটি ম্যাট্রিক্সকে Row cononical form কখন বলা যায়? [বাকাশিবো-২০০৫]

১০। একক ম্যাট্রিক্স কী? [বাকাশিবো- ২০০৮]

১১। Identity matrix এর সংজ্ঞা দাও। [বাকাশিবো- ২০১১, ১১R]

১২। এলিমেন্টারী রো অপারেশনগুলো উল্লেখ কর। [বাকাশিবো-২০১২, ০৮ (৪র্থ পর্ব), ২০১৪R]

১৩। A ও B দুটি বিপরীত হওয়ার শর্ত লেখ। [বাকাশিবো-২০১১R]

১৪। $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ হলে AA^{-1} এর মান বের কর। [বাকাশিবো-২০১১R]

সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি ঃ

১৫। রো (Row) ভেক্টরস্ বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০০৭]

১৬। জিরো ভেক্টরস্ বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০১১R]

১৭। অভেদ মেট্রিক্স বা Identity matrix এর সংজ্ঞা দাও।

১৮। আয়তাকার ম্যাট্রিক্স বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০০৮]

১৯। ম্যাট্রিক্স ক্রম বা পর্যায় (Order) বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০১০R]

২০। ম্যাট্রিক্সের সমতা (Equality of matrices) বলতে কী বুঝায়?

২১। ভেক্টরের যোগ-বিয়োগ দেখাও।

২২। Scalar Product ও Vector Product দেখাও।

২৩। এলগরিদম কাকে বলে?

২৪। $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \frac{3}{-1}\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$ দেখাও যে, উহারা ইনভার্স মেট্রিক্স। [বাকাশিবো-২০০৯]

২৫। যদি ভেক্টর $U = (2, 3, -1)$ এবং $V = (-5, 1, 8)$ হয় তবে $u.v = ?$ এবং $\| u \| =$ কত? [বাকাশিবো-২০০৭]

▸▸ রচনামূলক প্রশ্নাবলি ঃ

২৬। ভেক্টরস্ এবং ম্যাট্রিক্স বলতে কী বুঝায়? উদাহরণসহ বর্ণনা দাও।

২৭। ভেক্টরস্ এর প্রকারভেদ আলোচনা কর।

২৮। ম্যাট্রিক্স এর প্রকারভেদ আলোচনা কর।

২৯। ম্যাট্রিক্স এর যোগ-বিয়োগ উদাহরণ সহ বুঝিয়ে লিখ।

৩০। ম্যাট্রিক্স এর গুণন প্রক্রিয়া দেখাও।

৩১। ম্যাট্রিক্স গণিতের এলগরিদম বলতে কী বুঝায়? যোগ ও গুণনের ক্ষেত্রে ম্যাট্রিক্স এলগরিদম দেখাও।

[বাকাশিবো-২০০৩, ২০০৩R, ০৯R, ১১, ১৩R]

৩২। ইনভার্স ম্যাট্রিক্স বলতে কী বুঝায়? উদাহরণসহ ব্যাখ্যা কর। [বাকাশিবো-২০০৪]

৩৩। গশিয়ান ইলিমিনেশন ম্যাথড বলতে কী বুঝায়? ব্যাখ্যা কর।

৩৪। $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 4\end{bmatrix}$ হলে AA^T ও A^TA এর মান নির্ণয় কর। [বাকাশিবো-২০০৪]

৩৫। $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -7\end{bmatrix}$ ও $B=\begin{bmatrix}3 & 0 & -4\\ 3 & -2 & 6\end{bmatrix}$ হলে AB এর মান নির্ণয় কর। [বাকাশিবো-২০০৬]

৩৬। Gaussian elimination এর সাহায্যে $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 8\end{bmatrix}$ এর Inverse matrix নির্ণয় কর।

[বাকাশিবো-২০০৭, ১০, ১০R, ১১R, ১২]

▸▸ সমস্যাবলি ঃ

১। তিনটি ভেক্টর, $u = (2, -7, 1)$

$\upsilon = (-3, 0, 4)$

এবং $w = (0, 5, -8)$ দেয়া আছে।

নির্ণয় কর ঃ (a) $u + \upsilon$ (b) $\upsilon + w$

(c) $-3u$ (d) $-w$

(e) $3u - 4\upsilon$ (f) $2u + 3v - 5w$

(g) u, υ (h) $u. w$

(j) $\upsilon . w$

উত্তর ঃ (a) (- 1, - 7, 5); (b) (-3, 5, -4) (c) (-6, 21, -3); (d) 0, -5, 8) (e) (18, −21, −13) (f) (−5, −39, 54) (g) − 2, (h) − 43, (i) − 32]

২। নির্ণয় কর $\| u \|$; যেখানে -

(a) $u = (3, -12, -4)$; (b) $\upsilon = (2, -3, 8, -7)$

৩। দেয়া আছে, $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & -5 & 6\end{bmatrix}$ এবং $B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & -5\end{bmatrix}$

নির্ণয় কর ঃ (a) A + B;

(b) 3A এবং − 4 B **উত্তর ঃ** (a) $\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 4 & -2 & 1\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}3 & 6 & -9\\ 12 & -15 & 18\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-4 & 4 & -8\\ 0 & -12 & 20\end{bmatrix}$]

৪। নির্ণয় কর 2A − 3B, যেখানে, $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & 5 & -6\end{bmatrix}$ এবং $B=\begin{bmatrix}3 & 0 & 2\\ -7 & 1 & 8\end{bmatrix}$ **উত্তর ঃ** $\begin{bmatrix}-7 & -4 & 0\\ 29 & 7 & -36\end{bmatrix}$]

৫। যদি $3\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+t & 3 \end{bmatrix}$ তবে x, y, z, t এর মান নির্ণয় কর।

[উত্তর ঃ $x = 2; y = 4; z = 1; t = 3$]

৬। মান নির্ণয় কর ঃ (a) $[3, -2, 5]\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ (b) $[2, -1, 7, 4]\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}$ [উত্তর ঃ (a) -4; (b) 7]

৭। ধরি, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

নির্ণেয় কর ঃ (a) AB (b) BA. [উত্তর ঃ (a) $\begin{bmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 7 & 2 & -14 \end{bmatrix}$; (b) নির্ণেয় যোগ্য নয়]

৮। নিচের ম্যাট্রিক্সগুলোর কর্ণ (Diagonal) বের কর।

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & -5 & 8 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} t-2 & 3 \\ -4 & t+5 \end{bmatrix}$

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ [উত্তর ঃ (a) $[1, -5, 7]$; (b) $t-2, t+5$] (c) নির্ণেয়যোগ্য নয়]

৯। যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ হয় তবে নির্ণয় কর ঃ (a) A^2; (b) A^3 [বাকাশিবো-২০০৪, ১১R]

[উত্তর ঃ (a) $\begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$; (b) $= \begin{bmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{bmatrix}$]

১০। ধর, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ এবং ধর $f(x) = 2x^3 - 4x + 5$

এবং $g(x) = x^2 + 2x - 11$ নির্ণয় কর ঃ

(a) $f(A)$

(b) $g(A)$ [উত্তর ঃ (a) $\begin{bmatrix} -13 & 52 \\ 104 & -117 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$]

১১। নির্ণয় কর ঃ (a) $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} a-b & b \\ b & a+b \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ [উত্তর ঃ (a) 7; (b) $a^2 - 2b^2$, (c) 55]

১২। যদি সম্ভব হয়, তবে নিচের প্রতিটি ম্যাট্রিক্স এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।

(a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

(c) $C = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$ [উত্তর ঃ (a) $\begin{bmatrix} -1 & 3/2 \\ 2 & -5/2 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 27 & -16 & 6 \\ 8 & -5 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$; (c) নাই]

১৩। যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$ হয় তবে A^3 এর মান বের কর। [উত্তর ঃ $\begin{bmatrix} 25 & 4 \\ -3 & 20 \end{bmatrix}$ [বাকাশিবো- ২০০৭]

১৪। যদি ভেক্টর $u = (2, 3, -1)$ এবং $\theta = (-5, 1, 8)$ হয় তবে $u, \theta = ?$ এবং $\|u\| = ?$ [উত্তর ঃ $-15, \sqrt{14}$ [বাকাশিবো- ২০০৭]

১৫। $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ হলে AA' এর মান বের কর। [উত্তর ঃ $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$] [বাকাশিবো-২০১১]

১৬। দুটি ভেক্টর $u = (3, -12, -4)$ এবং $v = (2, -7, 1)$ হলে $u + 2v$ নির্ণয় কর। [উত্তর ঃ $(7, -26, -2)$] [বাকাশিবো-২০১৩R]

অনুশীলনী-৩ এর সমাধান

▸▸ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

১। একমাত্রা বিশিষ্ট (One dimensional) অ্যারে (Array) কে ভেক্টরস্ (Vectors) বলা হয়।

২। সেট এর মধ্যকার দ্বি-মাত্রা (Two-dimensional) বিশিষ্ট অ্যারেকে ম্যাট্রিক্স (Matrix) বলা হয়।

৩। মাত্রাকে বিভিন্ন সংখ্যা সূচক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

৪। যখন কতক উপাত্ত (Data) ক্রম বিন্যাসকৃতভাবে অ্যারে (Array) তে সাজান হয়। তখন উহা একটি সেট (Set) হয়।

৫। অধুনা ভেক্টরস এবং ম্যাট্রিক্সকে কমিউনিকেশন নেটওয়ার্ক ও যোগাযোগ ব্যবস্থার মডেল রূপে ব্যবহার করা হয়।

৬। যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের $a_{ij} = 0$, যখন $i \neq j$, তখন ম্যাট্রিক্সটিকে কর্ণ ম্যাট্রিক্স (Diagonal Matrices) বলা হয়।

$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$ একটি ডায়াগোনাল ম্যাট্রিক্স।

৭। একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A কে বিপরীত বা ইনভার্স ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি এরূপ একটি বৈশিষ্ট্য সম্পন্ন B ম্যাট্রিক্স গঠন করে যা- $AB = BA = I$, আইডেন্টিটি ম্যাট্রিক্স (Identity matrix) এরূপ ম্যাট্রিক্স B হল একক; একে A এর ইনভার্স ম্যাট্রিক্স বলা হয় এবং A^{-1} দ্বারা নির্দেশ করা হয়। লক্ষণীয় যে, B হল A এর ইনভার্স ম্যাট্রিক্স যদি এবং কেবল যদি A, B এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স হয়।

৮। ম্যাট্রিক্স A কে ইচিলন (Echelon) ম্যাট্রিক্স বা ইচিলন ফর্ম বলা হবে যদি ম্যাট্রিক্স A নিচের দুটি শর্ত মেনে চলে-

(i) সকল শূন্য সারি (Row) যদি কোন শূন্য সারি থাকে, তাহলে ম্যাট্রিক্সের নিচের সারি থেকে রাখতে শুরু করতে হবে।

(ii) যদি পরপর কোন সারির সকল এন্ট্রি 0 (শূন্য) না হয়, তবে পূর্ববর্তী সারির যে এন্ট্রি 1 আছে, তা দ্বিতীয় বা তৎপরবর্তী রো এর ডান দিকের প্রথম এন্ট্রি 1 হবে।

৯। কোন ইচিলন ম্যাট্রিক্স যদি নিচের দুটি ধর্ম মেনে চলে তবে সে ইচিলন ম্যাট্রিক্স (Echelon matrices) কে Row cononical ম্যাট্রিক্স বা Row cononical ফর্ম বলে।

১। প্রত্যেক পথ দেখানো অশূন্য উপাদান হবে 1।

২। প্রত্যেক পথ দেখানো অশূন্য উপাদান হবে এর কলামের মধ্যে একমাত্র অশূন্য উপাদান।

১০। স্কেলার ম্যাট্রিক্সের অশূন্য উপাদানগুলো একক হলে ম্যাট্রিক্সকে অভেদ ম্যাট্রিক্স বা একক ম্যাট্রিক্স বলা হয়।

১১। Identity matrix কে Unit matrix বা অভেদক matrix বলা হয়। যে বর্গ ম্যাট্রিক্সের কর্নগুলো 1 ও অন্যান্য উপাদানগুলো শূন্য তাকে Identity ম্যাট্রিক্স বা অভেদক matrix বলা হয়।

যেমন ঃ $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ও $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

১২। এলিমেন্টারী রো অপারেশনগুলো নিম্নে উল্লেখ করা হল ঃ

১। গসিয়ান এলিমেন্টারী রো অপারেশন।

২। গসিয়ান জর্ডান এলিমেন্টারী রো অপারেশন।

১৩। A ও B দুটি বিপরীত হওয়ার শর্ত নিম্নে দেওয়া হল ঃ

(i) A ও B উভয় বর্গ ম্যাট্রিক্স হতে হবে।

(ii) A ও B উভয় Non Singular ম্যাট্রিক্স হতে হবে।

(iii) $A = B^{-1}$ অথবা $B = A^{-1}$ হতে হবে।

১৪। দেওয়া আছে,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

সুতরাং $AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1+4 & 3-2 \\ 3-2 & 9+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$$ **Ans.**

▶▶ সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

১৫। যখন ভেক্টরস্ এর উপাদানগুলো আনুভূমিক সারিতে সাজান থাকে তাকে রো ভেক্টরস্ বলা হয়। যেমন–

$u = (a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n)$ একটি রো ভেক্টরস্।

১৬। যদি সকল ভেক্টরস্ উপাদান a_i শূন্য হয় তবে তাকে জিরো ভেক্টরস্ (Zero vectors) বলা হয়। দুটি ভেক্টর u এবং υ সমান অর্থাৎ $u = \upsilon$ হবে। যদি উভয় ভেক্টর-এর মধ্যে সমান সংখ্যক উপাদান এবং নির্দিষ্ট অবস্থানের উপাদানগুলোর মান সর্বদা সমান হয়।

১৭। স্কেলার ম্যাট্রিক্সের অশূন্য উপাদানগুলো একক হলে ম্যাট্রিক্সকে অভেদ ম্যাটিক্স (Identity matrices) বলে।

যেমন– $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

১৮। ম্যাট্রিক্সে যে যে উপাত্ত ব্যবহার করা হয় এদেরকে সারি (Row) এবং স্তম্ভ (Column) এ সাজালে যে বিন্যাসকৃত ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাকে আয়তাকার ম্যাট্রিক্স (Rectangular matrices) বলা হয়। এ ম্যাট্রিক্স বোঝাতে দুটি তৃতীয় বন্ধনী [ ] বা দুটি প্রথম বন্ধনী ( ) ব্যবহার করা হয়। যেমন -

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ একটি আয়তাকার ম্যাট্রিক্স।

১৯। একটি ম্যাট্রিক্স-এর সারির সংখ্যা m এবং কলামের সংখ্যা n হলে $m \times n$ কে ম্যাট্রিক্সের ক্রম বা পর্যায় (Order) বলা হয়। অর্থাৎ যদি একটি ম্যাট্রিক্সের 2টি সারি এবং 3টি কলাম থাকে তবে এর পর্যায় হবে 2×3।

২০। দুটি ম্যাট্রিক্স $A = [a_{ij}]$ এবং $B = [b_{ij}]$ কে সমতা ম্যাট্রিক্স (Equality of matrices) বলা হয়ে যদি তাদের পর্যায় (Order) সমান হয় এবং একটির উপাদান দ্বিতীয়টির সংশ্লিষ্ট উপাদানের সমান হয়।

২১। **ভেক্টরের যোগ (Addition of vectors) ঃ** যে কোন দুটি একই সংখ্যক উপাদান বিশিষ্ট ভেক্টর u এবং v কল্পনা করা যায়,

ধরি, $u = (a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, a_n)$

এবং $v = (b_1, b_2 \ldots\ldots\ldots, b_n)$

সুতরাং $u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2 \ldots, a_n + b_n)$

ভেক্টর বিয়োগ (Subtraction of vectors) ঃ

উপরিউক্ত ভেক্টর u এবং v এর ক্ষেত্রে

$u - v = (a_1 - b_2, a_2 - b_2 \ldots\ldots, a_n - b_n)$

২২। **স্কেলার গুণ (Scalar product) ঃ** u ভেক্টরকে স্কেলার k দ্বারা গুণ করলে পাওয়া যায়-

$u = a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots\ldots, am$

$ku = (ka_1, ka_2 \ldots\ldots\ldots, ka_n)$

অনুরূপভাবে, $-u = -1\ (u) = [-1(a_1), -1(a_2) \ldots -1\ (a_n)]$

ভেক্টর $-u$ কে u এর নেগেটিভ ভেক্টর বলা হয়।

ভেক্টর গুণ (Vector Product) ঃ ভেক্টর u এবং v এর গুণফল

$v = b_1, b_2 \ldots\ldots\ldots b_n$

$u.\ v = (a_1, a_2 \ldots\ldots a_n)\ (b_1, b_2 \ldots\ldots b_n)$

$= a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots\ldots\ldots + a_nb_n$

২৩। সব ধরনের কাজই সুষ্ঠুভাবে সম্পন্ন হয় কাজের ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশের যুক্তিযুক্ত পর্যায়ক্রমিক সম্পাদনের ফলে। সমস্যা সমাধানের এই যৌক্তিক ক্রমানুসারি পদ্ধতিকে বলা হয় সমস্যা সমাধানের এলগরিদম।

২৪। $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

এখন $AB = \begin{bmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

এবং $BA = = \begin{bmatrix} 6-6 & 15-15 \\ -2+2 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

অতএব A এবং B বিপরীত ম্যাট্রিক্স অর্থাৎ $AB = 1$ যদি এবং কেবল যদি $BA = 1$

২৫। দেওয়া আছে,

$u = (2, 3, -1)$ এবং $V = (-5, 1, 8)$

$\therefore$ $u.v = (2, 3, -1), (-5, 1, 8)$

$= (-10 + 3 - 8) = -15$ **Ans.**

এবং $\| u \| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$ **Ans.**

▶▶ রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ঃ

২৬। **ভেক্টরস্ (Vectors) ঃ** ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স (Discrete Mathematics) এর ক্ষেত্রে যখন কতক উপাত্ত (Data) ক্রম বিন্যাসকৃতভাবে অ্যারে (Array) এর মধ্যে সাজান হয়, তখন উহা একটি সেট (Set) হয়। এই সেটের উপাদানসমূহ এক বা একাধিক সংখ্যা ঘাত দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এরূপ একমাত্রা বিশিষ্ট (One dimensional) অ্যারে (Array) কে ভেক্টরস্ (Vectors) বলা হয়।

ধরা যাক, আট জন ছাত্রের ওজন (পাউন্ডস্) তালিকা নিম্নরূপ-

134, 156, 127, 145, 203, 186, 145, 138

এসকল মানকে একটি নিম্নঘাত বিশিষ্ট সাংকেতিক চিহ্ন দিয়ে প্রকাশ করা যায়।

$W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6, W_7, W_8$

প্রতিটি নিম্নঘাত ক্রম তালিকায় বর্ণিত পরিমাণগত অবস্থান নির্দেশ করে। উদাহরণস্বরূপ-

$W_1 = 134$ প্রথম নাম্বার

$W_2 = 156$ দ্বিতীয় নাম্বার

এ ধরনের তালিকাবদ্ধ মানকে ভেক্টর (Vector) বলা হয়।

যখন কতকগুলো উপাদান $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots a_n$ নিয়ে ভেক্টর u গঠিত হয়, তখন একে নিম্নরূপভাবে প্রকাশ করা হয়।

$u = (a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots a_n)$

ম্যাট্রিক্স (Matrices) ঃ একটি আয়তাকার নাম্বার-এর বিন্যাস যা দুটি বন্ধনী দ্বারা নিয়মানুযায়ী আবদ্ধ থাকে, তাকে ম্যাট্রিক্স (Matrices) বলা হয়। যেমন-

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ am_1 & am_2 \ldots\ldots\ldots amn \end{bmatrix}$$

aij সমূহ যে কোন রাশি হলে, উপরের ম্যাট্রিক্সটিকে $m \times n$ **ম্যাট্রিক্স** বলা হয়।

ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স এর ক্ষেত্রে যখন কতক উপাত্ত (Data) ক্রম বিন্যাসকৃতভাবে অ্যারে (Array) তে সাজান থাকে, তখন উহাকে সেট (Set) বলা হয়। এই সেটের উপাদানসমূহ এক বা একাধিক সংখ্যা ঘাত দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এই সেট এর মধ্যকার দ্বি-মাত্রা (Two dimensional) বিশিষ্ট অ্যারে কে ম্যাট্রিক্স বলা হয়। যেমন-

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ এবং (b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$

২৭। ভেক্টরকে দুই ভাগে ভাগ করা যায়। যথা ঃ (i) রো ভেক্টর (ii) কলাম ভেক্টর।

(i) রো ভেক্টর (Row Vector) ঃ যখন ভেক্টরস্ এর উপাদানগুলো আনুভূমিক সারিতে সাজান থাকে, তাকে রো ভেক্টর (Row Vector) বলা হয়।

$u = (a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n)$ একটি রো ভেক্টর।

(ii) কলাম ভেক্টর (Column Vector) ঃ যখন ভেক্টরস্ এর উপাদানগুলো উল্লম্ব সারিতে সাজান থাকে, তাকে কলাম ভেক্টর (Column Vector) বলা হয়।

$$V = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$ একটি কলাম ভেক্টর।

২৮। **ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ (Types of Matrices) ঃ**

(i) রো ম্যাট্রিক্স (Row Matrices) ঃ একটি মাত্র সারি বিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সকে রো ম্যাট্রিক্স (Row Matrices) বা রো ভেক্টর (Row Vector) বলে।

$A = [a_{11}, \quad a_{12} \quad a_{13} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n}]$ একটি রো ম্যাট্রিক্স। এর সারির সংখ্যা 1 কিন্তু কলামের সংখ্যা n। সুতরাং এটা $(1 \times n)$ পর্যায়ের ম্যাট্রিক্স।

(ii) কলাম ম্যাট্রিক্স (Column Matrices) ঃ একটি মাত্র কলাম বিশিষ্ট ম্যাট্রিক্সকে কলাম ম্যাট্রিক্স (Column Matrices) বলা হয়।

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$ একটি কলাম ম্যাট্রিক্স। এর কলাম সংখ্যা 1 কিন্তু সারির সংখ্যা m।

সুতরাং ম্যাট্রিক্সটি $(m \times 1)$ পর্যায়ের ম্যাট্রিক্স।

(iii) বর্গ ম্যাট্রিক্স (Square Matrices) ঃ যে ম্যাট্রিক্সের সারি এবং কলামের সংখ্যা সমান তাকে বর্গ ম্যাট্রিক্স (Square Matrices) বলা হয়।

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ an_1 & an_2 \ldots\ldots\ldots ann \end{bmatrix}$$

A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স কেননা এর সারি এবং কলামের সংখ্যা n। এরূপ n সংখ্যক সারি এবং n সংখ্যক কলাম বিশিষ্ট ম্যাট্রিক্স এর পর্যায় (Order) n।

বর্গ ম্যাট্রিক্সের $a_{11}, \quad a_{22}, \ldots\ldots\ldots a_{nn}$ উপাদান গুলোকে কর্ণস্থিত উপাদান (Diagonal Element) বলা হয়। কর্ণস্থিত উপাদানসমূহের সমষ্টিকে ট্রেস (Trace) বলে।

(iv) কর্ণ ম্যাট্রিক্স (Diagonal Matrices) ঃ যে কর্ণ ম্যাট্রিক্সের $a_{ij} = 0$, যখন $i \neq j$, তখন ম্যাট্রিক্সটিকে কর্ণ ম্যাট্রিক্স (Diagonal Matrices) বলা হয়

$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & o & a_{33} \end{bmatrix}$ একটি তৃতীয় ক্রমক ম্যাট্রিক্স।

(v) স্কেলার ম্যাট্রিক্স (Scalar Matrices) ঃ যে ডায়াগোনাল ম্যাট্রিক্সের অশূন্য উপাদানগুলো সমান, তাকে স্কেলার ম্যাট্রিক্স (Scalar Matrices) বলা হয়

$D = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ একটি স্কেলার ম্যাট্রিক্স।

(vi) অভেদ ম্যাট্রিক্স (Identity Matrices) ঃ স্কেলার ম্যাট্রিক্সের অশূন্য উপাদানগুলো একক হলে ম্যাট্রিক্সকে অভেদ ম্যাট্রিক্স (Identity Matrices) বা একক (Unit) ম্যাট্রিক্স বলা হয়। n পর্যায়ের ইউনিট ম্যাট্রিক্সকে 1_n দিয়ে নির্দেশ করা হয়। যেমন-

$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(viii) শূন্য ম্যাট্রিক্স (Zero Matrices) ঃ শূন্য ম্যাট্রিক্সের সারি এবং কলামের প্রতিটি উপাদান শূন্য।

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, একটি শূন্য ম্যাট্রিক্স

২৯। ম্যাট্রিক্সের যোগ এবং বিয়োগ (Addition and Subtraction of Matrices) ঃ

$A = [a_{ij}]$ এবং $B = [b_{ij}]$ দুটি $m \times n$ ম্যাট্রিক্স। $C = [C_{ij}]$ এমন একটি $m \times n$ ম্যাট্রিক্স যার প্রতিটি উপাদান A এবং B এর সংশ্লিষ্ট উপাদান দুটির যোগফল। এক্ষেত্রে C-কে A এবং B ম্যাট্রিক্স দুটির যোগফল বলা হয়। আর যদি C এর প্রতিটি উপাদান A এবং B-এর সংশ্লিষ্ট উপাদান দুটির বিয়োগফল হয় তবে C কে A এবং B ম্যাট্রিক্স দুটির বিয়োগফল ম্যাট্রিক্স বলে।

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

$A + B = \begin{bmatrix} 1+3 & -2+0 & 2+2 \\ 4-7 & 5+1 & 6+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -3 & 6 & 14 \end{bmatrix}$

এবং $A - B = \begin{bmatrix} 1-3 & -2-0 & 2-2 \\ 4+7 & 5-1 & 6-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 11 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ হয়, তবে

$A + A + A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & -9 \end{bmatrix}$

$\therefore 3A = \begin{bmatrix} 3.1 & 3.2 \\ 3.2 & 3.-3 \end{bmatrix}$

অতএব, কোন স্কেলার K এর জন্য-

$KA = \begin{bmatrix} K.1 & K.2 \\ K.2 & K.-3 \end{bmatrix}$

অর্থাৎ, ম্যাট্রিক্স A এর প্রতিটি উপাদান K দিয়ে গুণ করলে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তা KA দ্বারা নির্দেশিত হয়। দুটি ম্যাট্রিক্সের পর্যায় ভিন্ন হলে ম্যাট্রিক্স দুটি যোগ অথবা বিয়োগ করা যায় না। পর্যায় (Order) একই হলে ম্যাট্রিক্স যোগ অথবা বিয়োগ করা যায়। তখন ম্যাট্রিক্স দুটিকে যোগ অথবা বিয়োগের জন্য যোগ্য (Confirmable for Addition and Subtraction) বলা হয়।

যদি A, B এবং C ম্যাট্রিক্সগুলোকে যোগের জন্য যোগ্য ধরা হয় তবে,

(i) $A + B = B + A$

(ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(iii) $K(A + B) = KA + KB = (A + B)K$, যেখানে K একটি স্কেলার।

উদাহরণ ঃ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **এবং**

$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ **হলে,**

(i) A + B, (ii) A – C নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ

(i) $A + B = \begin{bmatrix} 1+3 & 2-1 & -3+2 \\ 5+4 & 0+2 & 2+5 \\ 1+2 & -1+0 & 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 9 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

(ii) $A - C = \begin{bmatrix} 1-4 & 2-1 & -3-2 \\ 5-0 & 0-3 & 2-2 \\ 1-1 & -1+2 & 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

৩০। ম্যাট্রিক্সের গুণন (Multiplication of Matrices) ঃ

সারি ম্যাট্রিক্স $A = [a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \ldots\ldots\ \ldots a_{1n}]$ এবং

কলাম ম্যাট্রিক্স, $B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$ এর গুণফল বিবেচনা করা যাক।

যদি প্রথম ম্যাট্রিক্সের কলামের সংখ্যা দ্বিতীয়টির সারির সংখ্যার সমান হয় তবে গুণন সম্ভব হবে।

$$\therefore AB = [a_{11}\ a_{12}\ a_{113} \ldots\ldots\ \ldots a_{1n}] \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$$

$$= [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}b_{n1}] = C$$

A ম্যাট্রিক্সের পর্যায় $1 \times n$ এবং B ম্যাট্রিক্সের পর্যায় $n \times 1$ এবং ম্যাট্রিক্স দুটির গুণফল C এর পর্যায়-

$(1 \times n).(n \times 1) = 1 \times 1$;

এরূপ গুণন প্রক্রিয়াই প্রথম ম্যাট্রিক্সের সারির প্রতিটি উপাদানকে দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্সের কলামের সংশ্লিষ্ট উপাদান দিয়ে গুণ করে গুণফলগুলো যোগ করা হয়েছে।

ধরি, A একটি 2×3 ম্যাট্রিক্স এবং B একটি 3×2 ম্যাট্রিক্স। তাহলে A এবং B- এর গুণফল $(2 \times 3).\ 3 \times 2) = (2 \times 2)$ ম্যাট্রিক্স হবে।

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \end{bmatrix} \text{ এবং } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$$

গুণ পদ্ধতির এই প্রক্রিয়াই প্রথম ম্যাট্রিক্সের কলামের সংখ্যা দ্বিতীয় ম্যাট্রিক্সের সারির সংখ্যা সমান হতে হবে। তখন ম্যাট্রিক্স দুটিকে গুণনের জন্য যোগ্য অথবা গুণনযোগ্য (Confirmable for multiplication) বলা হয়। যদি A, B, C ম্যাট্রিক্সগুলো যোগ এবং গুণনের জন্য যোগ্য হয়। তবে-

(i) $A(B + C) = AB + AC$.

(ii) $(A + B)C = AC + BC$.

(iii) $A(BC) = (AB)C$.

কিন্তু

(i) $AB \neq BA$, সাধারণত

(ii) $AB = 0$ হলে, $A = 0$ অথবা $B = 0$ নাও হতে পারে।

(iii) $AB = AC$ হলে, $B = C$ নাও হতে পারে।

৩১। প্রাসঙ্গিক কারণেই বলতে হয় যে, সব ধরনের কাজই সুষ্ঠুভাবে সম্পন্ন হয় কাজের ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র অংশের যুক্তিযুক্ত পর্যায় ক্রমিক সম্পাদনের ফলে। সমস্যা সমাধানের এই যৌক্তিক ক্রমানুসারি পদ্ধতিকে বলা হয় সমস্যা সমাধানের এলগরিদম। কম্পিউটার দিয়ে সমস্যা সমাধানের জন্য যে এলগরিদম নির্মাণ করা হয় তাকে কম্পিউটারের ভাষায় অনুবাদ করতে হয়। এই অনুবাদকৃত কম্পিউটারের ভাষাকেই এলগরিদম বলে। ম্যাট্রিক্স গণিতের ক্ষেত্রে সমস্যার সমাধান করার জন্য অর্থাৎ দু'টি ম্যাট্রিক্সের মধ্যে গুণন বা যোগ করার জন্য কম্পিউটারের মাধ্যমে অনুবাদকৃত ভাষাকেই ম্যাট্রিক্স গণিতের এলগরিদম (Algorithm of Matrices Arithmatic) বলা হয়। নিম্নে ম্যাট্রিক্স গণিতের এলগরিদম তুলে ধরা হল।

ম্যাট্রিক্স যোগের জন্য এলগরিদম (Algorithm for Matrices Addition ঃ

এলগরিদম 1 ম্যাট্রিক্স (i, j, Sum, q, A, B)

ধাপ 1 ঃ i এর মান 1 থেকে m পর্যন্ত ঘোষণা করা (For loop)

ধাপ 2 ঃ j এর মান 1 থেকে n পর্যন্ত ঘোষণা করা (For loop)

ধাপ 3 ঃ Sum = 0

q এর মান 1 থেকে k পর্যন্ত ঘোষণা করা (For loop

ধাপ 4 ঃ Sum = Sum + a_{iq} + b_{qj}

ধাপ 5 ঃ For লুপ i শেষ

For লুপ j শেষ

ধাপ 6 ঃ সমাপ্ত।

উচ্চতর গণিত—১৮

ম্যাট্রিক্স গুণনের এলগরিদম (Algorithm for matrices Maltiplication) ঃ

এলগরিদম-২ ঃ ম্যাট্রিক্স গুণণ (i, j, s, q, a, b, c ভেরিয়াবেল গ্রহণ)

ধাপ-১ ঃ i এর মান 1 থেকে m পর্যন্ত ঘোষণা করা (For loop ব্যবহার করা)

ধাপ-২ ঃ s এর মান 1 থেকে n পর্যন্ত ঘোষণা করা (For loop ব্যবহার করা)

ধাপ-৩ ঃ $C_{ij} = 0$

q এর মান 1 থেকে k পর্যন্ত ঘোষণা করা (For loop ব্যবহার করা)

ধাপ-৪ ঃ $C_{ij} = C_{ij} + a_{iq} + b_{jq}$

ধাপ-৫ ঃ For লুপ i শেষ For লুপ

ধাপ-৬ ঃ সমাপ্ত

৩২। একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স A কে বিপরীত বা ইনভার্স ম্যাট্রিক্স বলা হবে যদি এরূপ একটি বৈশিষ্ট্যসম্পন্ন B ম্যাট্রিক্স গঠন করে যা-

$AB = BA = I$, আইডেন্টিটি ম্যাট্রিক্স (Identity matrix) এরূপ ম্যাট্রিক্স B হল একক; একে A এর ইনভার্স ম্যাট্রিক্স বলা হয় এবং A^{-1} দ্বারা নির্দেশ করা হয়। লক্ষণীয় যে, B হল A এর ইনভার্স ম্যাট্রিক্স যদি এবং কেবল যদি A, B এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স হয়।

উদাহরণ ঃ ধরা যাক,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ এবং } B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{তখন } AB = \begin{bmatrix} 6-5 & -10+10 \\ 3-3 & -5+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{এবং } BA = \begin{bmatrix} 6-5 & 15-15 \\ -2+2 & -5+6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

অতএব A এবং B বিপরীত ম্যাট্রিক্স।

অর্থাৎ $AB = 1$ যদি এবং কেবল যদি $BA = 1$

উদাহরণ ঃ

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{8} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{-11} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{6} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}$$

দেখানো যায় যে, উহারা ইনভার্স ম্যাট্রিক্স।

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -11+0+12 & 2+0-2 & 2+0-2 \\ -22+4+18 & 4+0-3 & 4-1-3 \\ -44-4+48 & 8+0-8 & 8+1-8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

অতএব, A ও B হল ইনভার্স ম্যাট্রিক্স।

এলগরিদম ঃ ইনভার্স ম্যাট্রিক্স $(n \times n)$

এলগরিদম-৩। ( ) ইনভার্স ম্যাট্রিক্স

উদাহরণ ঃ

Algorithm 5.10C : Find the inverse of an n × n matrix A.

Step-1. Form then × 2n matrix $M = [A, I]$; that is, A is in the left half of M and the identity matrix I is in the right half of M.

Step-2. Row reduce M to an echelon form. If the process generates a zero row in the A-half of M, then stop (A has no inverse). Otherwise the A-half is now in triangular form.

Step-3. Further row reduce M to the row canonical form

$M \sim [I, B]$

where I has replaced A in the left half of M.

Step-4. Set $A^{-1} = B$, where B is the matrix that now in the right half of M.

A ইনভার্স ম্যাট্রিক্স নির্ণয় ঃ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$M = (A, I)$

$$= \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$M \sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

৩৩। **ম্যাট্রিক্সের কর্ম পরিবর্তনের গসিয়ানা ইলিসনেশন ঃ** কার্ল ফ্রেডরিক গাউশ একজন জার্মান গাণিতিক (১৭৭৭ - ১৮৫৫) ছিলেন। তাঁকে গণিতের রাজপুত (Prince of math matics) বলা হয়। গণিতে তাঁর অবদান নিউটন কিংবা আর্কিমিডিস এর সমতুল্য। এ অধ্যায়ে গাউশের উদ্ভাবিত একটি পদ্ধতি আলোচনা করা হয়েছে।

এবার নিম্নে বর্ণিত একটি ম্যাট্রিক্সকে রো ইচিলন (echelon) ফর্মে রূপান্তরের প্রক্রিয়া লক্ষ্য করি-

ধরা যাক একটি ম্যাট্রিক্স $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$

প্রথম ধাপ ঃ যে রো প্রথম এন্ট্রি অশূন্য তা নির্ধারণ করি।

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

ম্যাট্রিক্সে দ্বিতীয় এবং তৃতীয় রো এর প্রথম এন্ট্রি অশূন্য।

দ্বিতীয় ধাপ ঃ

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

পূর্ববর্তী ম্যাট্রিক্সের ১ম ও ২য় রো পরস্পর স্থানান্তর করে।

তৃতীয় ধাপ ঃ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

পূর্ববর্তী ম্যাট্রিক্সের প্রথম রোকে $\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণ করে।

চতুর্থ ধাপ ঃ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

পূর্ববর্তী ম্যাট্রিক্সের ১ম রোকে -২ দ্বারা গুণ করে তৃতীয় রো এর সঙ্গে যোগ করে।

পঞ্চম ধাপ ঃ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

প্রথম রো বাদে অন্যান্য রো গুলোর প্রথম অশূন্য সংখ্যা চিহ্নিত করি।

ষষ্ঠ ধাপ ঃ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

এখানে প্রথম অশূন্য সংখ্যা ২য় এবং ৩য় রো এর ৩য় এন্ট্রি পূর্ববর্তী ম্যাট্রিক্সের দ্বিতীয় রোকে $\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণ করি।

সপ্তম ধাপ ঃ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

পূর্ববর্তী ম্যাট্রিক্সের ২য় রোকে –5 দ্বারা গুণ করে ৩য় রো এর সাথে যোগ করি।

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

পূর্ববর্তী ম্যাট্রিক্সের ৩য় রোকে ২ দ্বারা গুণ করে পাই

উপরিউক্ত ম্যাট্রিক্সে লক্ষ্য করি যে, প্রত্যেক রো এর প্রথম অশূন্য সংখ্যা 1। একটি রো এর পরের রো এর 1 ডান দিকে অবস্থিত। ফলে এ ম্যাট্রিক্সকে রো ইচিলন (Row echelon) ফর্মে রূপান্তরিত হয়েছে। এ রূপান্তর প্রক্রিয়াকে গসিয়ান ইলিমেনেশন (Gaussian elimination) বলে।

অর্থাৎ কোন ম্যাট্রিক্সকে রো ইচিলন ফর্মে রূপান্তরের প্রক্রিয়াকে গসিয়ান ইলিমিনেশন বলে।

ধরা যাক, A যে কোন ম্যাট্রিক্স। দু'টি এলগরিদম নিচে প্রদত্ত হল ঃ

(i) ফরওয়ার্ড ইলিমিনেশন ম্যাথড (Forwad elimination method)

(ii) ব্যাকওয়ার্ড ইলিমিনেশন ম্যাথড (Backward elimination method)।

প্রথম এলগরিদম Aম্যাট্রিক্স ইচিলন আকৃতি পরিবর্তিত হয় (কেবল সারি ব্যবহার করে) এবং দ্বিতীয় এলগরিদম এ ইচিলন ম্যাট্রিক্স সারি কোনো নিকেল আকৃতিতে পরিবর্তিত হয়। এ দুটি এলগরিদমকে গসিয়ান ইলিমিনেশন বলা হয়।

Algorithm 1 ঃ ধরি, যে কোন একটি ম্যাট্রিক্স $A = [a_{ij}]$

Step–1 ঃ প্রথম কলাম এমনভাবে নির্ণয় করি যেন এর মান শূন্য না হয়। যদি এরূপ কোন কলাম এর অস্তিত্ব পাওয়া না যায় তবে তা গ্রহণযোগ্য নয়। অন্যথায় ঐ কলামটিকে j_1 দ্বারা সূচিত করি।

(a) এমনভাবে সাজাই যেন $a_1J_1 \neq 0$ অর্থাৎ যদি প্রয়োজন হয় তবে সারিকে পরস্পর বিনিময় করি যেন j_1 কলামের মধ্যে প্রথম সারিতে অশূন্য উপাদান বর্তমান থাকে।

(b) a_1j_1 কে Pivot হিসেবে ধরি এবং a_1j_1 এর নিচের উপাদানগুলিকে এমনভাবে নির্ণয় করি যেন a_1j_1 এর নিচের উপাদানগুলি শূন্য হয়।

(1) Set $m = a_1j_1/a_1j_1$ (2) Add aL_1 to Li অর্থাৎ সারি Ri কে $\left(\frac{a_1j_1}{a_1j_1}\right) R_1 + Ri$ দ্বারা প্রতিস্থাপিত করি।

Step–2 ঃ উপম্যাট্রিক্স-এর প্রতিটি সারি তৈরি করার সময় Step – 1 পুনরায় প্রয়োগ করি, প্রথম সারি বাদ।

এখানে আমরা উপম্যাট্রিক্সের প্রথম কলামকে j_2 দ্বারা সূচিত করি যেন এর মান অশূন্য হয়। সুতরাং Step–2 এর শেষ পর্যায়ে আমরা পাই,

$a_2j_2 \neq 0$

Step –3 ঃ এতে $\pi + 1$, ধারাবাহিকভাবে উপরের পদ্ধতি প্রয়োগ করি যতক্ষণ পর্যন্ত উপম্যাট্রিক্স এ অশূন্য উপাদান না আসে।

Remark –1 ঃ Step–1 (b) এর মধ্যে সংখ্যা

$m = \frac{ai_1}{a_{11}} = \frac{\text{সহগ উঠাতে হবে}}{\text{Pivot}}$ একে গুণক বলা হয়।

Remark – 2 ঃ Step 1 (b) এর অপারেশন নিম্নলিখিতভাবে পরিবর্তন করা যাবে,

$ri = -aij_1R_1 + a_1j_1Ri$

যদি সকল স্কেলার রাশি পূর্ণ সংখ্যা হয় তবে ভগ্নাংশ পরিত্যাগ করা উচিত।

Algorithm –2 ঃ

ধরি input ম্যাট্রিক্স

$A = [a_{ij}$ in echelon form এ Pivot হিসেবে

$a_1j_1, a_2j_2, a_3j_3 \ldots a_r j_r$ ধরতে হবে]

ধাপ 1(a) শেষ অশূন্য R_r সারিকে $\frac{1}{a_2j_r}$ দ্বারা গুণ করতে হবে যেমন Pivot হিসেবে 1 পাই।

(b) $a_2j_r = 1$ কে Pivot হিসেবে ধরে Pivot এর উপরের উপাদানগুলি শূন্য করতে হবে। অর্থাৎ $i = r - 1, r - 2 \ldots 1$

(1) Set $m = a_ir_i$

(2) Add mRr to R_i

অপর পক্ষে, মৌলিক Row operation প্রয়োগ করে $R_i = -$ air, $R_r + R_i$

ধাপ 2 to r–1 ধাপ 1 পুন ঃ প্রয়োগ করি।

$R_r - 1, R_{r-2}, R_{r-3} .. R_2$ সারির জন্য ধাপ r. R_1 কে $\frac{1}{a_1j_1}$ দ্বারা গুণ করি।

৩৪। দেয়া আছে, $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 4\end{bmatrix}$

$\therefore A^T=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\\ 0 & 4\end{bmatrix}$

$\therefore AA^T=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\\ 0 & 4\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1+4+0 & 3-2+0\\ 3-2+0 & 9+1+16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 1 & 26\end{bmatrix}$

আবার $A^TA=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\\ 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 4\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1+9 & 2-3 & 0+12\\ 2-3 & 4+1 & 0-4\\ 0+12 & 0-4 & 0+16\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}10 & -1 & 12\\ -1 & 5 & -4\\ 12 & -4 & 16\end{bmatrix}$

৩৫। দেয়া আছে, $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -7\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & 0 & -4\\ 3 & -2 & 6\end{bmatrix}$

$AB=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0 & -4\\ 3 & -2 & 6\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}3+9 & 0-6 & -4+14\\ 6-21 & 0+10 & -8-42\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}12 & -6 & 14\\ -15 & 14 & -50\end{bmatrix}$

৩৬। প্রথমে ম্যাট্রিক্স $M=[A, I]$ গঠন করি,

$$M=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\begin{matrix}\\ R\phi_2\sim R_2-2R_1\\ R\phi_3\sim R_3-4R_1\end{matrix}$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1\end{array}\right]\ R'_3\sim R_3+R_2$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1\end{array}\right]\begin{matrix}\\ R\phi_2\sim R_2-2R_3\\ R\phi_3\sim -R_3\end{matrix}$$

এটা হল Row echeelan form এবার ম্যাট্রিক্সে রো কেনোনিকেল ফর্মে নিয়ে যাই।

$$M\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2\\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1\end{array}\right]\ R'_2\sim -R_2$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1\end{array}\right]\ M=[I, A^{-1}]\ \text{ফর্ম}$$

এখানে $\begin{bmatrix}-11 & 2 & 2\\ 4 & 0 & 1\\ -6 & -1 & -1\end{bmatrix}$

▶▶ সমস্যাবলি ঃ

১। তিনটি ভেক্টর, $u = (2, -7, 1)$; $v = (-3, 0, 4)$ এবং $w = (0, 5, -8)$ দেয়া আছে।

(a) $u + v = (2, -7, +1) + (-3, 0, 4)$
$= (2 - 3, -7 + 0, 1 + 4)$
$= (-1, -7, 5)$

(b) $v + w = (-3, 0, 4) + (0, 5, -8)$
$= (-3, +0, 0 + 5, 4 - 8) = (-3, 5, -4)$

(c) $-3u = -3(2, -7, 1) = (-6, 21, -3)$

(d) $-w = -(0, 5, -8) = (0, -5, 8)$

(e) $3u - 4v = 3(2, -7, 1) - 4(-3, 0, 4)$
$= (6, -21, 3) + (12, 0, -16)$
$= (18, -21, -13)$

(f) $2u + 3v - 6w$
$= 2(2, -7, 1) + 3(-3, 0, 4) - 5(0, 5, -8)$
$= (4, -14, 2) + (-9, 0, 12) + (0, -25, 40)$
$= (-5, -39, 54)$

(g) $u.v = 2(-3) - 7(0) + 1(4)$
$= -6 + 0 + 4 = -2$

(h) $u.w = 2(0) - 7(5) + 1(-8) = 0 - 35 - 8$
$= -43$

(i) $v.w = -3(0) + 0(5) + 4(-8)$
$= 0 + 0 - 32 = -32$

২। $\| u \|$; যেখানে - (a) $u = (3, -12, -4)$; (b) u
$= (2, -3, 8, -7)$

(a) $\|u\|^2 = (3)^2 + (-12)^2 + (-4)^2 = 9 + 144 + 16 = 169$
$\therefore \| u \| = \sqrt{169} = 13$

(b) $\|u\|^2 = (2)^2 + (-3)^2 + (8)^2 + (-7)^2 = 4 + 9 + 64 + 49$
$= 126$
$\therefore \| u \| = \sqrt{126} = 11.2249$

৩। দেয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}$

(a) $A + B = \begin{bmatrix} 1+1 & 2+(-1) & -3+2 \\ 4+0 & -5+3 & 6+(-5) \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $3A = \begin{bmatrix} 3(1) & 3(2) & 3(-3) \\ 3(4) & 3(-5) & 3(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 12 & -15 & 18 \end{bmatrix}$

$-4B = \begin{bmatrix} -4(1) & -4(-1) & -4(2) \\ -4(0) & -4(3) & -4(-5) \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} -4 & 4 & -8 \\ 0 & -12 & 20 \end{bmatrix}$

৪। দেয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix}$ এবং

$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

$\therefore 2A - 3B = 2\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 8 & 10 & -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 & 0 & -6 \\ 21 & -3 & -24 \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} -7 & -4 & 0 \\ 29 & 7 & -36 \end{bmatrix}$

৫। দেয়া আছে,

$$3\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+t & 3 \end{bmatrix}$$

বা, $\begin{bmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+4 & x+y+6 \\ z+t-1 & 2t+3 \end{bmatrix}$

$\therefore 3x = x + 4$

বা, $3x - x = 4$

$\therefore 2x = 4$

বা, $x = 2$

$3y = x + y + 6$

বা, $3y - y = 2 + 6$ [$x = 2$ বসিয়ে]

বা, $2y = 8$

$\therefore y = 4$

$3z = z + t - 1$

বা, $3z - z = t - 1$

বা, $2z = t - 1$

$\therefore 2z = 3 - 1$ [$t = 3$ বসিয়ে]

$\therefore 2z = 2$

$\therefore z = \frac{2}{2} = 1$

আবার

$3t = 2t + 3$

বা, $3t - 2t = 3$

বা, $t = 3$

নির্ণেয়, $x = 2,\ y = 4, z = 1$ এবং $t = 3$

৬। (a) $[3, -2, 5]\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$

$= 3(6) - 2(1) + 5(-4) = 18 - 2 - 20 = -4$

(b) $[2, -1, 7, 4]\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}$

$= 2(5) - 1(-3) + 7(-6) + 4(9) = 10 + 3 - 42 + 36 = 7$

৭। দেয়া আছে,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ এবং } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

(a) যেহেতু A হল 2×2 এবং B হল 2×3 ম্যাট্রিক্স। সুতরাং AB নির্ণেয় যোগ্য।

প্রথম সারি ঃ

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$[1\times2 + 3\times3 \quad 1\times0 + 3(-2) \quad 1\times(-4) + 3\times6]$$

$= [2 + 9 \quad 0 - 6 \quad -4 + 18]$

$= [11 \quad -6 \quad 14]$

অনুরূপ ২য় সারি নির্ণয় করে

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= 2\times 2+(-1)\times 3 \quad 2\times 0+(-1)(-2) \quad 2\times(-4)+(-1)\times 6$$

$$= 4-3 \quad 0+2 \quad -8-6$$

$$= 1 \quad 2 \quad -14$$

$$\therefore AB = \begin{bmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 1 & 2 & -14 \end{bmatrix}$$

(b) B হল 2×3 এবং A হল 2×2 ম্যাট্রিক্স। এক্ষেত্রে যেহেতু অন্তঃস্থ সংখ্যা 3 এবং 2 যাহা সমান নয়। সুতরাং BA এর গুণজ নির্ণেয় যোগ্য নয়।

৮। কর্ণ ম্যাট্রিক্স এর উপরের বাম কর্ণার থেকে নিচের ডান কর্ণার নিয়ে গঠিত। অর্থাৎ $[a_{11}, a_{22}, a_{33}]$

$\therefore$ (a) কর্ণ (Diagonal) = $[1, -5, 7]$

(b) কর্ণ (Diagonal) = $[t-2, t+5]$

(c) ডায়াগোনাল বা কর্ণ কেবল স্কয়ার ম্যাট্রিক্স এর ক্ষেত্রে নির্ণেয়যোগ্য

৯। এখানে দেয়া আছে- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

(a) $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1+8 & 2-6 \\ 4-12 & 8+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$$

(b) $A^3 = A.A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 9-16 & -4+34 \\ 36+24 & -16-51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{bmatrix}$$

১০। দেয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ $f(x) = 2x^3 - 4x + 5$ এবং

$$g(x) = x^2 + 2x - 11$$

(a) $f(A) = 2A^3 - 4A + 5.1$

$$= 2\begin{bmatrix} -7 & 30 \\ 60 & -67 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -14 & 60 \\ 120 & -134 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ -16 & +12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -14-4+5 & 60-8+0 \\ 120-16+0 & -134+12+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & 52 \\ 104 & -117 \end{bmatrix}$$

(b) $g(x) - x^2 + 2x - 11$

$\therefore g(A) = A^2 + 2A - 11.1$

$$= \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} - 11\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -11 & 0 \\ 0 & -11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

১১। নির্ণয় কর ঃ

(a) $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} = 4(-2) - 5(-3)$

$= -8 + 15 = 7$

(b) $\begin{bmatrix} a-b & b \\ b & a+b \end{bmatrix} = (a-b)(a+b) - b^2$

$= (a^2 - b^2) - b^2$

$= a^2 - 2b^2$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} = 1(2-15) - 2(-4-0) + 3(20-0)$

$= -13 + 8 + 60$

$= 55$

১২। যদি সম্ভব হয়, তবে নিচের প্রতিটি ম্যাট্রিক্স এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।

(a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

প্রথমেই $|A|$ নির্ণয় করি,

$\therefore |A| = 5(2) - 3(4) = 10 - 12 = -2$

অতএব বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয়ে $\frac{1}{|A|}$ দ্বারা ভাগ ও ডায়াগোনাল সংখ্যাগুলো পরিবর্তন করে পাই,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3/2 \\ 2 & -5/2 \end{bmatrix}$$

(b) দেয়া আছে, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

$M = (A, I)$

$$\therefore M = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\therefore M \sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -2 & 0 & 11 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 27 & -16 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 27 & -16 & 6 \\ 8 & -5 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

(c) দেয়া আছে, $C = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$

$\therefore |C| = -2(-9) - 6(3) = 18 - 18 = 0$ যেহেতু $|C| = 0$

সুতরাং C এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নেই।

১৩। এখানে, $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$

$$\therefore A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-12 & -3+12 \\ 4-16 & -12+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 9 \\ -12 & 4 \end{bmatrix}$$

আবার, $A^3 = A^2.A = \begin{bmatrix} -11 & 9 \\ -12 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -11+36 & 33-36 \\ -12+16 & 36-16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 25 & -3 \\ 4 & 20 \end{bmatrix} \text{ Ans.}$$

১৪। এখানে দেয়া আছে,

$u = (2, 3, -1)$ এবং $\theta = (-5, 1, 8)$

$\therefore u \cdot \theta = (2, 3, -1) \cdot (-5, 1, 8)$

$= 2.(-5) + 3.1 + (-1).8$

$= -10 + 3 - 8$

$= -15$ **Ans.**

এবং $|u| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{4 + 9 + 1}$

$= \sqrt{14}$ **Ans.**

১৫। এখানে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

$$\therefore A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

সুতরাং $A \cdot A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1+4 & 3-2 \\ 3-2 & 9+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} \text{ Ans.}$$

১৬। দেওয়া আছে, $u = (3, -12, -4)$ এবং $v = (2, -7, 1)$

$\therefore u + 2v = (3, -12, -4) + 2(2, -7, 1)$

$= (3, -12, -4) + (4, -14, 2)$

$= (3 + 4, -12 - 14, -4 + 2)$

$= (7, -26, -2)$ **Ans.**

অধ্যায়-৪

গণনা
(Counting)

৪.০ ভূমিকা ঃ

সৃষ্টির শুরু হতেই মানুষ গণনার প্রয়োজন অনুভব করে। সে থেকে মানুষের চিন্তা-চেতনায় সংখ্যার উদ্ভব ঘটে। আজ থেকে প্রায় বিশ-পঁচিশ হাজার বৎসর পূর্বে মানুষ সংখ্যা সম্পর্কে ধারণা লাভ করে। আর যখনই মানুষ সংখ্যা সম্পর্কে ধারণা লাভ করে তখন থেকে মানুষ গণনার কাজ শুরু করে। কালের বিবর্তনে গণনা করার নানাবিধ পদ্ধতি আবিষ্কৃত ও প্রয়োগ হয়।

প্রথমে মানুষ শরীরের অঙ্গ-প্রত্যঙ্গ দ্বারা গণনা শুরু করে। এক্ষেত্রে হাত ও পায়ের আঙ্গুল ব্যবহৃত হতো। কিন্তু হাত ও পায়ের আঙ্গুল দ্বারা বড় বড় হিসেব-নিকেশ করা সম্ভব হয়নি। যার ফলে গণনার কাজ বাধাগ্রস্থ হয়। এরপর পাথর ও নুড়ির যুগ আসল। কারণ যেখানে সেখানে পাথর ও নুড়ি প্রচুর পরিমাণে পাওয়া যায়, যা দিয়ে ইচ্ছামতো গণনার কাজ সম্পন্ন করা যায়। তবে পাথর ও নুড়ি ভারী বিধায় এগুলো স্থানান্তর করা কষ্টকর। এছাড়া অধিক সংখ্যক হিসেব-নিকেশের জন্য অধিক সংখ্যক পাথর ও নুড়ি সংগ্রহ করতে হতো, যা গণনার ক্ষেত্রে অসুবিধা সৃষ্টি করল।

পাথর ও নুড়ি তথা প্রস্তর যুগের পর আসল যান্ত্রিক যুগ। এ যুগে পাথর ও নুড়ি দ্বারা গণনা কার্য কষ্টকর বিধায় মানুষ যন্ত্র আবিষ্কারে সচেষ্ট থাকল এবং অবশেষে গণনাকারী যন্ত্র আবিষ্কারে সমর্থ হল।

আজ থেকে সাড়ে চার হাজার বৎসর পূর্বে চীন দেশে সর্বপ্রথম গণনা কার্যে যন্ত্রের ব্যবহার লক্ষ করা যায়। উক্ত যন্ত্রটির নাম "এ্যাবাকাস"। এই এ্যাবাকাস যন্ত্রটি কাঠের বা ধাতুর ফ্রেমে কতকগুলো তারের সারি। প্রতি সারির মধ্যে কতগুলো পুঁতি থাকত। এই পুঁতির সাহায্যে গণনার কার্য সম্পাদন করা হতো। আজকালও কোন কোন দেশে এ্যাবাকাস যন্ত্রের ব্যবহার দেখা যায়।

১৬২০ সালে ইংরেজ গণিতবিদ "উইলিয়াম অগট্রেড (William Oughtre)" নেপিয়ারের লগারিদম পদ্ধতির ওপর নির্ভর করে "স্লাইড রুল" আবিষ্কার করেন। স্লাইড রুলের সাহায্যে দুটি বড় সংখ্যার গুণ ও ভাগ করা যায়। "স্লাইড রুল" ও "এ্যাবাকাস" যন্ত্র দুটি হস্তচালিত ছিল।

১৬৪২ সালে ফরাসী গণিতজ্ঞ ব্লেইজ প্যাসকেল একটি গণক যন্ত্র আবিষ্কার করেন, যা দিয়ে দুটি বড় সংখ্যার গুণ করা সম্ভব। ১৬৭৩ সালে গণিতবিদ গট ফ্রাইড ভন লিবনিজ যন্ত্রটির উন্নয়ন ঘটিয়ে যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগের ব্যবস্থা করেন।

১৮৩৩ সালে ব্রিটিশ গণিতবিদ চার্লস ব্যাবেজ "অ্যানালাইটিক্যাল ইঞ্জিন" নামে একটি স্বয়ংক্রিয় যন্ত্রের পরিকল্পনা করেন, যা দিয়ে যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ, বর্গ, বর্গমূল ও শতকরা হিসেব করা সম্ভব। ১৮৯০ সালে হলেরিথ এমন একটি যন্ত্র আবিষ্কার করেন যা দিয়ে জনসংখ্যা গণনা ও অফিস আদালতের হিসেব নিকেশ করা সম্ভব।

১৮৭৬ সালে এই হলেরিথ ট্যাবুলেটিং মেশিন কোম্পানী নামে একটি কোম্পানি খোলেন। পরবর্তীতে তিনি দুটি ভিন্ন কোম্পানির সহযোগিতায় ১৯১১ সালে অপর একটি নতুন কোম্পানি IBM (International Business Machine Corporation) প্রতিষ্ঠা করেন যা কিনা বর্তমান বিশ্বের অন্যতম বৃহৎ গণনাকারী তথা কম্পিউটার কোম্পানি।

তবে গণনাকারী যন্ত্রের প্রভূত উন্নয়ন সাধিত হয়েছে উনবিংশ শতাব্দীতে। ১৯৪৬ সালে পেনসিলভেনিয়া বিশ্ববিদ্যালয়ে প্রেসপার ও জন মওসলির নেতৃত্বে এ্যানিয়াক (ENIAC বা Electronic Numerical Integrator and Calculator) আবিষ্কৃত হয়।

এই এ্যানিয়াকই হচ্ছে পৃথিবীর সর্বপ্রথম গণনাকারী ইলেকট্রনিক কম্পিউটার। এটা আকারে বৃহৎ এবং এতে ১৮০০০ ইলেকট্রনিক ভাব সংযুক্ত ছিল। এর পর ট্রানজিস্টর (Transistor) আবিষ্কৃত হল, যা দিয়ে কম্পিউটার তৈরি করা হল। এই ট্রানজিস্টরযুক্ত কম্পিউটার দিয়ে অল্প সময়ে অধিক সংখ্যক গণনা করা সম্ভব এবং কম বিদ্যুৎ খরচ হয়।

তবে সর্বাধিক সাফল্যটি আসে ১৯৬৩ সালের পর। এ সময় আই. সি (Intergrated circuit) আবিষ্কৃত হয়। অনেকগুলো ডায়োড ও ট্রানজিস্টরের মতো বৈদ্যুতিক যন্ত্রাংশ দিয়ে যে Circuit তৈরি হয় তাকে ইনটিগ্রেটেড সার্কিট বলা হয়। এর সংযোগে তৈরি কম্পিউটার সর্বাধিক দ্রুত গতিতে এবং স্বল্প সময়ে গণনা তো বটেই আরো নানাবিধ কার্য অত্যন্ত সুনিপুণভাবে করা সম্ভব হয়।

৪.১ গণনার সংজ্ঞা (Definition of counting) ঃ

সরল বিশ্লেষণার্থে, যা বিন্যাস, সমাবেশ এবং বিভক্তিকরণ নিয়ে আলোচনা করে, প্রতিটি ক্ষেত্রে সমাপ্তকরণ সম্ভব না হলেও কিছু ঘটনার যুক্তিসংগত সম্ভাবনাকে (Possibilities) নিরূপিত করে তাকে গণনা বা কাউন্টিং (Counting) বলা হয়।

কাউন্টিং (Counting) বা গণনার মূলনীতি হলো দুটি যাকে "প্রকৃত গণনা নীতি" (Basic Counting Principle) বলা হয়। এগুলো হলো–

১। যোজন মূলনীতি (Sum Rule Principle); ২। গুণন মূলনীতি (Product Rule Principle)।

নিম্নে এই দুটি মূলনীতি সম্পর্কে সংক্ষেপে আলোচনা করা হলো।

গণনার যোজন বিধি (Sum Rule Principle) ঃ ধরা যাক, P থেকে Q-তে যেতে 3টি পৃথক পথ আছে এবং Q থেকে R-এ যেতে 5টি পৃথক পথ আছে। লোকটি কত প্রকারে P থেকে Q-এ যেতে পারে?

চিত্র থেকে এটা স্পষ্ট যে, লোকটি P থেকে Q তে 3টি পৃথক পথে যেতে পারে এবং Q থেকে R-এ যাওয়ার 5টি পথ আছে। যেহেতু, P থেকে Q-তে যাওয়ার প্রতিটি পথের জন্য Q থেকে R- এ যাওয়ার 5টি পথ আছে। অতএব, লোকটি P থেকে Q হয়ে R-এ মোট $3 + 3 + 3 + 3 + 3$ অথবা $3 \times 5 = 15$ প্রকারে যেতে পারে। এখানে আমরা যে যোজন বিধি তত্ত্বটি ব্যবহার করেছি তা নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়।

যদি p সংখ্যক বিভিন্ন পদ্ধতিতে কোন একটি কাজ সম্পন্ন করা যায় এবং এ পদ্ধতিগুলোর একটি পদ্ধতিতে কাজটি সম্পাদিত হওয়ার পর যদি দ্বিতীয় একটি কাজ q সংখ্যক বিভিন্ন পদ্ধতিতে সম্পন্ন করা যায়, তাহলে কাজ দুটি একত্রে $p \times q$ সংখ্যক পদ্ধতিতে সম্পন্ন করা যাবে। এটাই গণনার গুণন বিধি।

এ বিধিটিকে একটি সাধারণ বিধিতে পরিণত করা যায়।

উপরের দুটি কাজ $p \times q$ সংখ্যক পদ্ধতির একটি পদ্ধতিতে সম্পাদিত হওয়ার পর তৃতীয় একটি কাজ r সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করা গেলে তিনটি কাজ একত্রে $p \times q \times r$ সংখ্যক উপায়ে সম্পন্ন করা যায়।

আর সাধারণভাবে বললে ধরা যাক, একটি ঘটনা E_1 ঘটতে পারে n_1 পথে, ২য় ঘটনা E_2 ঘটতে পারে n_2 পথে, ৩য় ঘটনা E_3 ঘটতে পারে n_3 পথে -------- এবং মনে করি যে, এদের মধ্যে ২টি ঘটনা কখনই একই সময়ে ঘটবে না। তখন ঘটনাগুলোর মধ্যে একটি ঘটনা $n_1 + n_2 + n_3 +$ ------ পথে ঘটবে।

উদাহরণ-৪.১।

(a) কোন ক্লাশে 8 জন পুরুষ অধ্যাপক ও 5 জন মহিলা অধ্যাপক ক্যালকুলাস পড়ান। একজন ছাত্র ক্যালকুলাস পড়ার জন্য একজন অধ্যাপক কত উপায়ে বাছাই করতে পারে?

সমাধান ঃ একজন ছাত্র 8 জন পুরুষ অধ্যাপক ও 5 জন মহিলা অধ্যাপক থেকে একজনক্যালকুলাস অধ্যাপক বাছাই করতে পারে

$= 8 + 5 = 13$ উপায়ে।

(b) ধরি, E হল 10 এর চেয়ে ছোট প্রাইম সংখ্যা (Prime Number) এর ঘটনা এবং F হল 10 এর চেয়ে ছোট জোড় সংখ্যার ঘটনা। তখন (i) E অথবা F এবং (ii) E অথবা কত উপায়ে ঘটতে পারে?

সমাধান ঃ এখানে E হল 10 এর চেয়ে ছোট প্রাইম সংখ্যা (Prime Number) এর ঘটনা এবং F হল 10 এর চেয়ে ছোট জোড় সংখ্যার ঘটনা।

সুতরাং E ঘটতে পারে [2, 3, 5, 7] উপায়ে,

এবং F ঘটতে পারে {2, 4, 6, 8} উপায়ে।

যদিও E এবং F ঘটতে পারে না $4 + 4 = 8$ উপায়ে।

যেহেতু 2 হল 10 এর ছোট মৌলিক সংখ্যা এবং 10 এর ছোট জোড় সংখ্যা।

2 সংখ্যাটি দু জায়গায় আছে। অতএব, E অথবা F কেবল ঘটতে পারে $= 4 + 4 - 1 = 7$ উপায়ে।

২। গুণবোধক মূলনীতি (Product Rule Principle) ঃ

মনে করি, একটি ঘটনা (Event) E আছে যা m উপায়ে ঘটতে পারে এবং আর একটি ঘটনা (Event) F যা n উপায়ে ঘটতে পারে। E এবং F এর একত্রিকরণে এরা mn উপায়ে ঘটতে পারে। আরও সহজ কথায় বলা যায়, ধরা যাক, একটি ঘটনা E_1, n_1 উপায়ে ঘটতে পারে, E_1 কে অনুসরণ করে ২য় ঘটনা E_2, n_2 উপারে ঘটতে পারে এবং E_2 কে অনুসরণ করে ৩য় ঘটনা E_3, n_3 উপায়ে ঘটতে পারে এবং অনুরূপভাবে E_4, E_5 ------- ঘটে n_4, n_5------ উপায়ে। তখন সবগুলো ঘটনা ঘটার ক্রম উপায় হবে–

$= n_1, n_2, n_3, n_4$ ---------- and So on

উদাহরণ-৪.২।

(a) ধরা যাক, একটি গাড়ির লাইসেন্স প্লেটে 2টি লেটার ও 3টি ঘর (digits) নিয়ে গঠিত যার প্রথম ঘরটি (digit) শূন্য (zero) নয়। কতগুলো লাইসেন্স প্লেট প্রিন্ট করা সম্ভব?

সমাধান ঃ এখানে গাড়ির লাইসেন্স প্লেট 2টি লেটার ও 3টি ঘর (digits) নিয়ে গঠিত যাতে প্রথম সংখ্যা বা ঘর 0 (zero) হবে না। অতএব, প্রতিটি লেটার 26 উপায়ে প্রিন্ট করা যাবে। প্রথম ঘরটি 9 উপায়ে ও অন্যান্য 2টি ঘরের প্রতিটি 10 উপায়ে প্রিন্ট করা যাবে। সেজন্য,

26. 26. 9. 10. 10 = 608400 ভিন্ন প্লেট প্রিন্ট করা যাবে।

(1) যোগ বোধক মূলনীতি (sum Rule Principle) ঃ

যদি A এবং B বিযুক্ত বা সংযোগহীন (Disjoint) সেট হয়,

তখন $n(A \simeq B) = n(A) + n(B)$

(2) গুণবোধক মূলনীতি (Product Rule Principle) ঃ

যদি $A \times B$ কার্তেসীয় গুণবিশিষ্ট সেট হয়, তখন

$n(A \times B) = n(A).\ n(B)$

৪.১.১ গুণিয়ক ব্যবহার বিধি (Factorial Notation) ঃ

1 থেকে n পর্যন্ত যোগবোধক পূর্ণ সংখ্যার গুণকে n! দ্বারা প্রকাশ করা হয়। এখানে n! (read "n factorial")

$\therefore n! = 1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ldots\ldots\ldots (n-2)\ (n-1)\ n$

এছাড়া n! নির্ণয়ে

$1! = 1$ এবং $n! = n.(n-1)!$

এখানে $0! = 1$

উদাহরণ-৪.৩। (a) 2!, 3!, 4!, 5!, 6! এর মান কত?

সমাধান ঃ

$2! = 1.2 = 2$

$3! = 1.\ 2.3 = 6$

$4! = 1.\ 2.3.4 = 24$

$5! = 5.\ 4! = 5.24 = 120$

$6! = 6.5! = 6.120 = 720$

(b) (i) $\frac{8!}{6!}$ (ii) 12, 11, 10 (iii) $\frac{12.\ 11.10}{1.2.3}$ এর গণনা কর।

সমাধান ঃ (i) $\frac{8!}{6!} = \frac{8.\ 7.\ 6!}{6!} = 8.7 = 56$

(ii) $12.\ 11.\ 10 = \frac{12.\ 11.\ 10.\ 9!}{9!} = \frac{12!}{9!}$

(iii) $\frac{12.\ 11.10}{1.2.3} = 12.\ 11.\ 10.\ \frac{1}{3!} = \frac{12!}{3!\ 9!}$

(c) (i) $n(n-1)$ ---------- $(n-r+1)$ এর মান কত?

(ii) $\frac{n(n-1) \ldots\ldots\ldots (n-r+1)}{1.2.3. \ldots\ldots\ldots (r-1)r}$ এর মান বের কর।

সমাধান ঃ

(i) $n(n-1)$ -------- $(n-r+1)$

$$= \frac{n(n-1) \ldots\ldots\ldots (n-r+1)(n-r)(n-r+1) \ldots\ldots 3.2.1}{(n-r)(n-r-1) \ldots\ldots 3.2.1}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

(iii) $\frac{n(n-1) \ldots\ldots\ldots (n-r+1)}{1.2.3. \ldots\ldots\ldots (r-1)r}$

$$= n(n-1) \ldots\ldots\ldots (n-r+1)\frac{1}{r!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!} \cdot \frac{1}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

৪.২ দ্বিপদী সহগ ও পাস্কেলের ত্রিভুজ (Binomial co-efficeients and pascal's Triangle) ঃ

দ্বিপদী সহগ বা (Binomial Co-efficients) ঃ

প্রতীক $\binom{n}{r}$ বা $({}^nC_r)$, যেখানে r এবং n যোগবোধক পূর্ণসংখ্যা; $r \le n$ হয়, তখন একে নিম্নরূপ সংজ্ঞায়িত করা যায়,

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2) \ldots\ldots\ldots (n-r+1)}{1.2.3. \ldots\ldots\ldots (r-1)r}$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

কিন্তু $n-(n-r) = r$; তখন

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

অতএব $\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$

অনুরূপভাবে, যদি $a+b=n$ হয়,

তখন $\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$

$\binom{n}{r}$, এই সংখ্যাকে দ্বিপদী সহগ (Binomial Co-efficient) বলা হয়।

যেহেতু এই সহগটি $(a+b)^n$ এর বিস্তৃতিতে আছে। সুনির্দিষ্টভাবে প্রমাণ করতে পারি যে, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ একে নিম্নরূপভাবেও প্রকাশ করা যায়। যেমন,

$${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

এবং ${}^nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$

উদাহরণ-৪.৪। মান নির্ণয় কর ঃ $\binom{8}{2}, \binom{9}{4}, \binom{12}{5}, \binom{10}{3}, \binom{13}{1}$

সমাধান

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\,(8-2)!} = \frac{8!}{2!\,6!}$$

$$= \frac{8.7.6!}{1.2.6!} = \frac{8.7}{1.2}$$

$$= 4.7 = 28$$

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!\,(9-4)!}$$

$$= \frac{9!}{1.2.3.4.5!} \quad \frac{9.8.7.7.5!}{1.2.3.4.5!}$$

$$= 3.2.7.3$$

$$= 126$$

$$\binom{12}{5} = \frac{12!}{5!\,(12-5)!}$$

$$= \frac{12!}{5!\,7!} \quad \frac{12.11.10.9.8.7!}{1.2.3.4.5.7!}$$

$$= 6.11.2.3.2 = 792$$

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!}$$

$$= \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10.9.8.7!}{1.2.3.7!}$$

$$= 10.3.4 = 120$$

$$\binom{13}{1} = \frac{13!}{1!\,(13-1)!}$$

$$= \frac{13!}{1!\,12!} = \frac{13.12!}{1!\,12!}$$

$$= 13$$

উদাহরণ-৪.৫। দ্বিপদী সহগ এর সংজ্ঞা অনুযায়ী $\binom{10}{7}$ **এর মান নির্ণয় কর।**

সমাধান

$$\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!\,(10-7)!} = \frac{10!}{7!\,3!} = \frac{10.9.8.7.6.5.4.3!}{1.2.3.4.5.6.7.3!} = 10.3.4$$

$$= 120$$

এছাড়া, $10 - 7 = 3$

অতএব $\binom{10}{7}$ কে নিম্নরূপভাবেও নির্ণয় করা যায়।

$$\binom{10}{10-7} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!}$$

$$= \frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10.9.8.7!}{1.2.3.7!}$$

$$= 10.3.4 = 120$$

উদাহরণ-৪.৬। 10 সদস্যের একটি টেনিস দল থেকে 5 জন খেলোয়াড় কত উপায়ে নির্বাচন করা যাবে, যারা অন্য পলিটেকনিকের সাথে খেলতে পারবে?

সমাধান ঃ এখানে 10 সদস্যের টেনিস দল থেকে 5 জন খেলোয়াড় নির্বাচন করতে হবে, যারা অন্য পলিটেকনিকের সাথে ম্যাচে অংশ নিবে। এটা দ্বিপদী সহগ অনুযায়ী নির্বাচন করা যাবে।

$$\text{অর্থাৎ, } \binom{10}{5} = \frac{10!}{5!\,(10-5)!}$$

$$= \frac{10!}{5!\,5!}$$

$$= \frac{10.9.8.7.6.5!}{1.2.3.4.5.5!}$$

$$= 2.3.2.7.3 = 252$$

পাস্কেলের ত্রিভুজ বা ট্রায়াংগল (Pascal's Triangle) ঃ $(a + b)$ এর বিস্তৃতির সহগগুলোকে শ্রেণিবদ্ধ ত্রিকোণাকৃতিভাবে সাজানোকে প্যাসকেলের ত্রিভুজ (Pascals Triangle) বলে।

ধরি, n এর মান 0 থেকে 6 পর্যন্ত বসিয়ে $(a + b)$ এর বিস্তৃতি করলে প্যাসকেলের ত্রিভুজ অংকিত হয়।

$n = 0$ হলে $(a + b)^0 = 1$

$n = 1$ হলে $(a + b)^1 = a + b$

$n = 2$ হলে $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

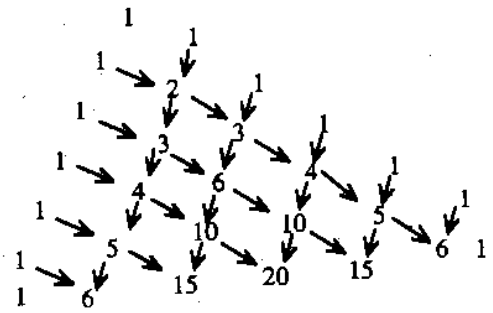
$n = 3$ হলে $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$n = 4$ হলে $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$n = 5$ হলে $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

$n = 6$ হলে $(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

পূর্বের পৃষ্ঠায় বর্ণিত $(a + b)^n$ এর বিস্তৃতি a এবং b সম্বলিত পদের সহগ (পাসকেল ত্রিভুজ) গুলো সংগ্রহ করে, ত্রিভুজ আকারে সাজিয়ে নিম্নলিখিত ত্রিভুজ পাই।



চিত্র ঃ প্যাসকেল ত্রিভুজ

প্যাসকেল ত্রিভুজের সংখ্যাগুলোর নিম্নলিখিত ধর্ম বা শর্ত (Intersecting properties) রয়েছে ঃ

(i) প্রতি সারির ১ম এবং শেষ সংখ্যা 1

(ii) শ্রেণিবদ্ধভাবে সাজানো যে কোন সংখ্যা পাওয়া যাবে, এর উপরের কোনাকুনিভাবে অবস্থিত দু'টি সংখ্যাকে যোগ করলে। যেমন ঃ $10 = 4 + 6$, $15 = 5 + 10$, $20 = 10 + 10$

(iii) ১ম সারিতে 1 টি সংখ্যা, ২য় সারিতে 2টি সংখ্যা ৩য় সারিতে 3টি সংখ্যা, ৪র্থ সারিতে 4টি সংখ্যা ইত্যাদি।

(iv) যে কোন সারির ১ম বা শেষ থেকে ২য় পদটি হবে তার আগের সারির ১ম ও ২য় পদের সমষ্টি, আবার যে কোন সারির ১ম বা শেষ থেকে ৩য় পদটি হবে তার আগের সারির ২য় এবং ৩য় পদের সমষ্টি, ইত্যাদি।

সুতরাং নিম্নলিখিত উপপাদ্য (সূত্র) অনুসরণ করে প্যাসকেলের ত্রিভুজ গঠিত হয়।

উপপাদ্য-৪.১ ঃ প্রমাণ কর যে, $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$ [বাকাশিবো-২০০৪]

অথবা, ${}^{n+1}C_r = {}^nC_{r-1} + {}^nC_r$

সমাধান ঃ

ডানপক্ষ

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!} + \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

এখন ১ম সংখ্যাকে $\frac{r}{r}$ এবং ২য় সংখ্যাকে $\frac{n-r+1}{n-r+1}$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$= \frac{rn!}{r(r-1)!\,(n-r+1)!} + \frac{(n-r+1)\,n!}{r!\,(n-r+1)\,(n-r)!}$$

$$= \frac{r\,n!}{r!\,(n-r+1)!} + \frac{(n-r+1)\,n!}{r!\,(n-r+1)!} = \frac{rn! + (n-r+1)\,n!}{r!\,(n-r+1)!}$$

$$= \frac{(r+n-r+1)\,n!}{r!\,(n-r+1)!} = \frac{(n+1)\,n!}{r!\,(n+1-r)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{r!\,(n+1-r)!} = \binom{n+1}{r} \text{ বা } {}^{n+1}C_r$$

= বামপক্ষ

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

৪.২.১ বিন্যাস ও সমাবেশ (Permutation and Combination) ঃ

বিন্যাস (Permutation) ঃ

n সংখ্যক বস্তুর সেট থেকে প্রতিবার r সংখ্যক বস্তু নিয়ে যতগুলো অর্ডার তৈরি করা যায় (যতভাবে সাজানো যায়) তার সমষ্টিকে বিন্যাস (Permutation) বলে (n ও r যোগ বোধক পূর্ণসংখ্যা এবং $n \geq r$)

এ বিন্যাসকে ${}^nP_r$ চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়। ${}^nP_r$ কে $P(n, r)$, ${}_nP_r$, $P_{n,r}$ ইত্যাদি নোটেশনে ও লেখা যায়।

ব্যাখ্যা ঃ মনে করি A, B, C, D নামের 4টি বস্তু নিম্নের ৩টি খালি ঘরে রাখতে হবে।

১ম ঘরে আমরা 4টি বস্তুর যে কোন 1টা বস্তু রাখতে পারি। অর্থাৎ 4ভাবে ১ম ঘর পূরণ করতে পারি। এর পর 3টি বস্তু দ্বিতীয় ঘরে 3 ভাবে রাখা যায়। এরপর অবশিষ্ট 2টি বস্তু তৃতীয় ঘরে 2 ভাবে রাখা যায়। অর্থাৎ 3টি ঘরে মোট $4 \times 3 \times 2 = 24$ ভাবে বস্তু রাখা যায়।

∴ এখানে বস্তু সংখ্যা 4টি, একবারে 3টি বস্তু নিয়ে সাজাতে হবে,

অর্থাৎ ${}^4p_3 = \frac{\lfloor 4}{\lfloor (4-3)} = \frac{\lfloor 4}{\lfloor 1} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1} = 24$

উপপাদ্য-৪.২।

n, r যোগবোধক বা অধনাত্মক সংখ্যা এবং, $r < n$ হলে ${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

$$= \frac{n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,\ldots\,(n-r+1)\,(n-r)!}{(n-r)!}$$

$$= n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,\ldots\,(n-r+1)!\ \ldots\ (i)$$

উদাহরণ-৪.৭।

POLYTECHNIC শব্দ থেকে প্রতিবার 5টি বর্ণ নিয়ে কতভাবে সাজানো যায়?

সমাধান এখানে যে কোন বর্ণ ২বার নেই।

অতএব মোট বর্ণ সংখ্যা 11, এ 11টি বর্ণ থেকে প্রতিবার 5টি বর্ণ নিয়ে সাজাতে হবে।

অতএব মোট বিন্যাস সংখ্যা ${}^{11}p_5$

অতএব, মোট 55440 ভাবে সাজানো যায়

উদাহরণ-৪.৮।

FIRST শব্দ থেকে প্রতিবারে 4টি বর্ণ নিয়ে কতভাবে বিন্যাস করা যায়।

সমাধান

FIRST শব্দ 5টি বর্ণ আছে। প্রতি বর্ণই ভিন্ন। প্রতিবার 4টি বর্ণ নিয়ে বিন্যাস করতে হবে। অতএব বিন্যাস সংখ্যা

$${}^5p_4 = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = \frac{5\times4\times3\times2}{1} = 120$$

মোট 120 ভাবে বর্ণ সাজানো যাবে।

অনুসিদ্ধান্ত-১।

যদি n সংখ্যক বস্তুর মধ্যে সবগুলো একসঙ্গে নিয়ে বিন্যাস করা হয় তবে বিন্যাস সংখ্যা ${}^np_n = n!$।

প্রমাণ ঃ (i) নং সূত্রে $r = n$ বসিয়ে নির্ণয় করা যায়।

$${}^np_r = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-r+1)$$
$$= n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-n+1)$$
$$= n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots3.2.1$$
$$= \lfloor n \text{ বা } n!$$

উদাহরণ-৪.৯।

SECOND শব্দটি থেকে প্রতিবারে সব বর্ণ নিয়ে সাজাতে হবে। এখানে মোট বর্ণ সংখ্যা 6টি। কোন বর্ণ দ্বিতীয়বার নেই।

অতএব বিন্যাস সংখ্যা ${}^6p_6 = 6! = 6\times5\times4\times3\times2 = 720$

অর্থাৎ SECOND শব্দটির বর্ণগুলোকে মোট 720 ভাবে সাজানো যায়।

অনুসিদ্ধান্ত-২।

n সংখ্যক বস্তু থেকে সবগুলো একত্রে নিয়ে সাজাতে হবে। n সংখ্যক বস্তুর মধ্যে n_1 সংখ্যক বস্তু একই রকম আবার n_2 সংখ্যক বস্তু একই রকম, n_3 সংখ্যক বস্তু একই রকম।

n_r সংখ্যক বস্তু একই রকম,

অতএব, বিন্যাস সংখ্যা

$$p(n, n_1, n_2, n_3, \ldots, n_r) = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!\ldots n_r!}$$

উদাহরণ-৪.১০। 'ENGINEERING' শব্দটির সবগুলো বর্ণ একসাথে নিয়ে কতভাবে বিন্যাস করা যায়?

সমাধান

এখানে E সংখ্যাটি রয়েছে 3 বার, N সংখ্যাটি আছে 3 বার; I সংখ্যাটি আছে 2 বার, G সংখ্যা আছে 2 বার। আর শব্দটিতে মোট বর্ণ আছে 11 বার।

$$\text{অতএব বিন্যাস সংখ্যা } = \frac{11!}{3!\,3!2!2!} = \frac{11\times10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2}{3\times2\times3\times2\times2\times2}$$
$$= \frac{39916800}{144} = 277200$$

$\therefore$ 277200 রকমের সাজানো যাবে।

উদাহরণ-৪.১১। 'DHAKA' শব্দের বর্ণগুলোর সবগুলো একত্রে নিয়ে কতভাবে সাজানো যায়?

সমাধান এখানে বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{2}$

$= 60$

60 রকমভাবে সাজানো যাবে।

সমাবেশ (Combination) ঃ

ধরা যাক, একজনের কাছে n সংখ্যক ভিন্ন বস্তু আছে, ঐ ব্যক্তি যদি অন্য কোন ব্যক্তিকে একত্রে r সংখ্যক বস্তু দিতে চায়, তবে কত ভাবে দিতে পারবে। যতভাবে অপর ব্যক্তিকে বস্তু দেয়া যাবে তাকে সমাবেশ বলে।

সংজ্ঞা ঃ কতগুলি জিনিস হতে কয়েকটি বা সবগুলি একত্রে নিয়ে এদের ক্রম বিবেচনা না করে যত রকম বাছাই করা যায় বা যতগুলি দল গঠন করা যায় তাদের প্রত্যেকটিকে এক একটি সমাবেশ বলে।

যেমন ঃ a, b, c, d চারটি অক্ষর হতে চারটি নিয়ে বাছাই করা যায় = abcd একবার।

দু'টি করে অক্ষর বাছাই করা যায় ab, ac, ad, bc, bd, cd ছয়বার। তিনটি করে অক্ষর বাছায় করা যায় abc, abd, bcd, acd চারবার একটি করে নিয়ে বাছাই করা যায়, a, b, c, d চারবার।

n সংখ্যক জিনিস হতে r সংখ্যক জিনিস একবারে নিয়ে যতগুলি সমাবেশ গঠন করা যায় তার সংখ্যা প্রকাশ করা হয় ${}^nC_r$ বা $C(n, r)$ বা ${}_nC_r$ বা $C_{n,r}$ দ্বারা।

উপপাদ্য-৪.৩।

n, r যোগবোধক বা অঋণাত্মক সংখ্যা এবং $r < n$ হলে

$${}^nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \frac{{}^nP_r}{r!}\left[\because {}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}\right]$$

উদাহরণ-৪.১২। প্রমাণ কর যে, ${}^nC_r = \binom{n}{r}$

অথবা, $C(n, r) = \binom{n}{r}$

প্রমাণ ঃ সমাবেশের সূত্র অনুসারে আমরা পাই,

$${}^nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} \quad \ldots\ldots\ldots (i)$$

দ্বিপদী সহগ এর সূত্র অনুসারে

$$\frac{n!}{(n-r)!\,r!} = \binom{n}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$$

∴ সমীকরণ (i) ও (ii) নং হতে আমরা পাই,

$${}^nC_r = \binom{n}{r}$$

বা, $C(n, r) = \binom{n}{r}$ [${}^nC_r$ এবং $C(n, r)$ একই]

উদাহরণ-৪.১৩। 10 জন ব্যক্তির মধ্য থেকে 5 জনকে লইয়া একটি কমিটি করতে হলে কতভাবে কমিটি গঠন করা যায়?

সমাধান

মোট লোকসংখ্যা 10 জন

প্রতিবারে নিতে হবে 5 জন

কমিটি গঠন প্রক্রিয়া $= {}^{10}C_5$

$$= \frac{\lfloor 10}{\lfloor (10-5) \lfloor 5} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times \lfloor 5}{\lfloor 5 \lfloor 5}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2}$$

$= 252$

∴ 252 প্রকারে কমিটি গঠন করা যায়।

উদাহরণ-৪.১৪। মান নির্ণয় কর $\binom{8}{2}, \binom{9}{4}, \binom{12}{5}, \binom{10}{7}$

সমাধান $\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\,(8-2)!} = \frac{8!}{2!6!} = 28$

$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!\,(9-4)!} = \frac{9!}{4!\,5!} = 126$

$\binom{12}{5} = \frac{12!}{5!\,(12-5)!} = \frac{12}{5!7!} = 792$

$\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!\,3!} = 120$

অনুসিদ্ধান্ত-৩।

n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিস থেকে n সংখ্যক জিনিস নেয়ার সংখ্যা ${}^nC_n$ এবং যেহেতু সবগুলো জিনিস একত্রে কেবল একবার নেয়া যায়

$\therefore {}^nC_n = 1$

প্রমাণ ঃ আমরা জানি,

$${}^nC_r = \frac{\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r}$$

$$\therefore {}^nC_r = \frac{\lfloor n}{\lfloor n \lfloor n-n} = \frac{\lfloor n}{\lfloor n \,.\, 1} = 1$$

$\therefore {}^nC_n = 1$

অনুসিদ্ধান্ত-৫। n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিসের প্রতিবারে rটি নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা, n সংখ্যক জিনিসের প্রতিবারে $(n-r)$ টি নিয়ে সমাবেশ সংখ্যার সমান

অর্থাৎ ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$

প্রমাণ ঃ আমরা জানি, ${}^nC_r = \frac{n!}{n!\,(n-r)!}$

এবং ${}^nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\,(n-n+r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

$= {}^nC_r$

$\therefore {}^nC_r = {}^nC_{n-r}$ **(প্রমাণিত)**

এরূপ সমাবেশকে সম্পূরক সমাবেশ বলে।

অতএব, আমরা বলতে পারি

"n সংখ্যক বস্তু থেকে r সংখ্যক বস্তু নেয়ার সমাবেশ (বিভিন্ন পদ্ধতি) সংখ্যা

n–r সংখ্যক বস্তু নেয়ার সমাবেশ (বিভিন্ন পদ্ধতি) সংখ্যা এর সমান।

$\therefore {}^nC_r = {}^nC_{n-r}$

উদাহরণ-৪.১৫।

যদি ${}^nC_{12} = {}^nC_8$ হয়, তবে ${}^{22}C_n$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান এখানে ${}^nC_{12} = {}^nC_8$

$\therefore {}^nC_{n-12} = {}^nC_8$

বা, $n - 12 = 8$

$n = 20$

$$\therefore {}^{22}C_n = {}^{22}C_{20} = \frac{22!}{20!\,(22-20)!} = \frac{22 \times 21 \times 20!}{20! \times 2!} = \frac{22 \times 21}{2}$$

$= 231$

উদাহরণ-৪.১৬।

$^nC_r : {}^nC_{r+1} : {}^nC_{r+2} = 1 : 2 : 3$ দেয়া আছে n এবং r এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান $^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

$$^nC_{r+1} = \frac{n!}{(r+1)!\,(n-r-1)!}$$

$$^nC_{r+2} = \frac{n!}{(r+2)!\,(n-r-2)!}$$

$$\frac{^nC_{r+1}}{^nC_r} = \frac{n!}{(r+1)!\,(n-r-1)!} \times \frac{r!(n-r)!}{n!}$$

$$= \frac{r!\,(n-r)!}{(r+1)\,r!\,(n-r-1)!} = \frac{(n-r)!}{(r+1)\,(n-r-1)!}$$

$$= \frac{(n-r)\,(n-r-1)!}{(r+1)\,(n-r-1)!} = \frac{n-r}{r+1}$$

অনুরূপভাবে,

$$\frac{^nC_{r+2}}{^nC_{r+1}} = \frac{n-r-1}{r+2}$$

প্রশ্নমতে, $\frac{n-r}{r+1} = \frac{2}{1}$

বা, $2r + 2 = n - r$

বা, $n - 3r - 2 = 0$ ..... (i)

আবার,

$$\frac{n-r-1}{r+2} = \frac{3}{2}$$

বা, $2n - 2r - 2 = 3r + 6$

বা, $2n - 5r - 8 = 0$ ... (2)

(1) ও (2) নং সমীকরণের সমাধান করে পাই, $n = 14, r = 4$

উদাহরণ-৪.১৭। "Derastation" শব্দটির বর্ণগুলো থেকে প্রতিবারে 4টি করে নিয়ে কত রকমের বর্ণগুলোকে বাছাই করা ও সাজানো যায়?

সমাধান এখানে সর্বমোট 11টি বর্ণ অর্থাৎ (a, a) (t, t) d, e, v, s, i, o, n আছে এবং এদের মধ্যে 9টি বিভিন্ন বর্ণ; 4টি করে গ্রুপ তৈরি করতে বর্ণগুলোকে নিম্নভাবে ভাগ করা যেতে পারে।

(i) দুটি এক জাতীয়, দুটি অন্য এক জাতীয়; (ii) দুটি এক জাতীয়, অপর দুটি ভিন্ন ভিন্ন,

(iii) 4 টি বর্ণের সবকটি ভিন্ন ভিন্ন।

(i) নং থেকে আমরা মাত্র এক প্রকারে বাছাই করতে পারি এবং সাজানোর সংখ্যা হবে $\frac{\lfloor 4}{\lfloor 2 \lfloor 2} = 6$

(ii) নং থেকে বাছাই এর সংখ্যা $= {}^2C_1 \times {}^8C_2 = 56$ এবং সাজানোর সংখ্যা হবে, $56 \times \frac{\lfloor 4}{\lfloor 2} = 672$

(iii) নং থেকে বাছাই-এর সংখ্যা $^9C_4 = 126$ এবং সাজানোর সংখ্যা $126 \times \lfloor 4 = 3024$

$\therefore$ মোট বাছাই করার সংখ্যা $= 1 + 56 + 126 = 183$

মোট সাজানোর সংখ্যা $= 6 + 672 + 3024 = 3702$

উদাহরণ-৪.১৮। $\left(2x^2+\frac{p}{x^3}\right)^{10}$ **-এর বিস্তৃতিতে** x^5 **এবং** x^{15} **এর সহগ দুটি পরস্পর সমান হলে** p **এর ধনাত্মক মান নির্ণয় কর।**

সমাধান

$\left(2x^2+\frac{p}{x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদ

$= {}^{10}C_r (2x^2)^{10-r}\left(\frac{p}{x^3}\right)^r = {}^{10}C_r\, 2^{10-r}\, p^r\, x^{20-5r}$

যদি এ পদে x^5 থাকে তবে, $20-5r=5 \qquad \therefore r=3$

আবার যদি, $(r+1)$ তম পদে x^{15} থাকে, তবে $20-5r=15 \qquad \therefore r=1$

x^5 এবং x^{15} এর সহগ দুটি পরস্পর সমান হলে, ${}^{10}C_3\, 2^{10-3}\, p^3 = {}^{10}C_1\, 2^{10-1}.\, p$

অথবা, $120\times 2^7 p^2 = 10\times 2^9$ বা $p^2=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

$\therefore$ p এর নির্ণেয় মান, $p=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

উদাহরণ-৪.১৯। $\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)^6$ **-এর সম্প্রসারণে** x **বর্জিত পদটির মান নির্ণয় কর।**

সমাধান

$\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)^6 = \left(x-\frac{1}{x}\right)^{12}$

মনে করি $(r+1)$ -তম পদটি x-বর্জিত।

এখন, $(r+1)$-তম পদ ${}^{12}C_r x^{12-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r = (-1)^r\, {}^{12}C_r\, x^{12-2r}$

এ পদটি x-বর্জিত হলে, $12-2r=0$ বা, $r=6$

সুতরাং x বর্জিত পদটির মান $= (-1)^6\, {}^{12}C_6 = 924.$

উদাহরণ-৪.২০। $|x|>1$ **হলে** $(1-x)^{-1}$ **এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর ঃ**

সমাধান $(1-x)^{-1}=\frac{1}{1-x}=\frac{1}{-x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=-\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-1}$

$$=-\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\dots\dots\dots\right)\left[\because \frac{1}{x}<1\right]$$

$$=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}\dots\dots\dots$$

উদাহরণ-৪.২১। $|x|<1$ **হলে,** $(1-x)^{-4}$ **এর বিস্তৃতির** $(r+1)$ **তম পদ সরলতম আকারে নির্ণয় কর এবং এর থেকে বিস্তৃতির প্রথম চারটি পদ নির্ণয় কর।**

সমাধান

এখানে, $t_{r+1} = \frac{-4(-4-1)(-4-2)\dots\dots\dots(-4-r+1)}{\lfloor r}(-x)^r$

$$=(-1)^r\frac{4.5.6.\dots\dots\dots\dots(r+3)}{\lfloor r}(-1)^r x^r$$

$$=(-1)^{2r}\frac{1.2.3.4.\dots\dots\dots\dots r(r+1)(r+2)(r+3)}{1.2.3\lfloor r}x^r = \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{6}x^r$$

$r=0, 1, 2, 3$ বসালে প্রথম চারটি পদ পাওয়া যায়,

এরূপে, $(1-x)^{-4}=1+4x+10x^2+20x^3$

উদাহরণ-৪.২২। যদি $y = x + x^2 + x^3 + \dots\dots\dots \infty$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $x = y - y^2 + y^3 - y^4 + \dots\dots\dots \infty$

$y = x + x^2 + x^3 + \dots\dots\dots \infty$

$\therefore 1 + y = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots\dots\dots \infty = (1 - x)^{-1} = \frac{1}{1 - x}$

$\therefore 1 - x = \frac{1}{1 + y} = (1 + y)^{-1} = 1 - y + y^2 - y^3 + \dots\dots\dots$

অথবা, $-x = -y + y^2 - y^3 + \dots\dots\dots$

অথবা, $x = y - y^2 + y^3 - y^4 + \dots\dots\dots \infty$

উদাহরণ-৪.২৩। $1 + \frac{1}{10} + \frac{1.4}{10.20} + \frac{1.4.7}{10.20.30} + \dots\dots\dots \infty$ ধারাটির সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান

$$(1 - x)^{-\frac{p}{q}} = 1 + p.\frac{x}{q} + \frac{p(p+q)}{\lfloor 2}\left(\frac{x}{q}\right)^2 + \frac{p(p+q)(p+2q)}{\lfloor 3}\left(\frac{x}{q}\right)^3 + \dots$$

বিস্তৃতিটিতে এটা স্পষ্ট যে, প্রত্যেক পদের লবের উৎপাদকগুলো একটি সমান্তর ধারা গঠন করে। এর সাধারণ অন্তর q, যা সূচকের হরে বিদ্যমান। প্রদত্ত ধারাটি এ ধারার সঙ্গে তুলনা করে দেখা যাচ্ছে যে, প্রত্যেক পদে লবগুলো একটি সমান্তর ধারা গঠন করে। এর সাধারণ অন্তর 3 যা সূচকের হরে থাকবে।

এখন, $1 + \frac{1}{10} + \frac{1.4}{10.20} + \frac{1.4.7}{10.20.30} + \dots\dots\dots$

$$= 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10} + \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}}{\lfloor 2}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^2 + \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{3}}{\lfloor 3}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^3 + \dots\dots\dots$$

$$= 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+1\right)}{\lfloor 2}\left(\frac{3}{10}\right)^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+1\right)\left(\frac{1}{3}+2\right)}{\lfloor 3}\left(\frac{3}{10}\right)^3 + \dots\dots$$

$$= \left(1 - \frac{3}{10}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{7}{10}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{10}{7}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{10}{7}}$$

আরোহ বিধির সাহায্যে ধারার যোগফল ঃ

নিচের ধারাগুলোর n-পদ পর্যন্ত যোগফল দেয়া আছে। সবগুলোর ক্ষেত্রেই গাণিতিক আরোহ বিধি প্রয়োগ করে n পদ পর্যন্ত যোগফলের সত্যতা যাচাই করা হয়েছে।

পরবর্তী অনুচ্ছেদসমূহে মাধ্যমিক পর্যায়ে গঠিত কয়েকটি ধারার যোগফল প্রায়শই প্রয়োজন হবে। ধারাগুলোর যোগফল প্রমাণসহ প্রদত্ত হল।

(i) প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল ঃ

মনে করি,

$S = 1 + 2 + 3 \dots\dots + n \dots\dots$ (1)

$\therefore S = n + (n-1) + (n-2) + \dots\dots + 1 \dots\dots$ (2)

(1) এবং (2) যোগ করে,

$2S = (n+1) + (n+1)(n+1) + \dots\dots + (n+1) = n(n+1)$

$\therefore S = \frac{n(n+1)}{2}$

(ii) প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের যোগফল ঃ

মনে করি, $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots\dots\dots + n^2$

আমরা পাই,

$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$

$n^3 - (n-1)^3 = 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1$

$(n-1)^3 - (n-2)^3 = 3(n-2)^2 + 3(n-2) + 1$

$\dots\dots\dots\dots\dots$

$3^3 - 2^3 = 3.2^2 + 3.2 + 1$

$2^3 - 1^3 = 3.1^2 + 3.1 + 1$

যোগ করে পাই,

$(n+1)^3 - 1^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots\dots\dots n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \dots\dots\dots + n) + n$

বা, $n^3 + 3n^2 + 3n = 3S + \frac{3n(n+1)}{2} + n$

$\therefore 3S = n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3}{2}n^2 - \frac{3n}{2} - n = \frac{1}{2}(2n^3 + 3n^2 + n) = \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)$

$\therefore S = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(iii) প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের যোগফল ঃ

মনে করি $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots\dots\dots + n^3$

আমরা জানি, $4n = (n+1)^2 - (n-1)^2$

$\therefore 4n^3 = n^2(n+1)^2 - n^2(n-1)^2$

$4(n-1)^3 = n^2(n-1)^2 - (n-1)^2(n-2)^2$

$4(n-2)^3 = (n-1)^2(n-2)^2 - (n-2)^2(n-3)^2$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$4.3^3 = 3^2.4^2 - 3^2.2^2$

$4.2^3 = 2^2.3^2 - 2^2.1^2$

$4.1^3 = 1^2.2^2 - 1^2.0$

যোগ করে পাই,

$4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots\dots\dots + n^3) = n^2(n+1)^2$

বা, $4S = \{n(n+1)\}^2$

$\therefore S = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

(iv) সমান্তর ধারা ঃ সমান্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর d হল প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল,

$S = a + (a+d) + (a+2d) + \dots\dots\dots + (a + \overline{n-1}\,d)$

$= na + d(1 + 2 + 3 + \dots\dots\dots + \overline{n-1})$

$= na + d\frac{n(n-1)}{2}$

$= \frac{1}{2}n(2a + \overline{n-1}\,d)$

$= \frac{1}{2}n(a + a + \overline{n-1}\,d)$

$= \frac{1}{2}n(a+1)$ [যেখানে, শেষ পদ $1 = a + \overline{n-1}\,d$]

(v) গুণোত্তর ধারা ঃ

প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r হলে, গুণোত্তর ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল,

$$S = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots\dots\dots + ar^{n-1}$$

$$\therefore Sr = ar + ar^2 + ar^3 + \dots\dots\dots\dots + ar^{n-1} + ar^n$$

$$\therefore S - Sr = a - ar^n$$

বা, $S(1 - r) = a(1 - r^n)$

বা, $S = a\frac{1 - r^n}{1 - r}$, যখন $r < 1$

$$= a\frac{r^n - 1}{r - 1} \text{ যখন } r > 1$$

যখন, $n \to \infty$ এবং $r < 1$, তখন, $S = \frac{a}{1 - r}$

উদাহরণ-৪.২৪। n সংখ্যক পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ

$1.2 + 2.5 + 3.8 + \dots\dots\dots\dots$

n তম পদ,

$u_n = n(3n - 1) = 3n^2 - n$

$\therefore u_1 = 3.1^2 - 1, u_2 = 3.2^2 - 2, u_3 = 3.3^2 - 3. \dots\dots\dots$

অতএব, ধারাটির n তম পদ পর্যন্ত যোগফল,

$$S_n = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 \dots\dots\dots + n^2) - (1 + 2 + 3 + \dots\dots\dots + n)$$

$$= 3.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}(2n + 1 - 1) = n^2(n + 1)$$

উদাহরণ-৪.২৫। 4 + 44 + 444 + ... ধারাটির n-পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ মনে করি,

$S = 4 + 44 + 444 + \dots\dots\dots$ n-পদ পর্যন্ত

$$\therefore \frac{9S}{4} = 9 + 99 + 999 + \dots\dots\dots \text{ n পদ পর্যন্ত}$$

$$= (10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \dots\dots\dots \text{ nপদ পর্যন্ত}$$

$$= 10 + 10^2 + 10^3 + \dots\dots\dots + 10^n - n$$

$$= 10(1 + 10 + 10^2 + \dots\dots\dots + 10^{n-1}) - n$$

$$= 10\frac{10^n - 1}{10 - 1} - n$$

$$= \frac{10}{9}(10^n - 1) - n$$

$$\therefore S = \frac{4}{9}\left\{\frac{10}{9}(10^n - 1) - n\right\}$$

অন্তর প্রক্রিয়ায় ধারার সমষ্টি ঃ

মনে করি, প্রদত্ত ধারার সমষ্টি

$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots\ldots$

ধারার n তম পদ u_n কে যদি $u_n - u_{n-1}$ রূপে প্রকাশ করা যায় তবে n তম পদ পর্যন্ত প্রদত্ত ধারার সমষ্টি S_n সহজেই নির্ণয় করা যায়, কেননা, $u_n = u_n - u_{n-1}$

$u_{n-1} = u_{n-1} - u_{n-2}$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$u_2 = u_2 - u_1$

$u_1 = u_1 - u_0$

অতএব, $S_n = u_1 + u_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + u_n$

$= u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + u_3 - u_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_n - u_{n-1}$

$= u_n - u_0$

উদাহরণ-৪.২৬। 1. 2. 3.4 + 2. 3. 4. 5 + 3. 4. 5. 6 + ... ধারাটির n তম পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ

এখানে, $u_n = n(n+1)(n+2)(n+3)$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) - (n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{5}$$

$$= \frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) - \frac{1}{5}(n-1)\,n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$\therefore u_n = v_n - v_{n-1}$ সেখানে

$v_n = \frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ এবং যেহেতু $v_0 = 0$

অতএব, $S_n = v_n - v_0 = \frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

উদাহরণ-৪.২৭। n-তম পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় কর।

$$\frac{1}{(1+x)(1+2x)} + \frac{1}{(1+2x)(1+3x)} + \frac{1}{(1+3x)(1+4x)} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{(1+x)(1+2x)} = \frac{2}{1+2x} - \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{(1+2x)(1+3x)} = \frac{3}{1+3x} - \frac{2}{1+2x}$$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\frac{1}{(1+nx)(1+\overline{n+1}x)} = \frac{n+1}{1+(n+1)x} = \frac{n}{1+nx}$$

$$\therefore S_n = \frac{n+1}{1+(n+1)x} = \frac{1}{1+x} = \frac{n}{(1+\overline{n+1}x)}$$

উদাহরণ-৪.২৮। n-তম পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় কর।

$1.3.5 + 3.5.7 + 5.7.9 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

সমাধান ঃ

এখানে, $u_n = (2n-1)(2n+1)(2n+3)$

অতএব, $S_n = \frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)}{8} + C$

$n = 1$ বসিয়ে পাই,

$15 = \frac{1.3.5.7}{8} + C$; অতএব, $C = \frac{15}{8}$

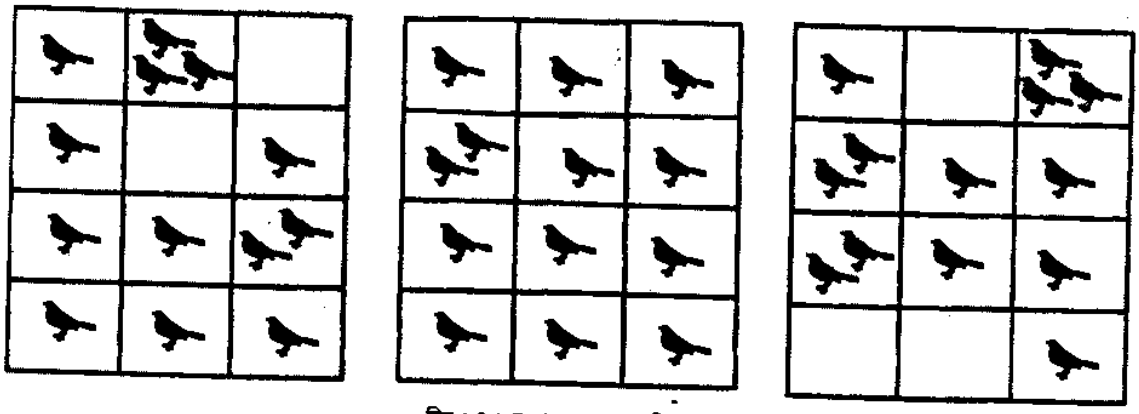
$\therefore S_n = \frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)}{8} + \frac{15}{8}$

$= n(2n^3 + 8n^2 + 7n - 2)$

৪.৩ কপোত বিবর মূলনীতি (Pigeonhole Principle) ঃ

প্রথমে বিষয়টি একটু ব্যাখ্যা করে নেয়া দরকার। পরে এর সংজ্ঞা দেয়া হবে। ধরা যাক, কোন এক ব্যক্তি কপোত পালন করে। ঐ ব্যক্তি কাঠ দিয়ে এমনভাবে একটি কপোতের জন্য বাসা তৈরি করল যেন 16টি কপোত থাকতে পারে। অর্থাৎ তিনি 16টি খোপ (বিবর) সংলিত একটি বাসা তৈরি করেছেন।

যদি ঐ ব্যক্তির 17টি কপোত থাকে তবে কোন না কোন খোপে (বিবরএ) 2টি কপোত থাকতে হবে। আর যদি কপোতের সংখ্যা বেশি হয়, তবে আরো কয়েকটি খোপে ও একাধিক কপোতকে থাকতে হবে।



চিত্র ঃ ৪.২ কপোত ও কপোতবিবর।

কপোতবিবর মূলনীতি (পিজিয়ন হোল নীতি) ঃ

যদি n সংখ্যক কপোতের খোপে $(n + 1)$ সংখ্যক বা তার চেয়ে বেশি কপোতকে থাকতে হয়, তবে কমপক্ষে একটি খোপে একাধিক কপোতকে থাকতে হবে।

উপরিউক্ত সংজ্ঞা আমাদের বাস্তব জীবনে যথেষ্ট কাজে লাগে।

উদাহরণ-৪.২৯। ধরা যাক, একটি কলেজে 20জন অধ্যাপক (কপোত) আছেন। ঐ কলেজে 16টি শ্রেণিকক্ষ আছে (কপোত খোপ বা বিবর) এবং একটি বিশ্রামাগার (কপোত খোপ) আছে। কলেজে যদি সকল অধ্যাপক উপস্থিত থাকেন, তবে 16 জন থাকবেন ক্লাশে এবং 4 জন থাকবেন বিশ্রামাগারে। এখানে 16টি ক্লাশ এবং একটি বিশ্রামাগার অর্থাৎ 17টি কপোত খোপ আছে এবং 20টি কপোত (অধ্যাপক) আছে। সে কারণে বিশ্রামাগারে 4 জন অধ্যাপককে থাকতে হয়েছে।

উদাহরণ-৪.৩০। কোন ব্যক্তি দোকানে গেল, উদ্দেশ্য 5টি টি শার্ট (কপোত) কিনবে। সে দোকানে দেখলো লাল, নীল, সবুজ এবং সাদা রং এর টি-শার্ট আছে। এর বাইরে অন্য কোন রঙের টি-শার্ট নেই। অর্থাৎ দোকানে 4রং এর (কপোত খোপ) টি-শার্ট আছে। যদি ঐ ব্যক্তি 5টি টি-শার্ট ক্রয় করে, তবে তাকে কমপক্ষে 2টি টি-শার্ট একরঙের কিনতে হবে।

সাধারণ কপোত বিবর নীতি (Generalized Pigeonhole Principle) ঃ

যদি n সংখ্যক কপোত খোপ kn+1 সংখ্যক বা তার চেয়ে বেশি কপোতের জন্য বরাদ্ধ থাকে, যেখানে K একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যক হয়, তবে কোন না কোন কপোত খোপে K + 1 বা তার চেয়ে বেশি কপোতকে থাকতে হবে।

এ নীতিকে জেনারেলাইড পিজিয়ন নীতি বা সাধারণ কপোত বিবর নীতি বলে।

উদাহরণ-৪.৩১।

ধরা যাক, কোন ব্যক্তি টি-শার্ট ক্রয় করার জন্য দোকানে গেল। দোকানে লাল, নীল, সবুজ এবং সাদা এ 4 রঙের (কপোত খোপ আছে) টি-শার্ট আছে। এখানে n = 4 ঐ ব্যক্তি 9টি (কপোত) টি-শার্ট কিনবে (kn+1, এখানে k এর মান 2 ধরে kn+1 = 9 পাই)। তাকে অবশ্যই কোন না কোন রঙের 3টি (কপোত সংখ্যা = k+1) টি-শার্ট ক্রয় করতে হবে।

উদাহরণ-৪.৩২।

ধরা যাক, একটি কলেজে 15টি শ্রেণিকক্ষ এবং 1টি বিশ্রামাগার অর্থাৎ মোট 16টি কক্ষ (কপোত খোপ) আছে। এখানে n = 16 অর্থাৎ ঐ কলেজে অধ্যাপক, ডেমোনেস্ট্রেটরসহ মোট 33 জন (2, n+1 = 33) শিক্ষক আছে। অন্তত এক ক্লাশে একাধিক শিক্ষক আছে। কোন ক্লাশ যদি খালি নাও থাকে, তবুও কোন না কোন কক্ষে k+1 বা 2 + 1 বা 3 জন শিক্ষককে অবশ্যই থাকতে হবে।

উদাহরণ-৪.৩৩।

ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্সের ক্লাশে নিশ্চিত রূপে ছয় ছাত্র একই গ্রেড পাওয়ার ক্ষেত্রে সর্বনিম্ন ছাত্র সংখ্যা বের কর। যেখানে পাঁচটি সম্ভাব্য গ্রেড A,B,C,D এবং F আছে।

সমাধান ঃ

এখানে মোট গ্রেড n = 5 টি (অর্থাৎ কপোত খোপ 5টি) এবং 6 জন ছাত্র একই গ্রেড পেল (অর্থাৎ একই খোপে 6 জন)

সুতরাং k + 1 = 6

∴ k = 5

ছাত্র সংখ্যা, kn + 1 = ?

সুতরাং ছাত্রসংখ্যা = kn + 1

= 5.5 + 1

= 26 জন

অতএব, সর্বনিম্ন ছাত্র সংখ্যা হবে 26 জন যাদের মধ্যে কমপক্ষে 6 জন ছাত্র একই গ্রেড পাবে।

৪.৩.১ অর্ডারড এবং আন অর্ডারড পার্টিশন (Ordered and unordered partition) ঃ

অর্ডারড পার্টিশন ঃ

ধরা যাক, একটি বাক্স A এর মধ্যে 7টি মার্বেল আছে এবং মার্বেলগুলোতে 1 থেকে 7 নম্বর লেখা আছে (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)। এখন প্রশ্ন কত প্রকারে থলে হতে মার্বেলগুলিকে বাছাই করতে পারি।

বাক্স থেকে প্রথমে 2টি মার্বেল উঠালাম, এরপর বাক্স থেকে 3টি মার্বেল উঠালাম, এবং সর্বশেষ বাক্স হতে 2টি মার্বেল উঠালাম। এখন আমরা অর্ডারড পার্টিশন (Ordered Partion) হিসাব করবো-

১ম যে 2টি মার্বেল উঠালাম সেটাকে বলি সেট A_1

২য় যে 3টি মার্বেল উঠালাম সেটাকে বলি সেট A_2

এবং সর্বশেষ যে 2টি মার্বেল উঠালাম সেটাকে বলি সেট A_3

সুতরাং $\{A_1, A_2, A_3\}$ হলো একটি অর্ডারড পার্টিশন।

অর্থাৎ $[A_1, A_2, A_3]$ এবং $[A_2, A_1, A_3]$ ভিন্ন।

ধরা যাক, $A_1 = \{1, 4\}$ $A_2 = \{2, 3, 7\}$, $A_4 = \{5, 6\}$

অতএব, ক্রমত্রয়ী $[\{1, 4\}, \{2, 3, 7\}, \{5, 6\}]$ এবং $[\{2, 3, 7\}, \{1, 4\}, \{5, 6\}]$ কে আমরা ভিন্ন বলছি।

বাছাইকরণ পদ্ধতি ঃ

১ম 7টি মার্বেল থেকে 2টি ${}^{7}C_{2}$ ভাবে উঠাতে পারি

বাকি 5টি মার্বেল থেকে 3টি ${}^{5}C_{3}$ ভাবে উঠাতে পারি

শেষ অবশিষ্ট 2টি মার্বেল থেকে 2টি ${}^{2}C_{2}$ ভাবে উঠাতে পারি

এখন উঠানোর উপায় হচ্ছে ${}^{7}C_{2} \times {}^{5}C_{3} \times {}^{2}C_{2}$

$$= \frac{7!}{2!\,(7-2)!} \times \frac{5!}{3!\,(5-3)!} \times \frac{2!}{2!(2-2)!} = \frac{7\times 6\times 5!}{2\times 5!} \times \frac{5\times 4\times 3!}{3!\times 2!} \times \frac{2}{2\times 0!}$$

$$= 21 \times 10 \times 1$$

$$= 210$$

সুতরাং A এর সতন্ত্র Oder Partition হচ্ছে 210টি।

উপরে বর্ণিত পার্টিশনে প্রাপ্ত ফলাফলকে আমরা একটু ভিন্ন ফর্মে নিতে চাই। ফর্মটি নিম্নরূপ

$${}^{7}C_{2} \times {}^{5}C_{3} \times {}^{2}C_{2} \quad = \frac{7!}{5!2!} \times \frac{5!}{2!\,3!} \times \frac{2!}{0!\,2!} = \frac{7!}{2!\,3!\,2!}$$

প্রাপ্ত ফলাফলকে অনুসরণ করে নিম্নের উপপাদ্যটি নির্ণয় করা হয়।

আনঅর্ডারড পার্টিশন (Unordered Partition) ঃ

ধরি, কতিপয় বস্তুর সেট A। এখান থেকে এমনভাবে কতগুলো সাবসেট, $A_1, A_2, A_3 \ldots, A_r$ বানালে তা আন অর্ডারড পার্টিশন হবে। অর্থাৎ A_1 আগে আসল না পরে আসল তা বিবেচ্য নয়।

অন্য কথায় ঃ

উপসেটগুলির মধ্যে সমান সদস্য বিশিষ্ট যতগুলি উপসেট থাকবে সেই সমান সংখ্যক উপসেট এর সংখ্যার ফ্যাকটোরিয়াল দ্বারা অর্ডারড পার্টিশন এর সংখ্যাকে ভাগ করলে Unordered Partition এর সংখ্যা পাওয় যাবে।

৪.৪ গণনার সমস্যাবলি এবং ট্রি ডায়াগ্রাম (Counting problems and tree Diagram) ঃ

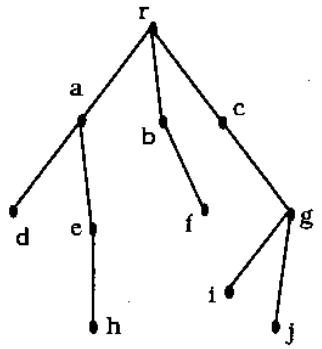
কোন একটি সেট নিয়ে কাজ করতে গেলে প্রতিটি উপাদান নিয়ে কাজ করা অনেক সময়ই অত্যন্ত কষ্টসাধ্য। যেমন–ধরা যাক, একট জঙ্গলে কত প্রকার গাছ আছে। এটা সাধারণভাবে বিশ্লেষণ করা কঠিন। উদ্ভিদবিজ্ঞান প্রথমে গাছকে কয়েকটি গ্রুপে ভাগ করে পরে গ্রুপগুলোকে আবার উপগ্রুপে বিভক্ত করা হয়।

ধরা যাক, চট্টগ্রাম বিশ্ববিদ্যালয়ের হিসাবরক্ষক বিভিন্ন বিভাগের হিসাব রাখতে চায়। সে একটি খাতায় বিভিন্ন বিভাগের নাম লিখে এ কাজ করতে পারে। এতে জটিলতা বাড়বে বৈ কমবে না। বরং সে একটা কাজ করতে পারে, তা হলো প্রথমে সে বিশ্ববিদ্যালয়কে অনুষদ হিসাবে গ্রুপ করে নিবে। এরপর অনুষদকে আবার বিভাগ (সাবজেক্ট) হিসাবে গ্রুপ করে নেবে। এতে তার কাজে অনেক শৃংখলা ফিরে আসবে। সে কারণে গণনার সমস্যাবলি নিরসনের জন্য এরূপ গ্রুপ করে নেয়ার প্রচলন আছে। এরূপ গ্রুপ করে নেয়ার কাজ ট্রি ডায়াগ্রাম এর সাহায্যে করা হয়।

সুতরাং আমরা বলতে পারি,

গণনার ক্ষেত্রে নানাবিধ সমস্যাবলিকে গণনার সমস্যাবলি (Counting Problems) বলা হয় এবং এরূপ সমস্যাবলি যে ডায়াগ্রামের সাহায্যে সমাধান করা যায়, তাকে ট্রি ডায়াগ্রাম বলা হয়। একটি ট্রি মূলত একটি মূল (Root), মূলের মধ্যকার বিভিন্ন শাখা এবং শাখার শেষ অংশে অবস্থিত প্রশাখা নিয়ে গঠিত।

এখানে জেনারেল ট্রি নিয়ে আলোচনা করা হবে। বাইনারি ট্রি, জেনারেল ট্রি থেকে আলাদা। বাইনারি ট্রি সম্পর্কে ৭ম অধ্যায়ে আলোচনা করা হয়েছে।



চিত্র ৪.৩

উপরের চিত্র ৪.৩ একটি ট্রি T। T এর ভার্টেক্স r হচ্ছে এ ট্রি এর রুট। রুট r থেকে b বার্টেক্সে আমরা একটি মাত্র পথে যেতে পারি। a কিংবা c হয়ে b তে যাবার কোন সুযোগ নেই। এর অর্থ এই যে, ট্রি এর ভারটেক্স এবং গ্রাফই আমাদের নির্দেশ করবে, কোন পথে যেতে হবে।

এ ট্রি T এর রুট r থেকে a, b কিংবা c এর লেভেল বা ডেপথ 1, ঠিক একইভাবে রুট r থেকে d, e f কিংবা g এর লেভেল হচ্ছে 2, উপরিউক্ত ট্রি এর সর্বোচ্চ লেভেল হচ্ছে 3, প্রথম লেভেলের বার্টেক্সগুলোকে রুট r এর সন্তান (Children) বলে অভিহিত করা হয়।

ট্রি ডায়াগ্রামের উদাহরণ ঃ মনে করি P = { 1, 2, 3 }এবং Q = { a, b } একটি ট্রি ডায়াগ্রামের মাধ্যমে P × Q নির্ণয় কর।

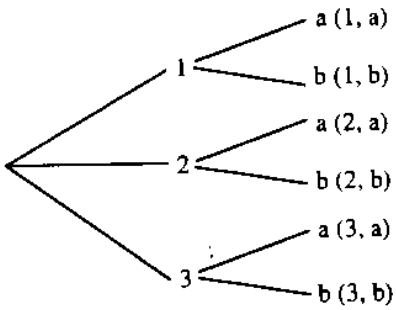
সমাধান ঃ দেওয়া আছে, P = {1, 2, 3 }এবং Q = { a, b }

অর্থাৎ n(P) = 3 এবং n (Q) = 2

সুতরাং n (P × Q)

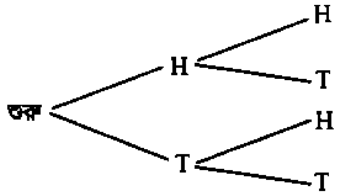
∴ n(P). n(Q) = 3 × 2 = 6 হবে।

∴ P × Q = {(1, a) (1, b) (2, a) (2, b) (3, a) (3, b) }



উদাহরণ ঃ যদি দুটি মুদ্রা একই সাথে নিক্ষেপ করা হয় তবে তাদের নমুনা ক্ষেত্রের ট্রি ডায়াগ্রাম অঙ্কন কর।

উত্তর ঃ যদি দুটি মুদ্রা একই সাথে নিক্ষেপ করা হয় তবে তাদের প্রাপ্ত নমুনা ক্ষেত্র 4। এগুলো হচ্ছে HH, HT, TH, TT। প্রাপ্ত নমুনা ক্ষেত্রের ট্রি ডায়াগ্রাম নিম্নরূপ ঃ



উদাহরণ-৪.৫৭। 4!, 5!, 6! এবং 7! এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ

4! = 1. 2. 3. 4 = 24

5! = 1. 2. 3. 4. 5 = 5. 4! = 5. (24)
= 120

6! = 1. 2. 3. 4. 5. 6
= 6. 5! = 6. (120)
= 720

এবং 7! = 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7
= 7. 6! = 7. (720) = 5040

উদাহরণ-৪.৫৮। নির্ণয় কর ঃ (a) $\frac{13!}{11!}$

(b) $\frac{7!}{10!}$

সমাধান

(a) $\frac{13!}{11!}$

$= \frac{13.\ 12.\ 11.\ 10.\ 9.\ 8.\ 7.\ 6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 3.\ 2.1}{11.\ 10.\ 9.\ 8.\ 7.\ 6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1}$

$= 13.12$

$= 156$

অন্যভাবে

$\frac{13!}{11!} = \frac{13.\ 12.\ 11!}{11!} = 13.\ 12$

$= 156$

(b) $\frac{7!}{10!} = \frac{7!}{10.\ 9.\ 8.\ 7!} = \frac{1}{10.\ 9.\ 8}$

$= \frac{1}{720}$

উদাহরণ-৪.৫৯। নির্ণয় কর ঃ (a) $\frac{n!}{(n-1)!}$

(b) $\frac{(n+2)!}{n!}$

সমাধান

(a) $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)\ (n-2)\ \ldots.\ 3.\ 2.\ 1}{(n-1)\ (n-2)\ \ldots\ \ldots\ 3.\ 2.\ 1}$

$= n$

অন্যভাবে, $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$

(b) $\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)\ (n+1)\ n(n-1)\ (n-2)\ \ldots\ \ldots\ 3.\ 2.\ 1}{n(n-1)\ (n-2)\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ 3.\ 2.\ 1}$

$= (n+2)\ (n+1)$

$= n^2 + 3n + 2$

অন্যভাবে $\frac{(n+2)}{n!} = \frac{(n+2)\ (n+1)\ n!}{n!}$

$= (n+2)\ (n+1) = n^2 + 3n + 2$

উদাহরণ-৪.৬০। নির্ণয় কর ঃ (a) $\binom{16}{3}$

(b) $\binom{12}{4}$

সমাধান

(a) $\binom{16}{3} = \frac{16.\ 15.\ 14}{1.\ 2.\ 3} = 16.\ 5.\ 7$

$= 560$

(b) $\binom{12}{4} = \frac{12.\ 11.\ 10.9}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = 495$

উদাহরণ-৪.৬১। নির্ণয় কর ঃ (a) $\binom{8}{5}$

(b) $\binom{9}{7}$

সমাধান

(a) $\binom{8}{5} = \frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5} = 56$

অথবা, $8 - 5 = 3$

$\therefore \binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8.7.6}{1.2.3} = 56$

(b) যেহেতু, $9 - 7 = 2$

আমরা পাই, $\binom{9}{7} = \binom{9}{2} = \frac{9.8}{1.2} = 9.4 = 36$

উদাহরণ-৪.৬২। প্রমাণ কর $\binom{17}{6} = \binom{16}{5} + \binom{16}{6}$

এখন $\binom{16}{5} + \binom{16}{6}$

$= \frac{16!}{5!\,11!} + \frac{16!}{6!\,10!}$

প্রথম ভগ্নাংশকে $\frac{6}{6}$ এবং দ্বিতীয় ভগ্নাংশকে $\frac{11}{11}$ দ্বারা গুণ করে পাই–

$$\binom{16}{5} + \binom{16}{6} = \frac{6.16!}{6.5!\,11!} + \frac{11.16!}{6!.10!.11}$$

$$= \frac{6.16!}{6!\,11!} + \frac{11.16!}{6!\,11!} = \frac{6.16! + 11.6!}{6!\,11!} = \frac{(6+11).16!}{6!\,11!} = \frac{17.16!}{6!\,11!} = \frac{17!}{6!\,11!}$$

$$= \binom{17}{6}$$ **(প্রমাণিত)**

উদাহরণ-৪.৬৩। প্রমাণ কর ঃ $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$

প্রমাণ ঃ $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)} + \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

প্রথম ভগ্নাংশকে $\frac{r}{r}$ দ্বারা এবং দ্বিতীয় ভগ্নাংশকে $\frac{n-r+1}{n-r+1}$ দ্বারা গুণ করে পাই–

$$\binom{n}{r-r} + \binom{n}{r} = \frac{r.n!}{r.(r-1)!\,(n-r+1)!} + \frac{(n-r+1)\,n!}{r!\,(n-r+1)\,(n-r)!}$$

$$= \frac{r.n!}{r!\,(n-r+1)!} + \frac{(n-r+1).n!}{r!\,(n-r+1)!} = \frac{r.n! + (n-r+1).n!}{r!\,(n-r+1)!}$$

$$= \frac{[r+(n-r+1)].n!}{r!\,(n-r+1)!} = \frac{(n+1)\,n!}{r!\,(n-r+1)!} = \frac{(n+1)!}{r!\,(n-r+1)!}$$

$$= \left(\frac{n+1}{r}\right)$$ **(প্রমাণিত)**

অনুশীলনী-৪

▸▸ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি ঃ

১। এ্যাবাকাস শব্দটি কোথা থেকে উৎপত্তি হয়েছে?

২। (Counting গণনা বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো ২০০২, ০৩, ০৫, ০৬, ০৭, ১০R, ১১

৩। Counting (গণনা) এর দু'টি নীতি কী কী? [বাকাশিবো-২০০৪, ০৮, ০৯R, ১০, ১৩R

৪। গুণন মূলনীতি (Prodect Rule Principle) বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০০৭

৫। যোজন মূলনীতি (Sum Rule Principle) কী? [বাকাশিবো-২০০৭, ১১R

৬। Generalized Pigeonhole principle বিবৃতি কী কর। [বাকাশিবো-২০০২, ০৩, ০৪, ০৫, ১৪R

অথবা, সাধারণ কপোত বিবরনীতি বিবৃতি কর।

৭। Binomial co-efficient বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো ২০০৩R, ২০০৫, ১১

৮। $^{12}C_6$ এ $^{6}C_3$ এর মান কত? [বাকাশিবো ২০০৬, ১০

৯। $^{n}C_r$ নোটেশনের অর্থ কী? [বাকাশিবো- ০৯R

১০। $^{n}p_r$ নোটেশনের অর্থ কী? [বাকাশিবো-২০০৯R

▸▸ সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবিল ঃ

১১। এ্যাবাকাস বলতে কী বুঝায়?

১২। নেপিয়ারের হাড় বলতে কী বুঝায়?

১৩। কত সালে জন নেপিয়ার নেপেরিয়ন লগারিদম আবিষ্কার করেন?

১৪। উদাহরণসহ কপোত বিবর (Pigeon hole) এর মূলনীতি লিখ। [বাকাশিবো ২০০৩, ০৪, ০৬, ০৭, ০৯, ০৯R, ১০, ১১, ১৩

অথবা, উদাহরণসহ পিজিয়ন হোল এর মূলনীতি বর্ণনা কর। [বাকাশিবো-২০০২

১৫। Pascal's triangle (প্যাসকেল ত্রিভুজ) বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০০২, ০৪, ০৯, ০৯R, ১০, ১১]

১৬। প্যাসকেলের ত্রিভুজের শর্ত দুটি লিখ। [বাকাশিবো-২০০৫, ২০০৬]

১৭। ট্রি ডায়গ্রাম (Tree Diagram) কী?

১৮। Polytechnic শব্দ থেকে প্রতিবার 5টি বর্ণ নিয়ে কয়ভাবে সাজানো যায়? [বাকাশিবো- ০৯, ০৯R]

১৯। প্রমাণ কর যে, $^{n}c_{n-r} = {}^{n}c_r$ [বাকাশিবো-২০০৭, ০৯R, ১০]

২০। যদি $^{n}c_{12} = {}^{n}c_8$ হয় তবে $^{22}c_n$ এর মান নির্ণয় কর। [বাকাশিবো-২০০৭]

▸▸ রচনামূলক প্রশ্নাবলি ঃ

২১। গণনার যোজন ও গুণন নীতি সম্পর্কে যা জান লিখ।

২২। দ্বিপদী সহগ ও প্যাসকেল ত্রিভুজ সম্পর্কে বিস্তারিত বর্ণনা দাও। [বাকাশিবো-২০০৩, ০৭, ১৪R]

২৩। কপোতবিবর এর মূলনীতি সংক্ষেপে আলোচনা কর।

২৪। গণনার সমস্যাবলি সমাধানে ট্রি-ডায়াগ্রামের ভূমিকা দেখাও।

▸▸ সমস্যাবলি ঃ

২৫। প্রমাণ কর যে, ${}^{n+1}C_r = {}^nC_{r-1} + {}^nC_r$ [বাকাশিবো-২০০৬, ০৭, ১০R, ১১R]

অথবা, দেখাও যে, $\binom{n+r}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$ [বাকাশিবো-২০০৪, ০৮]

উত্তর ঃ উপপাদ্য ৪.১ দেখ

২৬। n এর মান 0 থেকে 6 এর মধ্যে হলে $(a+b)^n$ এর বিস্তৃতি দেখিয়ে প্যাসকেলের ট্রায়াংগেল অংকন করে তার বৈশিষ্ট্যসমূহ লিখ। [বাকাশিবো ২০০৩R, ০৪, ০৮, ১২, ১৩]

২৭। দু'টি দলের মধ্যে জয়-পরাজয় 4 (চার)টি খেলা হবে। প্রথম দলটি 2টি খেলায় জয়লাভ করল। এ খেলা কত প্রকারে খেলা যায়? তা ট্রি ডায়াগ্রাম (Tree-diagram) এর সাহায্যে দেখাও। [বাকাশিবো-২০০৫]

২৮। নির্ণয় কর।

(a) 5! 6! 7! 8! 9! এবং 10!

(b) (i) $\frac{13!}{12!}$, (ii) $\frac{17!}{10!}$ (iii) $\frac{80!}{70!}$, (iv) $\frac{100!}{99!}$

(c) (i) $\frac{n!}{(n-2)!}$ (ii) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

(d) (i) $\binom{66}{39}$, (ii) $\binom{100}{80}$ (iii) $\binom{99}{77}$, (iv) $\binom{22}{17}$

(e) প্রমাণ কর $\binom{17}{6} = \binom{16}{5} + \binom{16}{6}$

(f) প্রমাণ কর $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$ [বাকাশিবো-২০০৪]

২৯। (i) যদি ${}^nP_4 = 6 \times {}^nP_3$ হয়, তাহলে n-এর মান নির্ণয় কর।

(ii) যদি ${}^{2n}P_3 = 2 \times {}^nP_4$ হয়, তাহলে n-এর মান নির্ণয় কর। **[উত্তর ঃ** (i) 9 (ii) 8]

৩০। 'equation' শব্দটির সবগুলো অক্ষর ব্যবহার করে কতটি শব্দ গঠন করা যেতে পারে? **[উত্তর ঃ** 4032]

৩১। 1, 2, 3, 4, 5, 6 অংকগুলোর প্রত্যেকটিকে প্রতি সংখ্যায় একবার মাত্র নিয়ে চার অংকের কতগুলো বিভিন্ন সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে? **[উত্তর ঃ** 360]

৩২। (i) 'second' শব্দটির অক্ষরগুলো থেকে 1টি স্বরবর্ণ ও 2টি ব্যঞ্জনবর্ণ নিয়ে কতকগুলো শব্দ গঠন করা যেতে পারে, যাতে স্বরবর্ণ সর্বদা মধ্যম স্থান দখল করবে?

(ii) 'equation' শব্দটির অক্ষরগুলো থেকে চার অক্ষরবিশিষ্ট বিভিন্ন শব্দ গঠন করা হল; এদের কতকগুলোতে q বর্তমান থাকবে কিন্তু n থাকবে না? **[উত্তর ঃ** (i) 24 (ii) 480]

৩৩। (i) দেখাও যে, AMERICA শব্দটির বর্ণগুলোকে একত্রে নিয়ে যত প্রকারে সাজানো যায়, CALCUTTA শব্দটির বর্ণগুলোকে একত্র নিয়ে তার দ্বিগুণ উপায়ে সাজানো যায়।

(ii) 10টি বর্ণ আছে যাদের কিছু সংখ্যক একজাতীয় এবং বাকিগুলো ভিন্ন ভিন্ন; যদি তাদের সবগুলোকে একত্র নিয়ে 30240টি শব্দ গঠন করা যায়, তবে কতগুলো বর্ণ এক জাতীয়? [উত্তর : (ii) 5]

৩৪। (i) PARALLEL শব্দটির অক্ষরগুলোর সবগুলো একত্রে নিয়ে কত প্রকারে সাজানো যায় তা বের কর; এবং স্বরবর্ণগুলোকে পৃথক না রেখে অক্ষরগুলোকে কত প্রকারে সাজানো যায়, তাও বের কর।

(ii) MATHEMATICS শব্দটির বর্ণগুলোকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা বের কর এবং এদের কতগুলোতে স্বরবর্ণগুলো একত্রে থাকবে? [উত্তর : (i) 3260, 360, (ii) $\frac{\lfloor 11}{\lfloor 2 \lfloor 2 \lfloor 2} \cdot \frac{\lfloor 8}{\lfloor 2 \lfloor 2} \times \frac{\lfloor 2}{\lfloor 2}$]

৩৫। (i) ALLAHABAD শব্দটির নয়টি বর্ণের প্রত্যেকটিকে প্রতি সাজানো ব্যবস্থায় একবার মাত্র নিয়ে যত প্রকার বিন্যাস সংখ্যা হতে পারে তা নির্ণয় কর।

এই বিন্যাসসমূহের কতগুলোতে A চারটি একত্রে থাকবে? এদের কতগুলোতে স্বরবর্ণগুলো জোড় স্থান দখল করবে?

(ii) 3, 4, 5, 3, 4, 5, 6 অংকগুলোর বিজোড় অংকগুলো সর্বদাই বিজোড় স্থানে রেখে সাত অংকের কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে। [উত্তর : (i) 7650, 360, 60 (ii) 18]

৩৬। 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 অংকগুলো দ্বারা এদের প্রত্যেককে প্রতি সংখ্যায় একবারের বেশি না নিয়ে 1000 এর ছোট এবং 5 দ্বারা বিভাজ্য কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যায়? [উত্তর : 154]

৩৭। 1, 2, 3, 4, 5 অংকগুলোর প্রত্যেকটিকে যে কোন সংখ্যক বার নিয়ে তিন অংকবিশিষ্ট কতগুলো সংখ্যা গঠন করা যেতে পারে? এদের কতগুলোতে দুই বা ততোধিক সমান অংক থাকবে? [উত্তর : 125, 65]

৩৮। PERMUTATION শব্দটির বর্ণগুলোর কোন স্বরবর্ণের অবস্থান পরিবর্তন না করে কত রকমে পুনর্বিন্যাস করা যেতে পারে? [উত্তর : 359]

৩৯। 7টি সবুজ, 4টি নীল এবং 2টি লাল কাউন্টার এক সারিতে কত রকমে সাজানো যেতে পারে? এদের কতগুলোতে লাল কাউন্টার দুটি একত্রে থাকবে? [উত্তর : 25740, 3960]

৪০। মান নির্ণয় কর : (i) ${}^{16}C_{13}$, (ii) ${}^{100}C_{98}$. [উত্তর : (i) 560 (ii) 4950]

৪১। (i) প্রমাণ কর যে, ${}^{n}C_r = {}^{n-1}C_r + {}^{n-1}C_{r-1}$

(ii) প্রমাণ কর যে, ${}^{12}C_4 + {}^{12}C_3 = {}^{13}C_4$

৪২। 16 বাহুবিশিষ্ট একটি সামতলিক ক্ষেত্রের কৌণিক বিন্দুর সংযোগ রেখা দ্বারা কতগুলো বিভিন্ন ত্রিভুজ গঠন করা যেতে পারে? ক্ষেত্রটির কতগুলো কর্ণ আছে? [উত্তর : 560]

৪৩। একটি দশ ভুজের কৌণিক বিন্দুগুলোর সংযোগ রেখার সাহায্যে কতগুলো কর্ণ টানা যেতে পারে? [উত্তর : 35]

৪৪। যদি ${}^{n}C_r$, n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিস থেকে প্রতিবারে r সংখ্যক জিনিস নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা প্রকাশ করে, তবে প্রমাণ কর যে, ${}^{n}C_r + {}^{n}C_{r-1} = {}^{n+1}C_r$ এবং এর সাহায্যে দেখাও যে,

(i) ${}^{n}C_r = {}^{n-2}C_r + 2\,{}^{n-2}C_{r-1} + {}^{n-2}C_{r-2}$, যখন $n > r > 2$

(ii) ${}^{n+2}C_r = {}^{n}C_r + 2.\,{}^{n}C_{r-1} + {}^{n}C_{r-2}$, যখন $n > r > 2$

৪৫। যদি ${}^{n}C_6 = {}^{n}C_3$ হয় তবে ${}^{10}C_n$ এর মান কত? [বাকাশিবো-২০১১]

অনুশীলনী-৪ এর সমাধান

▸▸ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

১। এ্যাবাকাস শব্দটি গ্রিক শব্দ অ্যাবাক্স (ABAX) থেকে উৎপত্তি হয়েছে।

২। সরল বিশ্লেষণার্থে, যা বিন্যাস, সমাবেশ এবং বিভক্তিকরণ নিয়ে আলোচনা করে, প্রতিটি ক্ষেত্রে সমাপ্তকরণ সম্ভব না হলেও কিছুটা ঘটনার যুক্তি সংগত সম্ভাবনাকে (Possibilities) নিরুপিত করে তাকে গণনা বা কউন্টিং (Counting) বলা হয়।

৩। কাউন্টিং (Counting) বা গণনার মূলনীতি হলো দু'টি যাকে "প্রকৃত গণনা নীতি" (Basic Counting principle) বলা হয়। এগুলো হলো-

(i) Sum Rule Principle (যোজন মূলনীতি)

(ii) Product Rule Principle (গুণন মূলনীতি)

৪। যদি P সংখ্যক বিভিন্ন পদ্ধতিতে কোন একটি কাজ সম্পন্ন করা যায় এবং এ পদ্ধতিগুলোর একটি পদ্ধতিতে কাজটি সম্পাদিত হওয়ার পর যদি দ্বিতীয় একটি কাজ q সংখ্যক বিভিন্ন পদ্ধতিতে সম্পন্ন করা যায়, তাহলে কাজ দু'টি একত্রে $p \times q$ সংখ্যক পদ্ধতিতে সম্পন্ন করা যাবে। এটাই গণনার গুণন বিধি।

মনে করি, দু'টি সেট A ও B এর কার্তেসীয় গুণন $A \times B$ হয়, তখন

$n(A \times B) = n(A) \times n(B)$

৫। যদি A এবং B দু'টি সংযোগহীন (Disjoint) সেট হয়, তবে $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

৬। যদি n সংখ্যক কপোতখোপা (Pigeonhole) Kn+1 সংখ্যক বা তার চেয়ে বেশি কপোতের জন্য বরাদ্ধ থাকে, যেখানে k একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যক হয়, তবে কোন না কোন কপোত খোপে $k + 1$ বা তার চেয়ে বেশি কপোতকে থাকতে হবে।

এ নীতিকে Generalized pigeonhole principle বা সাধারণ কপোতবিবর নীতি বলে।

৭। প্রতীক $\binom{n}{r}$ বা ${}^nC_r$ যেখানে r এবং n যোগবোধক পূর্ণ সংখ্যা $r \le n$ হয়, তখন একে নিম্নরূপ সংখ্যায়িত করা যায়

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1, 2, 3 \ldots\ldots (r-1), r}$$

$$= \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

কিন্তু যখন $n - (n - r) = r$ তখন

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\,(n-(n-r))!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

অতএব, $\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$

অনুরূপভাবে, যদি $a + b = n$ বা হয়, তখন $\binom{n}{a} = \binom{n}{b}\binom{n}{r}$ এই সংখ্যাকে Binomial co-efficient (দ্বিপদী সহগ) বলা হয়।

৮। ${}^{12}C_6 = \frac{12!}{(12-6)!\,6!} = \frac{12\times11\times10\times9\times8\times7\times6!}{6!\,6!}$

$= \frac{12\times11\times10\times9\times8\times7}{6\times5\times4\times3\times2} = 924$ Ans.

এবং ${}^{6}C_3 = \frac{6!}{(6-3)!\,3!} = \frac{6\times5\times4\times3!}{3!\times3!}$

$= \frac{6\times5\times4}{3\times2}$

$= 20$ **Ans.**

৯। ${}^{n}C_r$ নোটেশনের অর্থ হলো $= \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ অর্থাৎ n সংখ্যক বস্তু হতে প্রতিবারে r সংখ্যক বস্তুর সংগ্রহ করার যত পথ আছে; তাকে সমাবেশ বলে।

১০। ${}^{n}p_r$ নোটেশনের অর্থ হলো $= \frac{n!}{(n-r)!}$ অর্থাৎ n সংখ্যক বস্তু হতে প্রতিবারে r সংখ্যক বস্তু নিয়ে বিন্যাস করার যত পথ আছে তাকে বিন্যাস বলে।

▸▸ সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

১১। গণনার জন্য সর্বপ্রথম যে যন্ত্রটি আবিষ্কৃত হয় তা হল অ্যাবাকাস (Abacus)। গ্রিক শব্দ অ্যাবাক্স (ABAX) থেকে এ্যাবাকাস শব্দটির উৎপত্তি হয়েছে। গ্রিক ভাষায় এ্যাবাক্স অর্থ সমতল বোর্ড।

১২। স্কটল্যান্ডের গণিতবিদ জন নেপিয়ার (John Napier) ১৬১৪ খ্রিস্টাব্দে যে গণনা যন্ত্র আবিষ্কার করেন সে গণনা যন্ত্রের নাম নেপিয়ারের হাড়। মূলত বেশ কিছু কাঠির সাহায্যে এই যন্ত্রটি তৈরি। এই যন্ত্রে হিসাবের সহায়তার জন্য দাগ কাটা কাঠি রয়েছে। কেবল গুণ করার জন্য এই যন্ত্রটি ব্যবহৃত হতো।

১৩। ১৬১৭ সালে জন নেপিয়ার নেপেরিয়ন লগারিদম আবিষ্কার করেন যার ফলে খুব অল্প সময়ে বড় বড় গুণ, ভাগ, nth power, nth Root বের করা যেত।

১৪। **কপোত বিবর মূলনীতি ঃ** প্রথমে বিষয়টি একটু ব্যাখ্যা করে নেয়া দরকার। পরে এর সংজ্ঞা দেয়া হবে। ধরা যাক, কোন এক ব্যক্তি কপোত পালন করে। ঐ ব্যক্তি কাঠ দিয়ে এমনভাবে একটি কপোতের জন্য বাসা তৈরি করল যেন 16 টি কপোত থাকতে পারে।

অর্থাৎ তিনি 16 টি খোপ (বিবর) সম্বলিত একটি বাসা তৈরি করেছেন।

যদি ঐ ব্যক্তির 17 টি কপোত থাকে তবে কোন না কোন খোপে ২টি কপোত থাকতে হবে। আর যদি কপোতের সংখ্যা বেশি হয়, তবে আমরা কয়েকটি খোপে ও কপোতকে থাকতে হবে।

কপোত বিবর মূলনীতি ঃ যদি n সংখ্যক কপোতের খোপে $(n + 1)$ সংখ্যক বা তার চেয়ে বেশি কপোতকে থাকতে হয়। তবে কমপক্ষে একটি খোপে একাধিক কপোতকে থাকতে হবে।

উপরিউক্ত সংজ্ঞা আমাদের বাস্তব জীবনে যথেষ্ট কাজে লাগে।

উদাহরণ ঃ ধরা যাক, একটি কলেজে 20 জন অধ্যাপক আছেন। এ কলেজে 16 টি শ্রেণিকক্ষ আছে এবং একটি বিশ্রামাগার আছে। কলেজে যদি সকল অধ্যাপক উপস্থিত থাকেন, তবে 16 জন থাকবেন ক্লাশে এবং 4 জন থাকবেন বিশ্রামাগারে। এখানে 16 টি ক্লাশ এবং একটি বিশ্রামাগার অর্থাৎ 17 টি কপোত খোপ আছে এবং 20 টি কপোত আছে। সে কারণে বিশ্রামাগারে 4 জন অধ্যাপককে থাকতে হয়েছে।

১৫। প্যাস্কেলের ত্রিভুজ বা ট্রায়াংগল ঃ $(a + b)$ এর বিস্তৃতির সহগগুলোকে শ্রেণিবদ্ধ ত্রিকোণাকৃতিভাবে সাজানোকে প্যাস্কেলের ত্রিভুজ বলে।

ধরি, n এর মান 0 থেকে 6 পর্যন্ত বসিয়ে $(a + b)$ এর বিস্তৃতি করলে প্যাসকেলের ত্রিভুজ অংকিত হয়।

$n = 0$ হলে $(a + b)^0 = 1$

$n = 1$ হলে $(a + b)^1 = a + b$

$n = 2$ হলে $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

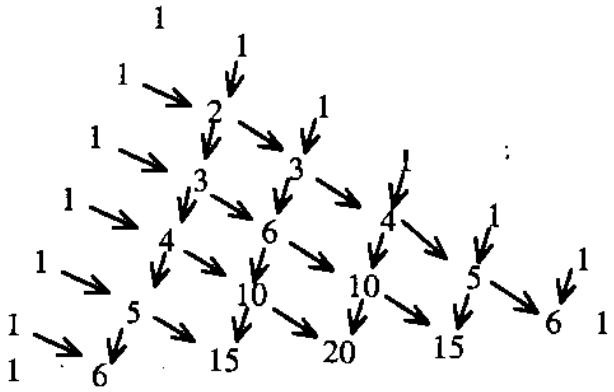
$n = 3$ হলে $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$n = 4$ হলে $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$n = 5$ হলে $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + b^3 + 5ab^4 + b^5$

$n = 6$ হলে $(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

উপরে বর্ণিত $(a + b)^n$ এর বিস্তৃতি a এবং b সংবলিত পদের সহগ (প্যাসকেল ত্রিভুজ) গুলো সংগ্রহ করে, ত্রিভুজ আকারে সাজিয়ে নিম্নলিখিত ত্রিভুজ পাই।



১৬। প্যাসকেল ত্রিভুজের শর্ত (ধর্ম) দুটি নিম্নরূপ ঃ

(i) প্রতিটি সারির প্রথম এবং শেষ, সংখ্যা হবে 1

(ii) প্রতিটি অন্যসব সংখ্যা এর উপর প্রদত্ত দু'টি সংখ্যার সারাসরি যোগের মাধ্যমে পাওয়া যাবে।

১৭। গণনার ক্ষেত্রে নানাবিধ সমস্যাবলিকে গণনার সমস্যাবলি (Coung problems) বলা হয় এবং এরূপ সমস্যাবলি যে ডায়াগ্রামের সাহায্যে সমাধান করা যায়, তাকে ট্রি ডায়াগ্রাম (Tree Diegram) বলে।

১৮। **এখানে যে কোন বর্ণ ২ বার নেই। অতএব, মোট বর্ণ সংখ্যা** 11। এ 11টি বর্ণ থেকে প্রতিবার 5টি বর্ণ নিয়ে সাজাতে হবে। অতএব, মোট বিন্যাস সংখ্যা $11p_5$

অতএব, মোট 55440 বার সাজানো যায়।

১৯। আমরা জানি,

$${}^nC_r = \frac{n!}{n!\,(n-r)!}$$

এবং ${}^nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\,(n-n+r)!}$

$$= \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

$$= \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$= {}^nC_r$ **(প্রমাণিত)**

২০। এখানে, ${}^nC_{12} = {}^nC_8$

$\therefore {}^nC_{n-12} = {}^nC_8$

বা, $n - 12 = 8$

বা, $n = 20$

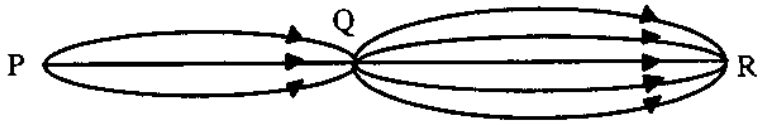
$$\therefore {}^{22}C_n = {}^{22}C_{20} = \frac{\lfloor 22}{\lfloor 20 \ \lfloor (22-20)}$$

$$= \frac{22 \times 21 \times \lfloor 20}{\lfloor 20 \times \lfloor 2} = \frac{22 \times 21}{2}$$

$= 231$

▶▶ রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ঃ

২১। **গণনার যোজন বিধি (Sum Rule Principle) ঃ** ধরা যাক, P থেকে Q-তে যেতে 3টি পৃথক পথ আছে এবং Q থেকে R-এ যেতে 5টি পৃথক পথ আছে। লোকটি কত প্রকারে P থেকে Q-এ যেতে পারে?



চিত্র থেকে এটা স্পষ্ট যে, লোকটি P থেকে Q তে 3টি পৃথক পথে যেতে পারে এবং Q থেকে R-এ যাওয়ার 5টি পথ আছে। যেহেতু, P থেকে Q-তে যাওয়ার প্রতিটি পথের জন্য Q থেকে R- এ যাওয়ার 5টি পথ আছে। অতএব, লোকটি P থেকে Q হয়ে R-এ মোট $3 + 3 + 3 + 3 + 3$ অথবা $3 \times 5 = 15$ প্রকারে যেতে পারে। এখানে আমরা যে যোজন বিধি তত্ত্বটি ব্যবহার করেছি তা নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়।

ধরা যাক, একটি ঘটনা E_1 ঘটতে পারে n_1 পথে, ২য় ঘটনা E_2 ঘটতে পারে, n_2 পথে, ৩য় ঘটনা E_3 ঘটতে পারে n_3 পথে ------ এবং মনে করি যে, এদের মধ্যে ২টি ঘটনা কখনই একই সময়ে ঘটবে না। তখন ঘটনাগুলোর মধ্যে একটি ঘটনা $n_1 + n_2 + n_3 +$ ---- পথে ঘটবে।

গুণবোধক মূলনীতি (Product Rule Principle) ঃ

মনে করি, একটি ঘটনা (Event) আছে যা m উপায়ে ঘটতে পারে এবং এই ঘটনা থেকে স্বাধীন হয় একটি ঘটনা (Event) F যা n উপায়ে ঘটতে পারে। E এবং F এর একত্রীকরণে এরা mn উপায়ে ঘটতে পারে। আরও সহজ কথায় বলা যায়, ধরা যাক, একটি ঘটনা E_1, n_1 উপায়ে ঘটতে পারে, E_1 কে অনুসরণ করে ২য় ঘটনা E_2, n_2 উপায়ে ঘটতে পারে এবং E_2 কে অনুসরণ করে ৩য় ঘটনা E_3, n_3 উপায়ে ঘটতে পারে এবং অনুরূপভাবে E_4, E_5 ------- ঘটে n_4, n_5------ উপায়ে। তখন সবগুলো ঘটনা ঘটার ক্রম উপায় হবে–

$= n_1 \ldots n_2, n_3, n_4$ ---------- and So on

২২। দ্বিপদী সহগ বা (Binomial Co-efficients) ঃ প্রতীক $\binom{n}{r}$ বা $({}_nC_r)$ যেখানে r এবং n যোগবোধক পূর্ণসংখ্যা; $r \le n$ হয়, তখন একে নিম্নরূপ সংজ্ঞায়িত করা যায়, $\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots.(r-1)^r}$

$= \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

কিন্তু $n-(n-r)=r$; তখন

$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\,[r-(n-r)]!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$

অতএব $\binom{n}{n-r} = \binom{n}{r}$

অনুরূপভাবে, যদি $a+b=n$ হয়, তখন $\binom{n}{a} = \binom{n}{b}$

$\binom{n}{r}$, এই সংখ্যাকে দ্বিপদী সহগ বলা হয়। যেহেতু এই সহগটি $(a+b)^n$ এর বিস্তৃতিতে আছে। সুনির্দিষ্ট প্রমাণ করতে পারি যে, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ একে নিম্নরূপভাবেও প্রকাশ করা যায়।

যেমন, $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

এবং $C({}^nC_{n-r}) = \frac{n!}{(n-b)!\,[n-(n-r)]!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$

প্যাসকেলের ত্রিভুজ বা ট্রায়াংগল ঃ $(a+b)^n$ এর বিস্তৃতির সহগগুলোকে শ্রেণীবদ্ধ ত্রিকোণাকৃতিভাবে সাজানোকে প্যাসকেলের ত্রিভুজ বলে।

ধরি n এর মান 0 থেকে 6 পর্যন্ত বসিয়ে $(a+b)$ এর বিস্তৃতি করলে প্যাসকেলের ত্রিভুজ অংকিত হয়।

$n=0$ হলে $(a+b)^0 = 1$

$n=1$ হলে $(a+b)^1 = a+b$

$n=2$ হলে $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

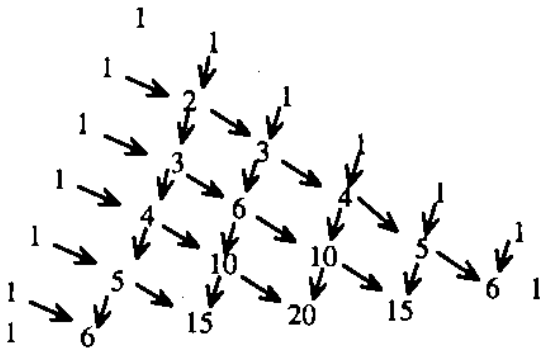
$n=3$ হলে $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$n=4$ হলে $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$n=5$ হলে $(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

$n=6$ হলে $(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

উপরে বর্ণিত $(a+b)^n$ এর বিস্তৃতি a এবং b সংবলিত পদের সহগগুলো সংগ্রহ, করে ত্রিভুজ আকারে সাজিয়ে নিম্নলিখিত ত্রিভুজ পাই।



প্যাসকেলের ত্রিভুজের সংখ্যাগুলোর নিম্নলিখিত ধর্ম বা শর্ত রয়েছে ঃ

(i) প্রতি সারির ১ম এবং শেষ সংখ্যা = 1 হবে।

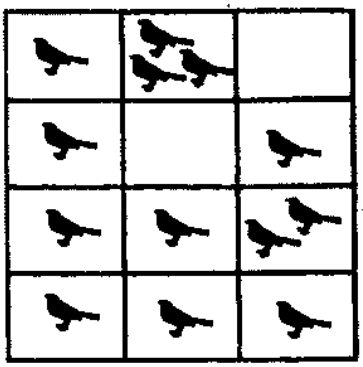
(ii) শ্রেণীবদ্ধ ভাবে সাজানো যে কোন সংখ্যা পাওয়া যাবে, এর উপরের কোনাকুনিভাবে অবস্থিত দুটি সংখ্যাকে যোগ করলে। যেমন ঃ $10 = 4 + 6$, $15 = 5 + 10$, $20 = 10 + 10$

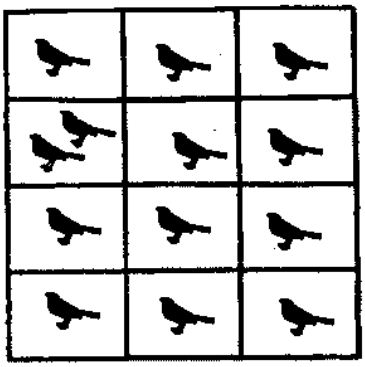
(iii) ১ম সারিতে 1টি সংখ্যা, ২য় সারিতে 2টি সংখ্যা, ৩য় সারিতে 3টি সংখ্যা, ৪র্থ সারিতে 4টি সংখ্যা ইত্যাদি।

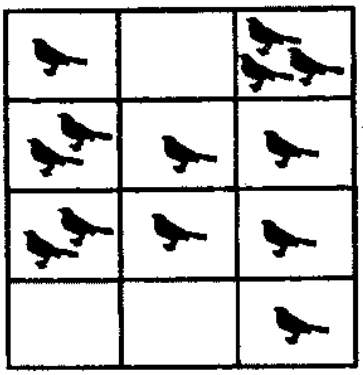
(iv) যে কোন সারির ১ম বা শেষ থেকে ২য় পদটি হবে তার আগের সারির ১ম ও ২য় পদের সমষ্টি আবার যে কোন সারির ১ম বা শেষ থেকে ৩য় পদটি হবে তার আগের সারির ২য় এবং ৩য় পদের সমষ্টি, ইত্যাদি।

২৩। প্রথমে বিষয়টি একটু ব্যাখ্যা করে নেয়া দরকার। ধরা যাক কোন ব্যক্তি কপোত পালন করে। ঐ ব্যক্তি কাঠ দিয়ে এমনভাবে একটি কপোতের জন্য বাসা তৈরী করল যেন 16টি কপোত থাকতে পারে। অর্থাৎ তিনি 16টি খোপ (বিবর) সম্বলিত একটি বাসা তৈরী করেছেন।

যদি ঐ ব্যক্তির 17টি কপোত থাকে তবে কোননা কোন খোপ (বিবরএ) 2টি কপোত থাকতে হবে। আর যদি কপোতের সংখ্যা বেশি হয় তবে আরো কয়েকটি খোপ ও একাধিক কপোত থাকতে হবে।







কপোত বিবর মূলনীতি (ডিরিজিয়ন হোল নীতি) ঃ যদি n সংখ্যক কপোতের খোপে (n +1) সংখ্যক বা তার চেয়ে বেশি কপোতকে থাকতে হয়। তবে কমপক্ষে একটি খোপে একাধিক কপোতকে থাকতে হবে।"

উপরিউক্ত সংজ্ঞা আমাদের বাস্তব জীবনে যথেষ্ট কাজে লাগে।

উদাহরণ ঃ ধরা যাক, একটি কলেজে 20 জন অধ্যাপক (কপোত) আছেন। ঐ কলেজে 16টি শ্রেণিকক্ষ আছে (কপোত খোপ বা বিবর) এবং একটি বিশ্রামাগার কপোত খোপ) আছে। কলেজে যদি সকল অধ্যাপক উপস্থিত থাকেন, তবে 16 জন থাকবেন ক্লাশে এবং 4 জন থাকবেন বিশ্রামাগারে। এখানে 16টি ক্লাশরুম এবং একটি বিশ্রামাগার আছে। অর্থাৎ 17টি কপোত খোপ আছে। এবং 20টি কপোত (অধ্যাপক) আছে।

বিশ্রামাগারে 4 জন অধ্যাপককে থাকতে হয়েছে।

সাধারণ কপোতবিবর নীতি ঃ যদি n সংখ্যক কপোত খোপ kn + 1 সংখ্যক বা তার চেয়ে বেশি কপোতের জন্য বরাদ্ধ থাকে, যেখানে k একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা, তবে কোন না কোন কপোত খোপে kn + 1 বা তারচেয়ে বেশি কপোতকে থাকতে হবে।

এ নীতিকে জেনারেলাইজড পিজিয়ন নীতি বা সাধারণ কপোত বিবর নীতি বলে।

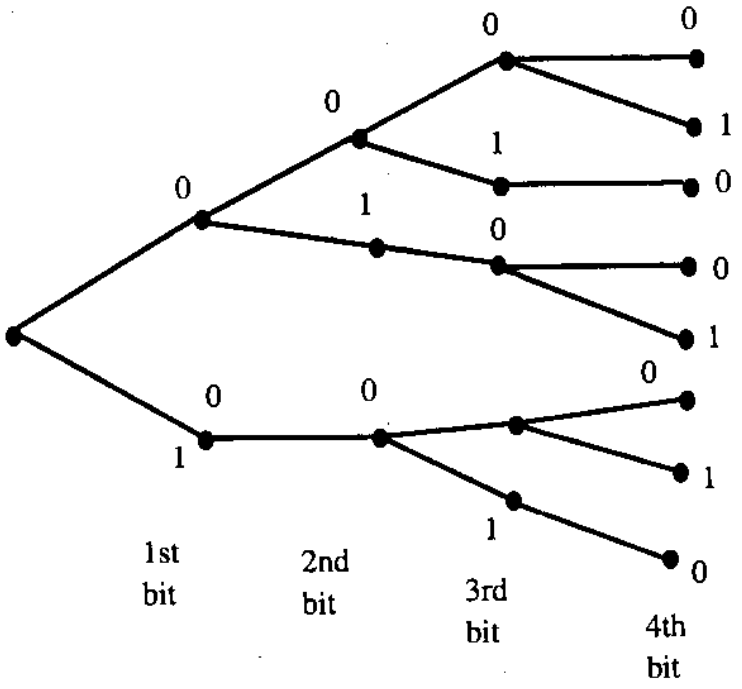
উদাহরণ ঃ ধরা যাক, কোন ব্যক্তি টি শার্ট ক্রয় করার জন্য দোকানে গেল। দোকানে লাল, নীল, সবুজ এবং সাদা এ 4 রঙের (কপোত খোপ আছে)। এখানে n = 4 ঐ ব্যক্তি 9টি (কপোত) টি-শার্ট কিনবে (kn = 1, এখানে k এর মান 2 ধরে kn + 1 = 9 পাই)। তাকে অবশ্যই কোন না কোন রঙের 3টি (কপোত সংখ্যা = k + 1) টি-শার্ট ক্রয় করতে হবে।

২৪। গণনার ক্ষেত্রে নানাবিধ সমস্যাবলিকে গণনার সমস্যাবলি (Counting problems) বলা হয় এবং এরূপ সমস্যাবলি যে ডায়াগ্রামের সাহায্যে সমাধান করা যায়, তাকে ট্রি ডায়াগ্রাম (Tree Diagram) বলা হয়। একটি ট্রি মূলত একটি মূল (Root), মূলের মধ্যকার বিভিন্ন শাখা এবং শাখার শেষ অংশে অবস্থিত প্রশাখা নিয়ে গঠিত। শাখার মাধ্যমে সম্ভাব্য পছন্দ নির্ধারণে ট্রি ডায়াগ্রাম গণনার কার্যে ব্যবহার করা হয়। পাতা থেকে সম্ভাব্য ফলাফল বের হবে যা শাখার শেষ বিন্দুতে অবস্থিত এবং যেখান থেকে নতুন কোন শাখা-প্রশাখা বের হয় না।

উদাহরণ ঃ (a) দৈর্ঘ্য 4 এর কতগুলো বিট স্ট্রিং (Bit String) পাওয়া যাবে যেখানে পরপর 2টি 1 থাকবে না?

সমাধান ঃ

চিত্র 8.২ (a) একটি ট্রি ডায়াগ্রাম (Tree Diagram) দেখান হলো যেখানে দৈর্ঘ্য 4 এর বিট স্ট্রিং এ পরপর 2টি 1 ছাড়াই গণনা করা হয়েছে। এখানে দেখা যায় যে, পরপর 2টি 1 ছাড়া 8 টি বিট স্ট্রিং রয়েছে।



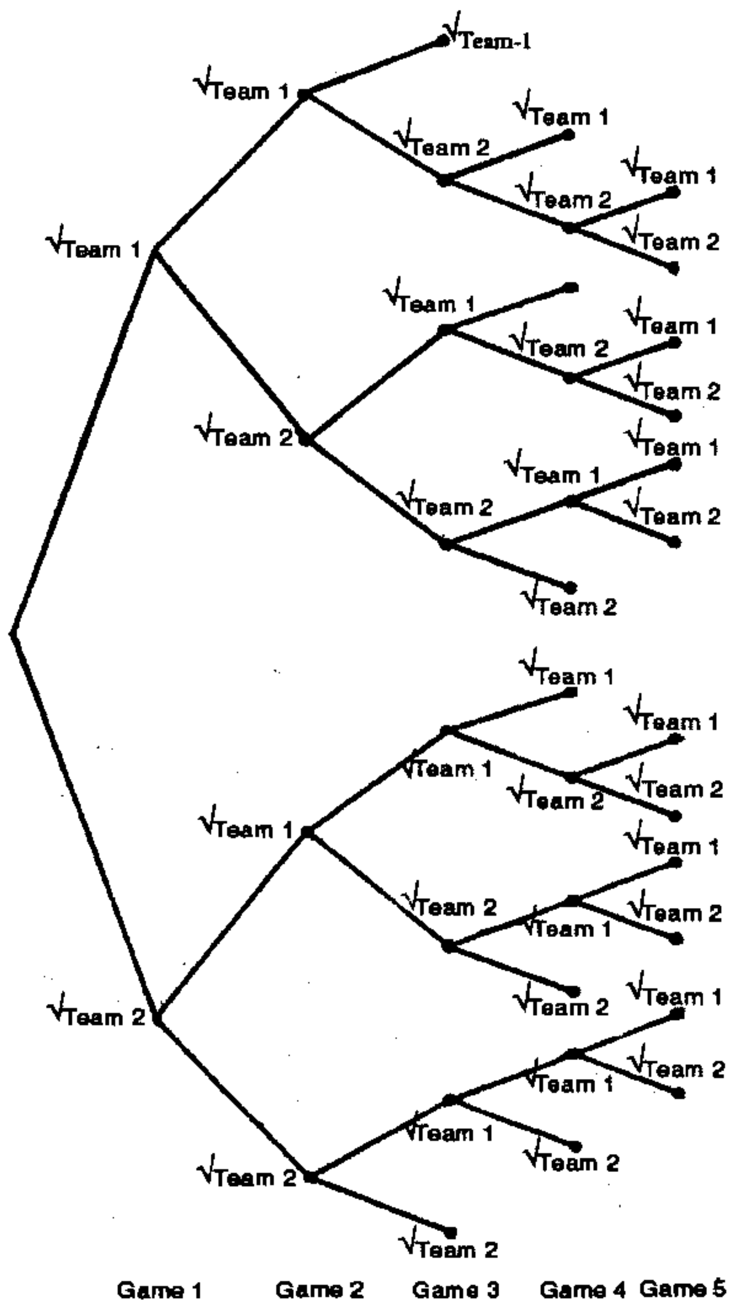
চিত্র ঃ ৪.২ (a) ট্রি ডায়াগ্রাম

(b) দুটি দলের মধ্যে জয়-পরাজয় নির্ধারণী 5টি খেলা হবে।

প্রথম দলটি জয়-পরাজয় নির্ধারণী (play off) খেলায় জয়ের লক্ষ্যে তিনটি খেলায় জয় লাভ করল। এই জয়-পরাজয় (play-off) খেলা কত প্রকারে খেলা যায়?

সমাধান :

চিত্র নং ৪.২ (b) তে এই জয় পরাজয় নির্ধারণী খেলা (Play-off Math) যতভাবে খেলা সম্ভব উহা দেখান হয়েছে। তাছাড়া প্রত্যেক খেলার বিজয়ী দলও দেখান হয়েছে। এখানে দেখা যায় যে, 20 প্রকারে উক্ত খেলাগুলো খেলানো সম্ভব।



চিত্র নং ৪.২ (b) প্লে-অফ ম্যাচের ট্রি ডায়াগ্রাম

▸▸ সমস্যাবলি ঃ

২৫। বামপক্ষ

$^{n+1}C_r = {}^nC_{r-1} + {}^nC_r$

ডানপক্ষ

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$$

$$= \frac{\lfloor n}{\lfloor (r-1) \lfloor n-r+1} + \frac{\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r}$$

এখন ১ম সংখ্যাকে $\frac{r}{r}$ এবং ২য় সংখ্যাকে $\frac{n-r+1}{n-r+1}$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$= \frac{r\lfloor n}{r\lfloor r-1 \lfloor n-r+1} + \frac{(n+r+1)\lfloor n}{\lfloor r\ (n-r+1)\lfloor n-r}$$

$$= \frac{r\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r+1} + \frac{(n-r+1)\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r+1}$$

$$= \frac{r\lfloor n + (n-r+1)\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r+1}$$

$$= \frac{(r+n-r+1)\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r+1}$$

$$= \frac{(n+1)\lfloor n}{\lfloor r \lfloor (n-r+1)}$$

$$= \frac{\lfloor n+1}{\lfloor r \lfloor n+1-r}$$

$$= \binom{n+1}{r} \text{ বা, } {}^{n+1}C_r$$

বামপক্ষ

∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

২৬। $(a+b)^n$ এর বিস্তৃতির সহগগুলোকে শ্রেণিবদ্ধ ত্রিকোনাকৃনিভাবে সাজানোকে প্যাসকেলের ত্রিভুজ (Pascals triangle) বলে। প্রশ্নমতে, n এর মান 0 থেকে 6 পর্যন্ত বসিয়ে $(a+b)$ এর বিস্তৃতি করলে প্যাসকেলের নিম্নোক্ত ত্রিভুজ অংকিত হয়।

$n = 0$ হলে $(a+b)^0 = 1$

$n = 1$ হলে $(a+b)^1 = a+b$

$n = 2$ হলে $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

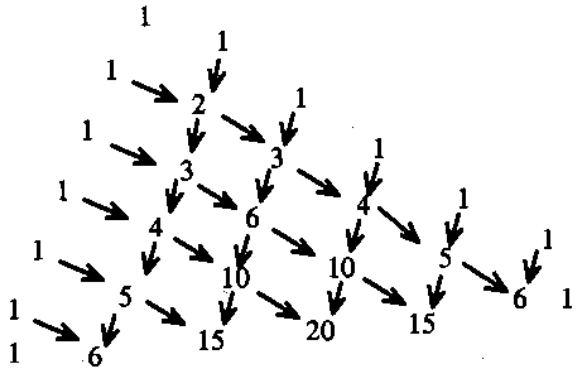
$n = 3$ হলে $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$n = 4$ হলে $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$n = 5$ হলে $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

$n = 6$ হলে $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

উপরে বর্ণিত $(a+b)^n$ এর বিস্তৃতি a এবং b সংবলিত পদের সহগগুলো সংগ্রহ, করে ত্রিভুজ আকারে সাজিয়ে নিম্নলিখিত ত্রিভুজ পাই।



চিত্র ঃ প্যাসকেল ত্রিভুজ

প্যাসকেল ত্রিভুজের সংখ্যাগুলোর নিম্নলিখিত ধর্ম বা শর্ত (Intersecting Properties) রয়েছে ঃ

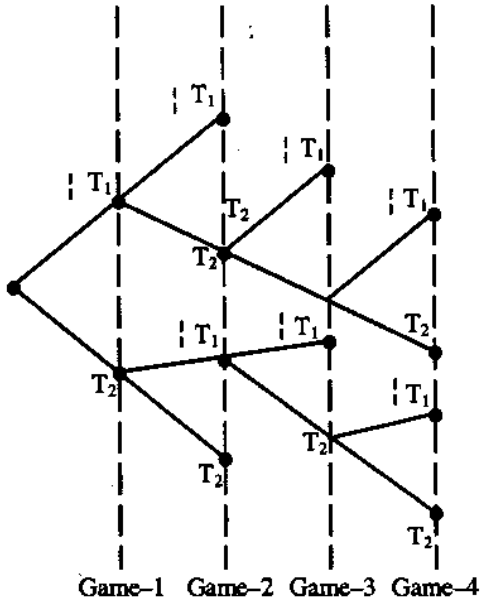
(i) প্রতি সারির ১ম এবং শেষ সংখ্যা 1

(ii) শ্রেণিবদ্ধভাবে সাজানো যে কোন সংখ্যা পাওয়া যাবে, এর উপরের কোনাকুনিভাবে অবস্থিত দু'টি সংখ্যাকে যোগ করলে। যেমন ঃ $10 = 4 + 6$, $15 = 5 + 10$, $20 = 10 + 10$

(iii) ১ম সারিতে 1টি সংখ্যা, ২য় সারিতে ২টি সংখ্যা ৩য় সারিতে 3 টি সংখ্যা, ৪র্থ সারিতে 4 টি সংখ্যা ইত্যাদি।

(iv) যে কোন সারির ১ম বা শেষ থেকে ২য় পদটি হবে তার আগের সারির ১ম ও ২য় পদের সমষ্টি, আবার যে কোন সারির ১ম বা শেষ থেকে ৩য় পদটি হবে তার আগের সারির ২য় এবং ৩য় পদের সমষ্টি ইত্যাদি।

২৭। টি ডায়াগ্রাম হতে দেখা যায় 7 প্রকারে উক্ত খোলা সম্ভব



বিঃদ্রঃ বিজয়ী দলকে √ চিহ্ন দ্বারা দেখানো হয়েছে–

২৮। (a) $5! = 1.2.3.4.5 = 120$

$6! = 6.5! = 6. \times 120 = 720$

$7! = 7.7! = 7 \times 720 = 5040$

$8! = 8.7! = 8 \times 5040 = 40320$

$9! = 9.8! = 9 \times 40320 = 362880$

$10! = 10.9! = 10 \times 362880 = 3628800$

(b) (i) $\frac{13!}{12!} = \frac{13 \times 12!}{12!} = 13 \times 1 = 13$

(ii) $\frac{17!}{10!} = \frac{17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10!}{10!}$

$= 98017920$

(ii) $\frac{80!}{70!}$

$= \frac{80 \times 79 \times 78 \times 77 \times 76 \times 75 \times 74 \times 73 \times 72 \times 71 \times 70!}{70!}$

$= 5.974790569 \times 10^{18}$

(iv) $\frac{100!}{99!} = \frac{100 \times 99!}{99!} = 100$

(c) (i) $\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!}$

$= n(n-1)$

(ii) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)\, n.\, (n-1)!}{(n-1)!}$

$= n(n+1)$

(d) (i) $\binom{66}{39} = \frac{66!}{39!\,(66-39)!}$

$= \frac{66!}{39!\ldots 27!} = 2.450791253 \times 10^{18}$

(ii) $\binom{100}{80} = \frac{100!}{80!\,(100-80)!}$

$= \frac{100!}{80!\,20!}$

$= \frac{100.\,99.\,98.\,97.\,96.\,95.\,94.\,93.\,92.\,91.\,90.\,89.\,88.\,87.\,86.\,85.\,84.\,83.\,82.\,81.\,80!}{80!\ldots 20!}$

$= 5.359833704 \times 10^{20}$

(iii) $\binom{99}{77} = \frac{99!}{77!\,(99-77)}$

$= \frac{99!}{77!\ldots 22!}$

$= \frac{99.\,98.\,97.\,96.\,95.\,94.\,93.\,92.\,91.\,90.\,89.\,88.\,87.\,86.\,85.\,84.\,83.\,82.\,81.\,80.\,79.\,78.\,77!}{77!\ldots 22!}$

$= 5.719012\,17 \times 10^{21}$

(iv) $\binom{22}{17} = \frac{22!}{17! \times (22-17)}$

$= \frac{22!}{17!\ldots 5!} = \frac{22.\,21.\,20.\,19.\,18.\,17!}{17!\ldots 5!}$

$= 26334$

(e) প্রমাণ ঃ $\binom{17}{6} = \binom{16}{5} + \binom{16}{6}$

ডানপক্ষ ঃ $\binom{16}{5} + \binom{16}{6}$

$$= \frac{16!}{5!\,(16-5)!} + \frac{16!}{6!\,(16-6)!}$$

$$= \frac{16!}{5!...11!} + \frac{16!}{6!...10!}$$

প্রথম ভগ্নাংশকে $\frac{6}{6}$ এবং দ্বিতীয় ভগ্নাংশকে $\frac{11}{11}$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$\binom{16}{5} + \binom{16}{6} = \frac{6.\,16!}{6.\,5!\,11!} + \frac{11.\,16!}{6!.\,10!.\,11}$$

$$= \frac{6.\,16!}{6!\,11!} + \frac{11.\,16!}{6!\,11!}$$

$$= \frac{6.\,16! + 11.\,16!}{6!.\,11!}$$

$$= \frac{16!\,(6+11)}{6!\,11!} = \frac{16!\,17}{6!\,11!}$$

$$= \frac{17!}{6!\,11!}$$

$$= \binom{17}{6}$$ **(প্রমাণিত)**

(f) $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$

প্রমাণ ঃ

ডানপক্ষ

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!} + \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

প্রথম ভগ্নাংশকে $\frac{r}{r}$ দ্বারা এবং দ্বিতীয় ভগ্নাংশকে $\frac{n-r+1}{n-r+1}$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \frac{r.\,n!}{r.\,(r-1)!\,(n-r+1)} + \frac{(n-r+1)\,n!}{(n-r+1)\,r!\,(n-r)!}$$

$$= \frac{r.\,n!}{r!\,(n-r+1)!} + \frac{(n-r+1)\,n!}{r!\,(n-r+1)!}$$

$$= \frac{r.\,n! + (n-r+1).\,n!}{r!\,(n-r+1)!}$$

$$= \frac{n!\,[r + (n-r+1)]}{r!\,(n-r+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)\,n!}{r!\,(n-r+1)!} = \frac{(n+1)!}{r!\,(n-r+1)!}$$

$$= \binom{n+1}{r}$$ বামপক্ষ **(প্রমাণিত)**

২৯। (i) ${}^{n}P_4 = 6 \times {}^{n}P_3$ বা, $n(n-1)(n-2)(n-3) = 6n(n-1)(n-2)$

বা, $n - 3 = 6$ বা, $n = 9$

(ii) ${}^{2n}P_3 = 2 \times {}^{n}P_4$

বা, $2n(2n-1)(2n-2) = 2n(n-1)(n-2)(n-3)$

বা, $(2n-1)2(n-1) = (n-1)(n-2)(n-3)$

বা, $4n - 2 = n^2 - 5n + 6$ বা, $n^2 - 9n + 8 = 0$

বা, $(n-1)(n-8) = 0 \therefore n = 1$ বা, 8

$n = 1$ গ্রহণযোগ্য নয়, কারণ যদি $n = 1$ হয় প্রদত্ত সম্পর্কটি দাঁড়ায় ${}^{2}P_3 = 2 \times {}^{1}P_4$; এর কোন অর্থই হয় না।

$\therefore n = 8$

৩০। 'EQUATION' শব্দটি ৪টি বিভিন্ন অক্ষর নিয়ে গঠিত। এই ৪টি অক্ষর একত্রে ব্যবহার করে গঠিত বিভিন্ন শব্দের সংখ্যা ${}^{8}P_8$

$= \lfloor 8 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4032$

৩১। এখানে 6 টি বিভিন্ন অংক আছে। এই 6 টি অংশ হতে 4 টি অংক একত্রে ব্যবহার করে গঠিত সংখ্যা $= {}^{6}P_4 = \dfrac{\lfloor 6}{\lfloor 6-4} = \dfrac{\lfloor 6}{\lfloor 2}$

$= 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

৩২। (i) 'SECOND' শব্দটি 2টি স্বরবর্ণ এবং 4টি ব্যঞ্জনবর্ণ নিয়ে গঠিত। নতুন যে শব্দগুলো গঠিত হবে তার মধ্যে 1টি স্বরবর্ণ এবং 2টি ব্যঞ্জনবর্ণ থাকতে হবে। যেহেতু স্বরবর্ণটি মধ্যস্থানে থাকতে হবে, সুতরাং 2টি স্বরবর্ণ হতে তা ${}^{2}P_1 = \lfloor 2 = 2$ ভাবে নেয়া যেতে পারে। পুনরায় 4টি ব্যঞ্জনবর্ণ হতে 2টি ব্যঞ্জনবর্ণ ${}^{4}P_2 = 4.3 = 12$ ভাবে নেয়া যেতে পারে।

$\therefore$ নির্ণেয় গঠিত শব্দের সংখ্যা $= 2 \times 12 = 24$.

(i) 'EQUATION' শব্দটিতে ৪টি বিভিন্ন বর্ণ রয়েছে। আমাদেরকে 4টি বিভিন্ন বর্ণের শব্দ এমনভাবে তৈরি করতে হবে যেন গঠিত শব্দগুলোতে একটি নির্দিষ্ট বর্ণ (অর্থাৎ N) থাকবে না। সুতরাং আমাদের ব্যবহার্য বিভিন্ন বর্ণের মোট $(8 - 1) = 7$ টি ধরা যায়। অপর দিকে আর একটি নির্দিষ্ট বর্ণ (অর্থাৎ Q) প্রতিটি বিন্যাসেই রাখতে হবে।

এখন 4টি স্থানের মধ্যে একটি স্থানে একটি নির্দিষ্ট বর্ণ দ্বারা ${}^{4}P_1$ উপায়ে পূর্ণ করা যায়। অবশিষ্ট 3টি স্থান $(7 - 1) = 6$টি বর্ণ দ্বারা ${}^{6}P_3$ উপায়ে পূর্ণ করা যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় সাজানোর সংখ্যা $= {}^{4}P_1 \times {}^{6}P_3 = 4 \times 6 \times 5 \times 4 = 480$

৩৩। (i) 'CALCUTTA' শব্দটিতে ৪টি বর্ণ আছে, যার মধ্যে 2টি C, 2টি A এবং 2টি T

$\therefore$ 'CALCUTTA' শব্দটির মোট বিন্যাস সংখ্যা, $p_1 = \dfrac{\lfloor 8}{\lfloor 2 \lfloor 2 \lfloor 2} = 5040$

আবার, 'AMERICA' শব্দটিতে মোট 7টি বর্ণ আছে, যার মধ্যে 2টি A রয়েছে।

$\therefore$ 'AMERICA' শব্দটির বিন্যাস সংখ্যা, $p_2 = \dfrac{\lfloor 7}{\lfloor 2} = 2520$

এখন $\dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{5040}{2520}$ বা, $\dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{2}{1}$ বা, $p_1 = 2\,p_2$

অর্থাৎ 'CALCUTTA' শব্দটির বর্ণগুলোকে 'AMERICA' শব্দটির বর্ণগুলোর চাইতে দ্বিগুণ সংখ্যক উপায়ে সাজানো যায়।

(ii) মনে করি, x সংখ্যক বর্ণ এক জাতীয়। সুতরাং 10টি জিনিসের সবগুলোকে একত্রে নিয়ে গঠিত বিন্যাস সংখ্যা যাদের মধ্যে x সংখ্যক এক জাতীয় $= \frac{\lfloor 10}{\lfloor x}$

প্রশ্নানুসারে, $\frac{\lfloor 10}{\lfloor x} = 30240$ বা, $\frac{\lfloor 10}{\lfloor x} = 10\times9\times8\times7\times6$

বা, $\frac{\lfloor 10}{\lfloor x} = \frac{\lfloor 10}{\lfloor 5}$ বা, $\lfloor x = \lfloor 5 \quad \therefore x = 5$

৩৪। (i) 'PARALLEL' শব্দটির মোট 8টি বর্ণের মধ্যে 2টি A এবং 3টি L রয়েছে।

$\therefore$ নির্ণেয় মোট বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{\lfloor 8}{\lfloor 2 \lfloor 3} = 3360$

স্বরবর্ণ তিনটিকে একটি মনে করে শব্দ গঠন করার জন্য আমরা 6টি বর্ণ P, R, L, L, L, (A, A, E) পাই।

সুতরাং, স্বরবর্ণগুলো একত্রে থাকে এরূপ সাজানোর সংখ্যা $= \frac{\lfloor 6}{\lfloor 3} = 120$

পুনরায় তিনটি স্বরবর্ণকে তাদের নিজেদের মধ্যে $\frac{\lfloor 3}{\lfloor 2}$ প্রকারে সাজানো যেতে পারে।

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলো একত্রে থাকবে এরূপ শব্দের সাজানো সংখ্যা $= 120\times\frac{\lfloor 3}{\lfloor 2} = 120\times3 = 360$

(ii) 'MATHEMATICS' শব্দটির মোট 11টি অক্ষরের মধ্যে 2টি A এবং 2 টি T আছে।

$\therefore$ নির্ণেয় মোট সাজানোর সংখ্যা $= \frac{\lfloor 11}{\lfloor 2 \lfloor 2 \lfloor 2}$

স্বরবর্ণ চারটিকে একটি অক্ষর (A, E, A, I) মনে করি আমরা 8টি অক্ষর পাই। এ 8টি অক্ষরের মধ্যে M দুবার এবং T দুবার আসে। সুতরাং স্বরবর্ণ 4টি (A, E, A, I) একত্রে রেখে মোট $\frac{\lfloor 8}{\lfloor 2 \lfloor 2}$ উপায়ে শব্দ গঠন করা যেতে পারে।

পুনরায় 4টি স্বরবর্ণের মধ্যে A দুবার আসে, ফলে তাদেরকে নিজেদের মধ্যে $\frac{\lfloor 4}{\lfloor 2}$ উপায়ে সাজানো যায়।

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলো একত্রে থাকে এরূপ শব্দের সাজানো সংখ্যা $= \frac{\lfloor 8}{\lfloor 2 \lfloor 2}\times\frac{\lfloor 4}{\lfloor 2}$

৩৫। (i) 'ALLAHABAD' শব্দটির মোট 9টি অক্ষরের মধ্যে 4টি A এবং 2টি L আছে।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{\lfloor 9}{\lfloor 4 \lfloor 2} = 7560$

4টি A-কে একটি অক্ষর মনে করে আমরা শব্দ গঠন করার জন্য 6টি অক্ষর পাই যাদের মধ্যে 2টি L আছে।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা $= \frac{\lfloor 6}{\lfloor 2} = 360$

পুনরায় 4টি A কে তাদের মধ্যে $\frac{\lfloor 4}{\lfloor 4} = 1$ উপায়ে সাজানো যায়।

অতএব, 4টি একত্রে বসিয়ে নির্ণেয় বিন্যাস সংখ্যা = $360 \times 1 = 360$

4 টি জোড় স্থান 4টি A দ্বারা এক উপায়ে এবং 5টি বেজোড় স্থান 5টি ব্যঞ্জনবর্ণ L, L, H, B, D দ্বারা $\frac{\lfloor 5}{\lfloor 2}$ উপায়ে পূরণ করা যায়।

$\therefore$ স্বরবর্ণগুলোকে জোড় স্থানে রেখে নির্ণেয় বিন্যাস = $\frac{\lfloor 5}{\lfloor 2} \times 1 = 60$

(ii) প্রদত্ত অংকগুলোর মধ্যে 4টি বেজোড় সংখ্যা হচ্ছে 3, 5, 3, 5 এবং তাদের মধ্যে দুটি 3, দুটি 5 আছে। তিনটি জোড় সংখ্যা হচ্ছে 4, 4, 6 এবং তাদের মধ্যে দুটি 4 আছে।

নিম্নে শূন্যস্থানগুলো পূরণ করার পদ্ধতি দেখান হলো ঃ

I II III IV V VI VII

4টি বেজোড় স্থান 4টি বেজোড় অংক দ্বারা $\frac{\lfloor 4}{\lfloor 2 \lfloor 2} = 6$ উপায়ে পূরণ করা যায়।

অবশিষ্ট 3টি জোড় স্থান 3টি জোড় অংক দ্বারা $\frac{\lfloor 3}{\lfloor 2} = 3$ উপায়ে পূরণ করা যায়।

$\therefore$ নির্ণেয় গঠিত সংখ্যা = $6 \times 3 = 18$

৩৬। প্রশ্নানুসারে, সংখ্যাগুলোর শেষ স্থানে অবশ্যই 0 বা 5 থাকতে হবে এবং তারা এক, দুই বা তিন অংকবিশিষ্ট হতে পারে। পুনরায় 0 দ্বারা আরম্ভ হয় এরূপ সংখ্যা গণ্য করা যায় না।

(i) 5 দ্বারা বিভাজ্য এবং এক অংক দ্বারা গঠিত সংখ্যা = 1

(ii) মনে করি, সংখ্যাগুলো দুই অংকবিশিষ্ট। শেষ স্থানের জন্য 5-কে নির্দিষ্ট করে এবং অবশিষ্ট 9টি অংক হতে একবারে একটি নিয়ে গঠিত সংখ্যা = ${}^9P_1 = 9$

0 প্রথম স্থানে এবং 5 শেষ স্থানে নির্দিষ্ট করে নির্ণেয় অবশিষ্ট 8টি অংক দ্বারা গঠিত সংখ্যা = ${}^8P_0 = 1$

$\therefore$ শেষ স্থানে 5 এবং দুই অংক দ্বারা গঠিত অর্থপূর্ণ সংখ্যা = $9 - 1 = 8$

পুনরায় শেষ স্থানে 0 নির্দিষ্ট করে এবং অবশিষ্ট 9টি অংক হতে একবারে একটি নিয়ে গঠিত সংখ্যা = ${}^9P_1 = 9$

$\therefore$ 5 দ্বারা বিভাজ্য এবং দুই অংকবিশিষ্ট অর্থপূর্ণ সংখ্যা = $8 + 9 = 17$

(iii) মনে করি, সংখ্যাগুলো তিন অংকবিশিষ্ট।

5-কে শেষ স্থানে নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট 9টি অংক হতে দুটি একবারে নিয়ে গঠিত সংখ্যা = ${}^9P_2 = 72$

এখন 0 প্রথম স্থানে এবং 5 শেষ স্থানে নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট 8টি অংক হতে একবার একটি অংক নিয়ে গঠিত সংখ্যা = ${}^8P_1 = 8$

5 শেষ স্থানে রেখে 3 অংক দ্বারা গঠিত অর্থপূর্ণ সংখ্যা = $72 - 8 = 64$

পুনরায় 0 শেষ স্থানে নির্দিষ্ট করে অবশিষ্ট 9টি অংক হতে একবারে দুটি অংক নিয়ে গঠিত সংখ্যা = ${}^9P_2 = 72$

$\therefore$ 5 দ্বারা বিভাজ্য এবং তিনটি অংক দ্বারা গঠিত অর্থপূর্ণ সংখ্যা = $64 + 72 = 136$

$\therefore$ 5 দ্বারা বিভাজ্য মোট সংখ্যা = $1 + 17 + 136 = 154$

৩৭। এটি 5 অংক হতে একবারে তিন অংক দ্বারা গঠিত সংখ্যার সমান। এদের মধ্যে একটি অংক যে কোন বার আসতে পারে।

$\therefore$ নির্ণেয় 3 অংকবিশিষ্ট সংখ্যা = $5^3 = 125$

এদের মধ্যে ${}^5P_3$ সংখ্যক সংখ্যা বিভিন্ন অংক দ্বারা গঠিত।।

অর্থাৎ ${}^4P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$

$\therefore$ দুই বা ততোধিক সমান সংখ্যক অংক দ্বারা গঠিত সংখ্যা = $125 - 60 = 65$

৩৮। 'PERMUTATION' শব্দটির মোট 11টি অক্ষরের মধ্যে 5টি স্বরবর্ণ এবং 6টি ব্যঞ্জনবর্ণ। যেহেতু স্বরবর্ণগুলো তাদের স্থান পরিবর্তন করবে না। সুতরাং তাদের স্থান নির্দিষ্ট করে আমাদেরকে 6টি ব্যঞ্জনবর্ণের সাজানো সংখ্যা বের করতে হবে যার মধ্যে T দু'বার আসে এবং $\frac{\lfloor 6}{\lfloor 2} = 360$ উপায়ে গঠন করা যেতে পারে।

'PERMUTATION' শব্দটি নিজেই একটি সাজানো সংখ্যা।

∴ নির্ণেয় সাজানো সংখ্যা = 360 – 1 = 359

৩৯। 4টি পতাকা দ্বারা গঠিত সংকেতগুলো নিম্নলিখিত উপায়ে দেখান যেতে পারেঃ

	সাদা	লাল	সবুজ
(a)	1	2	1
(b)	1	1	2
(c)	1	0	3
(d)	0	1	3
(e)	0	2	2

(a)-এর জন্য সাজানো সংকেত সংখ্যা = $\frac{\lfloor 4}{\lfloor 2} = 12$

(b)-এর ,, ,, ,, = $\frac{\lfloor 4}{\lfloor 2} = 12$

(c)-এর ,, ,, ,, = $\frac{\lfloor 4}{\lfloor 3} = 4$

(d)-এর ,, ,, ,, = $\frac{\lfloor 4}{\lfloor 3} = 4$

(e)-এর ,, ,, ,, = $\frac{\lfloor 4}{\lfloor 2 \lfloor 2} = 6$

∴ 4টি পতাকা দ্বারা গঠিত মোট সংকেত সংখ্যা = 12 + 12 + 4 + 4 + 6

= 38

৪০। (i) ${}^{16}C_{13} = {}^{16}C_3$ [${}^nC_r = {}^nC_{n-1}$ ব্যবহার করে]

$= \frac{16.15.14}{1.2.3} = 560$

(ii) ${}^{100}C_{98} = {}^{100}C_2$ [${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$ ব্যবহার করে]

$= \frac{100.99}{1.2} = 4950$

৪১। ডানপক্ষ

$$(i)\ {}^{n-1}C_r + {}^{n-1}C_{r-1} = \frac{\lfloor n-1}{\lfloor r \lfloor n-r-1} + \frac{\lfloor n-1}{\lfloor r-1 \lfloor n-r}$$

$$= \frac{\lfloor n-1}{r\lfloor r-1 \lfloor n-r-1} + \frac{\lfloor n-1}{\lfloor r-1 (n-r)\lfloor n-r-1}$$

$$= \frac{\lfloor n-1}{\lfloor r-1 \lfloor n-r-1} \cdot \left\{\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r}\right\}$$

$$= \frac{\lfloor n-1}{\lfloor r-1 \lfloor n-r-1} \cdot \frac{n}{r(n-r)}$$

$$= \frac{\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r} = {}^nC_r$$

বামপক্ষ

∴ (ডানপক্ষ = বামপক্ষ)

(ii) n এবং r যোগবোধক পূর্ণ সংখ্যা ($n \geq r$) হলে আমরা পাই,

${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$ ... ... (1)

(1)-এ $n = 12$ এবং $r = 4$ বসিয়ে আমরা পাই,

${}^{12}C_4 + {}^{12}C_3 = {}^{13}C_4$

বিকল্প প্রমাণ ঃ বামপক্ষ $= {}^{12}C_4 + {}^{12}C_3 = \frac{12.\ 11.\ 10.\ 9}{1.2.3.4} + \frac{12.11.10}{1.2.3}$

$= 495 + 220 = 715$

ডানপক্ষ $= {}^{13}C_4 = \frac{13.\ 12.\ 11.\ 10}{1.2.3.4} = 715$ ∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

৪২। ক্ষেত্রটির 16টি কৌণিক বিন্দু আছে। এই 16টির মধ্যে যে কোন 3টি বিন্দু যোগ করে ত্রিভুজ গঠন করা যায়। এই 3টি বিন্দু ${}^{16}C_3$ ভাবে নেয়া যেতে পারে।

∴ নির্ণে ত্রিভুজের সংখ্যা $= {}^{16}C_3 = \frac{16.\ 15.\ 14}{1.2.3} = 560$

এই 16টি বিন্দুর মধ্যে যে কোন 2টি বিন্দু নিয়ে গঠিত সরলরেখার সংখ্যা $= {}^{16}C_2 = \frac{16.\ 15}{1.2} = 120$

কিন্তু এগুলোর মধ্যে সমতলিক ক্ষেত্রের 16টি পার্শ্বরেখা কর্ণ নয়

∴ নির্ণেয় মোট কর্ণের সংখ্যা = 120 – 16 = 104

৪৩। একটি দশভুজ 10টি পার্শ্বরেখা দ্বারা গঠিত। সুতরাং ক্ষেত্রটির 10টি কৌণিক বিন্দু আছে।

এই 10টি বিন্দুর যে কোন 2টি বিন্দু নিয়ে একটি রেখা গঠিত হয় এবং রেখাগুলো ${}^{10}C_2$ ভাবে গঠিত হতে পারে।

∴ নির্ণেয় রেখার সংখ্যা $= {}^{10}C_2 = \frac{10.9}{1.2} = 45$

কিন্তু এ রেখাগুলোর মধ্যে 10টি রেখা কর্ণ নয়। কারণ তারা ক্ষেত্রের পার্শ্বরেখা

∴ নির্ণেয় কর্ণের সংখ্যা = 45 – 10 = 35

৪৪। $^nC_r + {}^nC_{r-1} = \frac{\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r} + \frac{\lfloor n}{\lfloor r-1 \lfloor n-r+1}$

$= \frac{\lfloor n}{r\lfloor r-1 \lfloor n-r} + \frac{\lfloor n}{\lfloor r-1 (n-r+1)\lfloor n-r}$

$= \frac{\lfloor n}{\lfloor r-1 \lfloor n-r}\left\{\frac{1}{r}+\frac{1}{n-r+1}\right\}$

$= \frac{\lfloor n}{\lfloor r-1 \lfloor n-r} \times \frac{n+1}{r(n-r+1)}$

$= \frac{(n+1)\lfloor n}{r\lfloor r-1 \times (n-r+1)\lfloor n-r}$

$= \frac{\lfloor n+1}{\lfloor r \lfloor n-r+1} = \frac{\lfloor n+1}{\lfloor r \lfloor (n+1)-r} = {}^{n+1}C_r$

$\therefore {}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$

(i) ${}^{n-2}C_r + 2.{}^{n-2}C_{r-1} + {}^{n-2}C_{r-2}$

$= ({}^{n-2}C_r + {}^{n-2}C_{r-1}) + ({}^{n-2}C_{r-1} + {}^{n-2}C_{r-2})$

$= {}^{n-2+1}C_r + {}^{n-2+1}C$ [(1)-এর সাহায্যে]

$= {}^{n-1}C_r + {}^{n-1}C_{r-1} = {}^{n-1+1}C_r = {}^nC_r$

(ii) ${}^nC_r + 2.{}^nC_{r-1} + {}^nC_{r-2} = ({}^nC_r + {}^nC_{r-1}) + ({}^nC_{r-1} + {}^nC_{r-2})$

$= {}^{n+1}C_r + {}^{n+1}C_{r-1}$ [(1) এর সাহায্যে]

$= {}^{n+1+1}C_r = {}^{n+2}C_r$

৪৫। এখানে, ${}^nC_6 = {}^nC_3$

$\therefore {}^nC_{n-6} = {}^nC_3$

বা, $n-6=3$

$\therefore n = 10$

${}^{10}C_n$

$= {}^{10}C_{10}$

$= 1$ **(উত্তর)**

অধ্যায়-৫

সম্ভাব্যতা
(Probability)

৫.০ সম্ভাব্যতা (Probability) ঃ

সম্ভাব্যতা (Probability) ও সম্ভাবনা শব্দদ্বয়ের উৎস একই। আমরা সবাই সম্ভাবনা শব্দটির সঙ্গে কম বেশি পরিচিত। দৈনন্দিন জীবনে এই শব্দটি আমরা সকলেই কমবেশি ব্যবহার করে থাকি। যেমন- আমার পরীক্ষায় পাশ করার সম্ভাবনা আছে কিংবা আজ বৃষ্টি হবার সম্ভাবনা আছে, কিংবা খেলায় আমাদের জয়ী হবার সম্ভাবনা খুব বেশি ইত্যাদি। অর্থাৎ কোন ঘটনা সম্পর্কে আমাদের মনে অনিশ্চয়তা থাকলে সেই অনিশ্চয়তার মাত্রা আমরা সম্ভাব্যতার দ্বারা নিরূপণ করতে পারি। সম্ভাব্যতা আমাদের যে কোন অনিশ্চয়তার একটি গাণিতিক পরিমাপ দিয়ে থাকে।

সপ্তদশ শতাব্দিতে ফ্রান্সের গণিতবিদ ব্লাসী প্যাসক্যাল (Blaise Pascal) সর্বপ্রথম সম্ভাব্যতার নীতিগুলো প্রকাশ করেন। অষ্টাদশ শতাব্দীতে পেরি সাইমন লাপলেস (Pierre simon de laplace) সংজ্ঞা দেন যে, "সম্ভাবতা হ'ল ঘটনার সফল ও মোট ফলাফলের অনুপাত।"

এখানে, সম্ভাব্যতা শব্দটি প্রচলিত অর্থ হতে একটু ভিন্ন এবং ব্যাপক। সাধারণ অর্থে, "সম্ভাব্যতা হল একটি অনিশ্চিত ঘটনা সম্পর্কে প্রদত্ত উক্তির প্রতি বিশ্বাসের মাত্রা", ব্যাপক অর্থে সম্ভাব্যতা হ'ল একই অবস্থার মধ্যে অসংখ্যবার একটি চেষ্টা পুনরাবৃত্তি করতে পারি এমন কোন পরীক্ষার ফলাফল।"

উদাহরণস্বরূপ একটি নিরপেক্ষ মুদ্রা একবার নিক্ষেপ করলে দুটি ফলাফল পাওয়া যাবে। যথা ঃ Head অথবা Tail। কাজেই মুদ্রাটিকে নিক্ষেপ করলে Head এবং Tail এর যেকোনটি আসার সম্ভাবনা থাকে। এই দুটি ফলাফলের মধ্যে Head আসবে একবার। সুতরাং Head আসার সম্ভাব্যতা $\frac{1}{2}$ ।

আবার ধরা যাক, A ও B নামের দু'টি দলের মধ্যে অনুষ্ঠিত কোন ফুটবল প্রতিযোগিতায় A বা B দলের জয়লাভ করার সম্ভাবনা কত এ নিয়ে কথা উঠলেই প্রায় সবাই বলে থাকে $\frac{1}{2}$ বা ফিফটি ফিফটি। কিন্তু এক্ষেত্রে প্রতিযোগিতা জয় পরাজয় ও ড্র এই তিনটি ফলাফলের যে কোন একটি A দলের বা B দলের পক্ষে আসবে। সুতরাং A দলের সম্ভাব্যতা $\frac{1}{3}$ । কাজেই কোন ঘটনার সম্ভাব্যতা একটি পরীক্ষার অনুকূল ও মোট ফলাফলের ওপর নির্ভরশীল অর্থাৎ কোন ঘটনার মোট সম্ভাব্য ফলাফলের সাথে এর কাঙ্ক্ষিত বা অনুকূল ফলাফলের অনুপাতই হচ্ছে ঐ ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতার গাণিতিক পরিমাপ।

সুতরাং কোন ঘটনা ঘটার ক্ষেত্রে,

$$\text{সম্ভাব্যতা} = \frac{\text{ঐ ঘটনার অনুকূল ফলাফলের সংখ্যা}}{\text{সম্ভাব্য সকল ফলাফলের সংখ্যা}}$$

সম্ভাব্যতা তত্ত্বের গাণিতিক ও সুস্পষ্ট ব্যাখ্যা দিতে হলে এর কতকগুলো সহায়ক উপাদান সম্পর্কে যথাযথ জ্ঞান থাকতে হবে। নিম্নে এসব উপাদানগুলো উল্লেখ হল–

(ক) নমুনা ক্ষেত্র (Sample space)
(খ) নমুনা বিন্দু (Sample point)
(গ) ঘটনা (Event)
(ঘ) সরল ঘটনা (Simple Event)
(ঙ) যৌগিক ঘটনা (Compound Event)
(চ) নিশ্চিত ঘটনা (Sure Event)
(ছ) অসম্ভব ঘটনা (Impossible Events)
(জ) সম্পূর্ণ ঘটনা (Exclusive Event)
(ঝ) সমসম্ভাব্য ঘটনা (Equally likely Events)
(ঞ) পূরক ঘটনা (Complementary Events)
(ট) স্বাধীন বা অনির্ভরশীল ঘটনা (Independent Events)
(ঠ) অধীন বা নির্ভরশীল ঘটনা (Dependent Events)
(ড) বর্জনশীল ঘটনা (Mutually Exclusive Events)
(ঢ) অবর্জনশীল ঘটনা (Not Mutually Exclusive Events).
(ণ) পরীক্ষণ (Experiment)

(ক) নমুনাক্ষেত্র (Sample Space) ঃ কোন ফলাফলের পুনরাবৃত্তি গণনায় না ধরে একটি পরীক্ষায় প্রাপ্ত সকল ফলাফলের সেটকে ঐ পরীক্ষার নমুনাক্ষেত্র (Sample space) বলা হয়। অর্থাৎ কোন পরীক্ষায় যে ফলাফলগুলো পাওয়া যায় তাদের প্রত্যেকটিকে একবার নিয়ে যে সেট পাওয়া যায় তাকে ঐ পরীক্ষার নমুনাক্ষেত্র (Sample Space) বলে।

(খ) নমুনা বিন্দু (Sample Point) ঃ কোন নমুনাক্ষেত্রে যতগুলো উপাদান বা ফলাফল থাকে তাদের প্রত্যেকটিকে এক একটি নমুনা বিন্দু (Sample Point) বলা হয়।

উদাহরণ-৫.১। একটি মুদ্রা দুবার নিক্ষেপ পরীক্ষায় মোট নমুনা বিন্দু থাকবে 4টি।

যথা ঃ {HH, HT, TH, TT}।

(গ) ঘটনা (Event) ঃ কোন পরীক্ষার সাথে সংশ্লিষ্ট নমুনাক্ষেত্রে কোন একটি নির্দিষ্ট বৈশিষ্ট্যের অনুকূল ফলাফলের সেটকে ঘটনা বা ইভেন্ট (Event) বলা হয়। ঘটনাকে সাধারণত ইংরেজি A, B, C কিংবা E, F ইত্যাদি দ্বারা সূচিত করা হয়।

(ঘ) সরল ঘটনা (Simple Event) ঃ যদি কোন একটি ঘটনার নমুনা বিন্দু নিয়ে আর কোন ঘটনা লেখা না যায় তবে ঐ ঘটনাকে সরল ঘটনা (Simple Event) বলা হয়।

উদাহরণ-৫.২। একটি ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষার ক্ষেত্রে 1, 2, 3, 4, 5, 6 প্রত্যেকেই একটি সরল ঘটনা। আবার একটি মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষার 'দুটি মাথা' নির্দেশকারী ঘটনা একটি সরল ঘটনা।

(ঙ) যৌগিক ঘটনা (Compound Event) ঃ কোন পরীক্ষণের যে ঘটনাগুলোকে দু'বা ততোধিক ঘটনায় বা সরল ঘটনায় বিভক্ত করা সম্ভব সেই ঘটনাগুলোকে যৌগিক ঘটনা বা মিশ্র ঘটনা (Compound Events) বলা হয়।

উদাহরণ-৫.৩। একটি ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষায় প্রাপ্ত জোড় সংখ্যার ঘটনা {2, 4, 6}, বিজোড় সংখ্যার ঘটনা {1, 3, 5} এবং তিন দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যার ঘটনা {3, 6} ইত্যাদি ঘটনাগুলো একটি যৌগিক ঘটনা (Compound Event)।

আবার দুটি মুদ্রা নিক্ষেপে "একই পিঠ"-এর ঘটনাটি একটি যৌগিক ঘটনা। কারণ "একই পিঠ" নির্দেশকারী ঘটনার অনুকূল ফলাফল দুইটি, যথা HH, TT এবং এ দুটি ফলাফল নিয়ে আরও ঘটনা দেখান যায়।

(চ) নিশ্চিত ঘটনা (Sure Event) ঃ যদি কোন ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা এক (1) হয় তবে এটাকে নিশ্চিত ঘটনা (Sure Event) বলা হয়। অর্থাৎ কোন নমুনাক্ষেত্রের সকল নমুনা বিন্দুই যদি একটি ঘটনার অনুকূলে ঘটে তবে ঐ ঘটনাকে নিশ্চিত ঘটনা (Sure Event) বলে।

নিশ্চিত ঘটনার নমুনাবিন্দু হল নমুনাক্ষেত্রের সব নমুনা বিন্দু। যদি কোন নমুনা ক্ষেত্রের নমুনা বিন্দুর সংখ্যা n(s) হয়, তবে এর সংশ্লিষ্ট নিশ্চিত ঘটনা A এর নমুনা বিন্দুর সংখ্যা n(A) = n(S)।

$\therefore$ নিশ্চিত ঘটনা, $P = \frac{n(s)}{n(s)} = 1$

উদাহরণ-৫.৪। একটি ছক্কা একবার নিক্ষেপ করলে উপরের পিঠে "যে কোন সংখ্যা" এর ঘটনাটি একটি নিশ্চিত ঘটনা। এছাড়া প্রত্যহ সূর্য উঠা ও ডোবার ঘটনা, ইত্যাদি নিশ্চিত ঘটনা।

(ছ) অসম্ভব ঘটনা (Imposible Events) ঃ যদি কোন ঘটনার অনুকূলে কোন ফলাফল না পাওয়া যায় অর্থাৎ কোন একটি পরীক্ষণে যখন কোন অবস্থাতেই ঘটনাটি ঘটবে না তবে তাকে অসম্ভব ঘটনা (Imposible Events) বলা হয়। এক্ষেত্রে সংশ্লিষ্ট পরীক্ষার নমুনা ক্ষেত্রের সাপেক্ষে ঐ ঘটনার কোন নমুনা বিন্দু থাকে না। A অসম্ভব ঘটনা হলে $A = \varphi$ এবং $n(A) = 0$। সুতরাং

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0$$

উদাহরণ-৫.৫। একটি ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষায় উপরের পিঠে 7 পাওয়ার ঘটনাটি একটি অসম্ভব ঘটনা।

(জ) সম্পূর্ণ ঘটনা (Exclussive Events) ঃ কোন পরীক্ষার সাথে সংশ্লিষ্ট দু'বা ততোধিক ঘটনা যদি এরূপ হয় যে, পরীক্ষাটি যে কোন অবস্থায় সম্পাদন করলে এদের যে কোন একটি অবশ্যই ঘটবে তবে ঘটনাগুলোকে সম্পূর্ণ ঘটনা (Exclusive Events) বলা হয়।

উদাহরণ-৫.৬। একটি ছক্কার উপরের পিঠে 1, 2, 3, 4, 5, 6 সংখ্যাগুলোর যে কোন একটি আসতে পারে এবং এদের ঘটনাগুলোর সম্ভাবনার সমষ্টি এক। সুতরাং ছক্কার উপরের পিঠে 1, 2, 3, 4, 5, 6 সংখ্যাগুলোর ঘটনা সম্পূর্ণ ঘটনা।

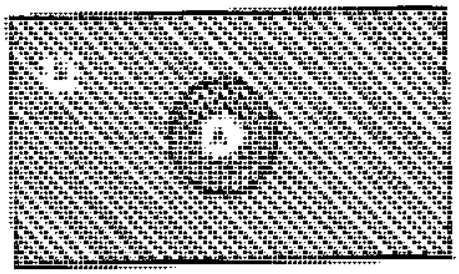
(ঝ) সম সম্ভাব্য ঘটনা (Equally likely Events) ঃ কোন পরীক্ষণে কতগুলো ঘটনার মধ্যে প্রত্যেকটি ঘটনার সম্ভাব্যতা সমান হলে ঘটনাগুলোকে সম সম্ভাব্য ঘটনা (Equally likely Events) বলা হয়।

উদাহরণ-৫.৭। একটি মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষায় প্রাপ্ত সকল ফলাফল আসার সম্ভাবনা হল $\frac{1}{2}$ অর্থাৎ Head আসার সম্ভাব্যতা $\frac{1}{2}$, Tail আসার সম্ভাব্যতা $\frac{1}{2}$। কাজেই ঘটনা দুটি সম-সম্ভাব্য ঘটনা (Equally likely Events)

আবার ছক্কা নিক্ষেপন পরীক্ষায় প্রতিটি নিক্ষেপে 1, 2, 3, 4, 5, 6 এর যে কোন একটি আসতে পারে এবং প্রত্যেক পিঠ আসার সম্ভাব্যতা সমান অর্থাৎ $\frac{1}{6}$।

(ঞ) পূরক ঘটনা (Complementary Events) ঃ একটি পরীক্ষায় সাথে সংশ্লিষ্ট যে কোন একটি ঘটনা ঘটা এবং এটা না ঘটার ঘটনাকে পরস্পর পূরক ঘটনা (Complamentary Events) বলা হয়।

দুটি পূরক ঘটনা পরস্পর বর্জনশীল হয় এবং এদের সংযোগ বা Union নমুনাক্ষেত্রের সমান হবে। যদি নমুনাক্ষেত্রে A কোন একটি ঘটনা হয় তবে A^C বা $\bar{A}$ দ্বারা এর পূরক ঘটনা নির্দেশিত হবে এবং $A \cup A^C = S$ হবে। নিম্নে পূরক ঘটনা (Complementary Events) কে ভেন চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করা হল।



পূরক ঘটনারদ্বয়ের পৃথক পৃথক সম্ভাবনার যোগফল 1 হবে।

সুতরাং, $P(A) + P(A^C) = 1$

উদাহরণ-৫.৮। একটি ছক্কা নিক্ষেপ করলে বিজোড় সংখ্যা পড়বার ঘটনা

$A = \{1, 3, 5\}$,

A ঘটনার পূরক ঘটনা হবে বিজোড় সংখ্যার না পড়ার ঘটনা। অর্থাৎ পূরক ঘটনা $A = \{2, 4, 6\}$।

(ট) স্বাধীন বা অনির্ভরশীল ঘটনা (Independent Events) ঃ দুটি ঘটনাকে তখনই স্বাধীন বলা হবে যখন এদের একটি পরীক্ষার ফলাফল অপর পরীক্ষার ফলাফলের ওপর নির্ভর করবে না।

উদাহরণ-৫.৯। দুটি ছক্কা নিক্ষেপ করলে একটিতে ছক্কা পাওয়ার ঘটনার ওপর অন্যটিতে ছক্কা পাওয়া নির্ভর করে না। এক্ষেত্রে ছক্কা পাওয়ার ঘটনা দু'টি পরস্পর স্বাধীন বা অনির্ভরশীল ঘটনা (Independent Events).

আবার দুটি পাত্রের একটি পাত্রে দুটি সাদা ও 4টি লাল বল আছে এবং দ্বিতীয় পাত্রে 5টি কালো ও 6টি সাদা বল আছে। প্রতিটি পাত্রে হতে একটি করে বল নেয়া হলে উত্তোলনদ্বয় স্বাধীন হবে। এক্ষেত্রে প্রথম পাত্রে লাল বল উত্তোলিত হবার ঘটনা ও দ্বিতীয় পাত্রে কালো বল উত্তোলিত হবার ঘটনা স্বাধীন ঘটনা।

(ঠ) অধীন বা নির্ভরশীল ঘটনা (Dependent Events) ঃ যদি কোন পরীক্ষণে দুটি ঘটনা এরূপ হয় যে, এদের কোন একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা অন্য ঘটনাটি ঘটার ওপর নির্ভর করে। তবে এটাকে অধীন বা নির্ভরশীল ঘটনা (Dependent Events) বলা হয়।

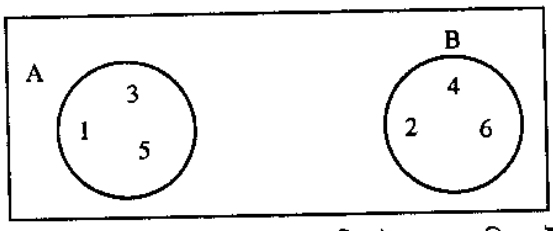
উদাহরণ-৫.১০। এক প্যাকেট তাস হতে পর পর দুটি তাস নেয়া হলে প্রথম তাসটি যে কোন রংঙের পাওয়া যেতে পারে এবং দ্বিতীয় তাসটি সেই নির্দিষ্ট রংঙের হবে তা প্রথম তাসটি প্যাকেটে ফেরৎ দেয়ার ওপর নির্ভর করে। এখানে প্রথম ঘটনাটির ওপর দ্বিতীয় ঘটনাটি অধীন বা নির্ভরশীল।

(ঙ) বর্জনশীল ঘটনা (Mutually Exclusive Events) ঃ যদি কতকগুলো ঘটনা এমন হয় যে, এদের যে কোন একটি ঘটলে বাকিগুলো ঘটবে না তবে ঐ ঘটনাগুলোকে বর্জনশীল ঘটনা (Mutually Exclusive Events) বলা হয়।

উদাহরণ-৫.১১। ধরি, ঘটনা A : {1, 3, 5} এবং ঘটনা B : {2, 4, 6} পরস্পর বর্জনশীল। A ও B বর্জনশীল হলে $A \cap B = \phi$ (ফাঁকা)

$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B)$।

নিম্নে ভেনচিত্রের সাহায্যে উহা দেখান হল–



(চ) অবর্জনশীল ঘটনা (Not Mutually Exclusive Events) ঃ যদি দুই বা ততোধিক ঘটনার কোন সাধারণ বিন্দু থাকে তবে ঐ ঘটনাগুলোকে অবর্জনশীল (Not Mutually Exclusive Events) বলা হয়।

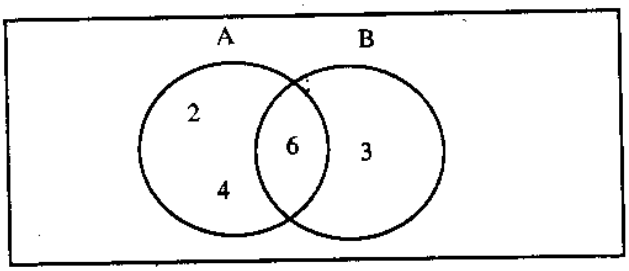
উদাহরণ-৫.১২। ধরি, ঘটনা A : {2, 4, 6} এবং ঘটনা B : {3, 6}

অবর্জনশীল ঘটনা হলে,

$A \cap B = 6$

$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

নিম্নে ভেনচিত্রের মাধ্যমে উহা দেখানো হল



(ছ) পরীক্ষণ (Experiment) ঃ কতকগুলো নির্দিষ্ট শর্তের অধীনে কোন একটি চেষ্টা পুনরাবৃত্তি করা হলে এটাকে পরীক্ষণ (Experiment) বলা হয়।

উদাহরণ-৫.১৩। যেমন– একটি ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষণ। এক্ষেত্রে 6 নাম্বারটি পাওয়ার জন্য বারবার প্রচেষ্টা চালানো হয়।

৫.১ নমুনা ক্ষেত্র এবং ঘটনা এর সংজ্ঞা (Define Simple Space and Events) ঃ

(ক) নমুনা ক্ষেত্র (Simple Space) ঃ

মনে করি, একজন ব্যক্তি একটা ছক্কা ছুড়ে মারছে। একবার 1 উঠছে, একবার 6, আরেকবার 3 . . .। এভাবে একটার পর একটা সংখ্যা উঠছে। ঐ ছক্কাটি যদি সুষম থাকে, তবে 1 থেকে 6 এর মধ্যে যে কোন সংখ্যা উপরে থাকতে পারে।

সুতরাং আমরা স্যাম্পল স্পেস (নমুনাক্ষেত্র) এর সংজ্ঞা দিতে পারি এভাবে -

"কোন ফলাফলের পুনরাবৃত্তি গণনায় না ধরে একটি পরীক্ষায় প্রাপ্ত সকল ফলাফলের সেটকে ঐ পরীক্ষার স্যাম্পল স্পেস বা নমুনা ক্ষেত্র বলা হয়। অর্থাৎ কোন পরীক্ষায় যে ফলাফলগুলো পাওয়া যায় তাদের প্রত্যেকটিকে একবার নিয়ে যে সেট পাওয়া যায় তাকে ঐ পরীক্ষার স্যাম্পল স্পেস বা নমুনা ক্ষেত্র বলা হয়।

স্যাম্পল স্পেস বা নমুনাক্ষেত্র (Simple space) কে S দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

উদাহরণ-৫.১৪। একটি ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষার নমুনাক্ষেত্র হবে–

$S : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

একটি নমুনা ক্ষেত্র বা Simple Space এর যতগুলো উপাদান বা ফলাফল থাকে তাদের প্রত্যেকটিকে এক একটি নমুনা বিন্দু (Simple Point) বলা হয়।

কোন একবার ছক্কাটি ছুড়ে মারা হল এবং ফলাফলও পাওয়া গেল। এ 3 হল স্যাম্পল পয়েন্ট বা নমুনার বিন্দু। সুতরাং আমরা বলতে পারি–

$3 \in S$, ইভেন্ট হলো ফলাফলের সেট, আমরা স্যাম্পল ইভেন্ট হিসেবে যাই পাইনা কেন, তা হবে S এর সাবসেট অর্থাৎ এখানে $\varnothing$ এবং S কিংবা তার মধ্যবর্তী সকল সেটই হবে S এর সাবসেট (উপসেট)।

এখানে $\varnothing$ কে অসম্ভব ইভেন্ট বা নাল ইভেন্ট বা শূন্য ইভেন্ট বলা হয়। যখন কোন ঘটনার অনুকূলে কোন ফলাফল পাওয়া না যায় তাকে অসম্ভব ইভেন্ট বা শূন্য ইভেন্ট (Null events) বলা হয়।

যেহেতু ইভেন্ট একটি সেট, অতএব আমরা একাধিক পরীক্ষার ফলাফল নিয়ে সেট অপারেশন করতে পারি। ধরি, একটি পরীক্ষার ইভেন্টের সেট A, এবং অপর পরীক্ষার ইভেন্টের সেট B। এ দু'টি সেটকে আমরা নিম্নরূপভাবে কার্যকর করতে পারি—

(ক) $A \cup B$ হলো এমন একটা Event (ঘটনা), যার উপাদান A তে আছে বা B তে আছে অথবা উভয়ের মধ্যে আছে।

(খ) $A \cap B$ হলো এমন একটা event (ঘটনা) যার উপাদান A তে আছে এবং B তে আছে।

(গ) A^C, A এর পূরক (Complement) সেট। যদি A^C তে কোন ইভেন্ট থাকে, তা অবশ্যই A সেটে থাকবে না। A^C কে $\bar{A}$ বা A' লেখা যায়।

উপরের বর্ণনায় $A \cap B = \varnothing$ হলে A, B কে পরস্পর আলাদা বা মিচুয়ালী এক্সক্লুসিভ (Mutually Exclusive) বলা হয়। ঠিক একইভাবে, তিন বা ততোধিক ইভেন্টকে আলাদা বা মিচুয়ালী এক্সক্লুসিভ (Mutually Exclusive) বলা হবে, যদি তাদের মধ্যে প্রত্যেক দু'টি ইভেন্ট পরস্পর আলাদা হয়।

উদাহরণ-৫.১৫। একটি ছক্কা 2 বার ছোড়া হলো।

এরূপ পরীক্ষা 3 বার করা হলো -

১ম পরীক্ষার ফলাফল $A = \{1, 3\}$

২য় " " $B = \{2, 6\}$

৩য় " " $C = \{4, 5\}$

এখানে,

$A \cap B = \varnothing$, $B \cap C = \varnothing$, এবং $A \cap C = \varnothing$

অতএব, এখানে A, B, C মিচুয়াল এক্সক্লুসিভ বা 3 পরস্পর আলাদা।

উদাহরণ-৫.১৬। একটি মুদ্রাকে তিনবার নিক্ষেপ/ছুড়ে একটি পরীক্ষা করা হল। ফলাফল কি আসতে পারে তার Sample Space (নমুনা ক্ষেত্র) S দেয়া হল।

মুদ্রার একপিঠকে হেড (H) অপর পিঠকে টেইল (T) নামে অভিহিত করা হয়।

সুতরাং Sample Space (নমুনা ক্ষেত্র) নিচের 4টি উপাদান নিয়ে গঠিত হতে পারে।

$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

মুদ্রাটি প্রথমে তিনবার ছোড়া হলো, এরপর আবার 3 বার ছোড়া হলো। পরে আবার 3 বার ছোড়া হলো। এর ফলাফল পাওয়া গেল নিম্নরূপ।

$A = \{HHH, HHT, THH\}$

এরপর আবার ১ম এ ৩ বার এবং পরে আরও ৩ বার ছোড়া হলো। এতে নিম্নরূপ ফলাফল পাওয়া গেল।

$B = \{HHH, TTT\}$

দু'টি পরীক্ষার ফলাফল থেকে আমরা পাই,

$A \cap B = \{HHH\}$ অর্থাৎ $A \cap B \neq \varnothing$

অতএব A এবং B পরস্পর আলাদা বা মিচুয়্যাল এক্সক্লুসিভ নয়।

(খ) ঘটনা (Events) ঃ কোন পরীক্ষার সংশ্লিষ্ট নমুনাক্ষেত্রে কোন একটি নির্দিষ্ট বৈশিষ্ট্যের অনুকূল ফলাফলের সেটকে ঘটনা (Events) বলা হয়। ঘটনাকে সাধারণত A, B, C কিংবা E, F ইত্যাদি দ্বারা সূচীত করা হয়।

যে কোন ফলাফল ঘটনার আলোকে নির্ধারিত হয়। সম্ভাব্যতার ক্ষেত্রে নানারূপ ঘটনা ঘটে। এসব ঘটনাগুলো নিম্নে উল্লেখ করা হল, যেমন ঃ

১। সরল ঘটনা (Simple Event)
২। যৌগিক ঘটনা (Compound Event)
৩। নিশ্চিত ঘটনা (Sure Event)
৪। অসম্ভব ঘটনা (Impossible Event)
৫। সম্পূর্ণ ঘটনা (Exclusive Event)
৬। সম সম্ভাব্য ঘটনা (Equally likely Events)
৭। পূরক ঘটনা (Complementary Events)
৮। স্বাধীন বা অনির্ভরশীল ঘটনা (Independent Events)
৯। অধীন বা নির্ভরশীল ঘটনা (Dependent Events)
১০। বর্জনশীল ঘটনা (Mutually Exclusive Events)
১২। অবর্জনশীল ঘটনা (Not Mutually Exclusive Events)

৫.২ সীমাবদ্ধ সম্ভাব্যতা ক্ষেত্র (Finit Probability Spaces) ঃ

সীমাবদ্ধ সম্ভাব্যতার ক্ষেত্র (স্পেস) কে নিম্নরূপভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায় -

মনে করি, S একটি সীমাবদ্ধ (সসীম) স্যাম্পল স্পেস ক্ষেত্র। ধরা যায়, $S = \{a_1, a_2, a_3 \ldots a_n\}$। S এর প্রত্যেকটি Sample point a_i এবং একটি বাস্তবসংখ্যা (Real number) P_i।

P_i উপাদান দ্বারা একটি সীমাবদ্ধ সম্ভাব্যতার ক্ষেত্র (ফাইনাইট প্রোবাবিলিটি স্পেস) গঠিত হবে যদি নিম্ন বর্ণিত শর্ত পূরণ হয়।

১। প্রত্যেক P_i অঋণাত্মক অর্থাৎ $P_i \geq 0$

২। $\sum P_i = 1$ অর্থাৎ $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + ... + P_n = 1$

কোন একটা ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা যদি A হয়, তবে আমরা সম্ভাব্যতাকে P(A) দ্বারা প্রকাশ করব। ঘটনা a_i ঘটনার একটি অংশ বিশেষ। এর জন্য লিখবে $P(a_i)$ আসলে $P(\{a_i\})$ কে সংক্ষেপে $P(a_i)$ লিখছি।

উদাহরণ-৫.১৭।

একই সাথে যদি ৩টি পয়সা ছোড়া হয়, তবে ঘটনা নিম্নরূপভাবে ঘটতে পারে-

{HHH, HHT, HTH, THH, TTH, THT, HTT, TTT}

যদি 3 টা পয়সায় H ওঠে, তাকে আমরা 0 বলছি।

যদি 2 টা পয়সায় H এবং 1 টিতে T হয়, তাকে আমরা 1 বলছি।

যদি 2 টা পয়সায় T এবং 1টি H হয়, তাকে আমরা 2 বলছি।

যদি 3টা পয়সায় H হয়, তবে তাকে 3 বলছি।

ঘটনার ৪ টি উপাদানকে আমরা উপরে বর্ণিত 4টি গ্রুপে ভাগ করতে পারে।

অতএব, এক্ষেত্রে স্যাম্পল স্পেস (নমুনাক্ষেত্র) S = {0, 1, 2, 3}

এবার গণনা করে পাই—

$P(0) = \frac{1}{8}$ (অর্থাৎ, 3 টা H একবার)

$P(1) = \frac{3}{8}$ *(অর্থাৎ 2 টা H এবং 1টা T তিনবার)

$P(2) = \frac{3}{8}$ (অর্থাৎ 2 টা T এবং 1 টা H তিনবার)

$P(3) = \frac{1}{8}$ (অর্থাৎ 3 টা T একবার)

এখন যদি প্রশ্ন করা হয় যে, 3 টা T বা H উঠার সম্ভাবনা কত?

উত্তর হবে, সম্ভাব্যতা

$P(A) = P(0) + P(3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

আবার যদি বলি, 3 টা T উঠবে না তার সম্ভাবনা কত?

$P(A) = P(0) + P(1) + P(2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{8}{3} = \frac{7}{8}$

আবার যদি বলি, কমপক্ষে 2 টা T উঠার সম্ভাবনা কত?

উত্তর হবে সম্ভাব্যতা $P(A) = P(2) + P(3) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$

সুতরাং দেখা যাচ্ছে যে, প্রত্যেক সম্ভাব্যতা অঋণাত্মক (nonnegative) এবং সম্ভাবনাগুলোর যোগফল 1.

সম্ভাব্যতা ফাংশন (Probability Function) ঃ

কোন বিরত বা বিচ্ছিন্ন দৈব চলকের প্রতিটি মানের সম্ভাব্যতা যে বিশেষ গাণিতিক সূত্রে বা ফাংশনের মাধ্যমে নির্ণয় বা প্রকাশ করা যায় তাকে ঐ চলকের সম্ভাব্যতা ফাংশন (Probability Function) বলা হয়। কোন বিরত বা বিচ্ছিন্ন দৈব চলক x এর সম্ভাব্যতা ফাংশন $P(x)$ হলে এটা অবশ্যই নিচের শর্ত দুটি মেনে চলবে। শর্তদ্বয় হল ঃ

(i) $P(x_i) \geq 0$ (ii) $\sum P(x_i) = 1$

বিঃদ্রঃ উপরের উদাহরণটি সম্ভাব্যতা ফাংশনের উৎকৃষ্ট প্রমাণ।

সম্ভাব্যতা ঘনত্ব ফাংশন (Probability Density Function) ঃ

কোন অবিরত বা অবিচ্ছিন্ন দৈব চলকের মান কোন একটি ক্ষুদ্র পরিসরে থাকার সম্ভাবনা যে বিশেষ গাণিতিক সূত্র বা ফাংশনের মাধ্যমে নির্ণয় বা প্রকাশ করা যায় তাকে ঐ চলকের সম্ভাব্যতা ঘনত্ব ফাংশন (Probability Density Function) বলা হয়। x একটি অবিরত বা অবিচ্ছিন্ন দৈব চলকের মানের সামান্য বৃদ্ধি dx এবং এর অবিচ্ছিন্ন ফাংশন $f(x)$ হলে x এর মান x থেকে x + dx এর মধ্যে থাকার সম্ভাবনা হবে $f(x)\,dx$, এবং $f(x)\,dx$ কে x এর মান x থেকে x + dx এর মধ্যে থাকার সম্ভাব্যতা হবে $f(x)\,dx$, এবং $f(x)\,dx$ কে x এর মানের সম্ভাব্যতা ঘনত্ব ফাংশন বলে। x এর সম্ভাব্যতা ঘনত্ব ফাংশন $f(x)$ হলে তা অবশ্যই নিচের শর্ত দুটি মেনে চলবে।

(i) $f(x) \geq 0$ (ii) $\bigvee f(x)\,dx = 1$.

৫.৩ সীমাবদ্ধ সম্ভাব্যতা ক্ষেত্র এর উপপাদ্য বা সূত্রাবলি (Theorems of finite Probability Spaces) ঃ

স্যাম্পল (নমুনা) পয়েন্ট সমূহের সম্ভাবনার যোগফলই হল ইভেন্ট (event)। এটা অনুসরণ করে নিয়ে 4 টি উপপাদ্য বা সূত্র বর্ণনা করা হল।

উপপাদ্য-৫.১। সম্ভাবনার ফাংশন P, সীমাবদ্ধ (সসীম) সম্ভাব্যতা ক্ষেত্রের (স্পেসের) ইভেন্টগুলোর সাথে নিম্নবর্ণিত শর্তগুলো (Properties) মেনে চলে -

১। প্রত্যেক ইভেন্ট A এর জন্য, $0 \leq P(A) \leq 1$

২। $P(S) = 1$, এখানে S হল স্যাম্পল স্পেস (নমুনা ক্ষেত্র)

৩। যদি ইভেন্ট A এবং ইভেন্ট B পরস্পর আলাদা (মিচুয়ালী এক্সক্লুসিভ) হয়, তবে $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

উদাহরণ-৫.১৮।

ধরা যাক, 2টি পয়সা একত্রে ছোড়া হল। ফলাফল নিম্নরূপ পাওয়া যেতে পারে।

{HH, HT, TH, TT}

যদি ২ টা পয়সায় H উঠে, তাকে আমরা 0 বলি।

যদি একটা পয়সা H এবং একটা পয়সায় T উঠে, তাকে 1 বলি,

যদি ২টি পয়সা T উঠে, তাকে 2 বলি।

এবং যদি 2টি HH অথবা 2 টি TT উঠে তাকে 3 বলি।

তবে, $P(0)=\frac{1}{4}$

$P(1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$P(2)=\frac{1}{4}$

$P(3)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ অর্থ্যাৎ এর প্রত্যেকটি হলো 1 এর চেয়ে ছোট, যা উপপাদ্য ৫.১ এর প্রথম শর্ত পূরণ করে।

এবার $P(S) = P(0) + P(1) + P(2)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = 1$, যা উপপাদ্য ৫.১ এর দ্বিতীয় শর্ত পূরণ করে।

আবার,

$P(A\cup B) = P(3)$

$=\frac{1}{2}$

এবং $P(A) + P(B) = P(0) + P(2)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{2}$

এটি উপপাদ্য ৫.১ এর তৃতীয় শর্ত পূরণ করে।

উপপাদ্য-৫.২। "যদি কোন একটি ইভেট A, তখন $P(A^c) = 1–P(A)$"

উদাহরণ-৫.১৯। মনে করি, P(A) একটি সম্ভাবনা, A কে উদাহরণ 518 এর 0 এর সাথে তুলনা করি, তবে $P(0)=\frac{1}{4}$

এবার $P(A^C)$ এর অর্থ হলো, 0 নয় অর্থাৎ HH নয় এমন ইভেন্টের সম্ভাবনা।

$P(A^C) = P(1) + P(2)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$

$=\frac{3}{4}$

$= 1 - \frac{1}{4}$

$= 1 - P(A)$

অর্থাৎ এটি উপপাদ্য-৫.২ এর শর্ত পূরণ করে।

উপপাদ্য-৫.৩।

যদি একটি শূন্য সেট $\varnothing$, এবং যদি A এবং B দু'টি ইভেন্ট হয়, তবে

১। $P(\varnothing) = 0$

২। $P(A\backslash B) = P(A) - P(A\cap B)$

৩। যদি $A\subseteq B$ হয়, তবে $P(A) \le P(B)$

উদাহরণ-৫.২০।

ধরা যাক, 2টি পয়সা একত্রে ছোড়া হলো।

এখন দুটো পয়সাতে 2টা H(Heads) উঠতে পারে কিংবা দু'টি পয়সাতে 2 টা T (tails) উঠতে পারে অথবা 1টিতে T অন্যটিতে H উঠতে পারে। যদি বলি আমাদের 3টি পয়সায় H প্রয়োজন। যেহেতু পয়সা দু'টি। অতএব 3টি H এর কোন সুযোগ নাই। অতএব এরূপ সেট হচ্ছে $\varnothing$

অতএব সম্ভাব্যতা $P(\varnothing) = 0$

উদাহরণ-৫.২১।

ধরা যাক, একটি ছক্কা প্রথমে 3 বার ছোড়া হলো। পাওয়া গেল {1, 3, 5} এর পর আবার ছোঁড়া হল পাওয়া গেল {3, 4, 6}

ধরি সেট $A = \{1, 3, 5\}$ এবং $B = \{3, 4, 6\}$

এখানে, $A \backslash B = \{1,5\}$ এবং $A \cap B = \{3\}$ $\quad \therefore P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

$\therefore$ এখন $P(A \backslash B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

এবং $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

অতএব,

$$P(A \backslash B) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$$

$$= P(A) - P(A \cap B)$$

$\therefore P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$

উদাহরণ-৫.২২।

ধরা যাক, একটি ছক্কা প্রথমে 2 বার ছোড়া হলো, এতে পাওয়া গেল ইভেন্ট $A = \{2, 3\}$, পরে আবার 3 বার ছোড়া হল। এতে পাওয়া গেল ইভেন্ট $B = \{2, 3, 5\}$

এখানে $A \subset B$

$P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{2}$

অতএব $P(A) < P(B)$ যদি $A \neq B$ হতো, তবে $P(A) = P(B)$ হতো।

অতএব, এখানে $A \subseteq B$ হল, $P(A) \leq P(B)$ এর সত্যতা পাওয়া যায়।

উপপাদ্য-৫.৪।

প্রত্যেক ইভেন্ট A এবং B এর জন্য

$(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

একে যোজনের নীতি (Addition Principle) বলে।

উদাহরণ-৫.২৩।

ধরা যাক 100 জন ছাত্র। লটারীর মাধ্যমে তাদের বিষয় নির্বাচন করা হবে। 30 জন ছাত্র নিবে গণিত, 20 জন ছাত্র নিবে পরিসংখ্যান এবং 10 জন নিবে গণিত ও পরিসংখ্যান। একজন ছাত্রের গণিত কিংবা পরিসংখ্যান পাওয়ার সম্ভাবনা P নির্ণয় কর।

সমাধান ঃ

ধরি, ইভেন্ট M = {গণিত নিবে}, ইভেন্ট S = {পরিসংখ্যান নিবে}

এ দু'টি বিষয়ের নির্বাচনে লটারী হচ্ছে -

$$P(M) = \frac{30}{100} = \frac{3}{4}, P(S) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

$$P(M \text{ and } S) = P(M \cap S) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

যোজনের নীতি (Addition Principle) অনুসারে

$$P(M \cup S) = P(M \text{ or } S) = P(M) + P(S) - P(M \cap S)$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{3+2-1}{10}$$

$$= \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

অর্থাৎ একজন ছাত্রের গণিত অথবা পরিসংখ্যান পাওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{2}{5}$

৫.৪ শর্তযুক্ত সম্ভাব্যতা (Conditional Probability) ঃ

কোন একটি পরীক্ষণে যদি কোন ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা অন্য কোন ঘটনা ইতিপূর্বে ঘটেছে কিংবা ঘটেনি তার ওপর নির্ভর করে তবে ঐ ঘটনার সম্ভাব্যতাকে শর্তযুক্ত সম্ভাব্যতা (Conditional probability) বলা হয়।

ধরা যাক, S হলো স্যাম্পল স্পেস (নমুনা ক্ষেত্র), E হল একটা ঘটনা বা ইভেন্ট (event) এবং $P(E) \neq \varnothing$ আরো ধরা যাক, ইভেন্ট (ঘটনা) E ছাড়া আরো একটা ইভেন্ট A আছে। এমতাবস্থায় E এর মধ্যে থাকা শর্তযুক্ত A ইভেন্টকে $P(A\backslash E)$ বলা হল এবং একে নিম্নরূপে বর্ণনা করা যায়।

$$P(A\backslash E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$$

এখানে,

$$P(A \cap E) = \frac{n(A \cap E)}{n(S)} \text{ এবং } P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

অতএব $P(A\backslash E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{n(A \cap E)}{n(E)}$

এর অর্থ হল যে, ইভেন্ট E, A এমন একটা ইভেন্ট যার কতিপয় উপাদান (Number of elements) E এর মধ্যে রয়েছে। অর্থাৎ A সেটের মধ্যে যেসব উপাদান থাকবে, সেসব উপাদানে কোন শর্ত প্রয়োগ করা হলে, E এর মধ্যে থাকবে কি থাকবে না তা নির্ধারিত হবে। এ শর্তের ওপর ভিত্তি করে সম্ভাব্যতা নির্ণীত হবে। এখানে E এর সাপেক্ষে, শর্তযুক্ত A এর সম্ভাব্যতা কতটুকু তা নির্ণীত হবে।

উপপাদ্য-৫.৫। ধরা যাক, একটি স্যাম্পল স্পেস S, A এবং E দু'টি ঘটনা বা ইভেন্ট, তখন সম্ভাব্যতা -

$$P(A\backslash E) = \frac{(A \cap E) \text{ এর উপাদান সংখ্যা (Number of elements in } A \cap E)}{E \text{ এর উপাদান সংখ্যা (Number of elements in E)}}$$

$$= \frac{n(A \cap E)}{n(E)}$$

উদাহরণ ৫.২৪। ধরা যাক, দু'টি ছক্কা ছোড়া হল। একটি ছক্কাকে আমরা নাম দিচ্ছি 1 নং ছক্কা এবং দ্বিতীয়টির নাম 2 নং ছক্কা। প্রথম এবং দ্বিতীয় ছক্কা ছোড়ার পর 36 রকমভাবে অর্ডারড পেয়ার (a,b) পাওয়া যায়। এখানে a এবং b এর মান 1 থেকে 6। অতএব কোন একটা ক্রমজোড় পাবার সম্ভাবনা $\frac{1}{36}$ । কোন একটা ছক্কায় 2 থাকবে এবং দু'টি ছক্কার মানের যোগফল 6 হবে এমন হওয়ার সম্ভাবনা কত? যে ক্রমজোড়ে একটি 2 থাকবে সে সেটকে ধরা যাক P(A\E) এর মান কত?

সমাধান:

এখানে E = {দু'টি ছক্কার যোগফল 6}

= {(1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3)}

এবং A = { যে কোন একটি ছক্কার মান 2}

অর্থাৎ, A = {(2,1) (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (1,2), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2)}

$A \cap B = \{(2,4), (4,2)\}$

আমরা জানি, (সূত্র অনুসারে)

$$P(A\backslash E) = \frac{n(A \cap E)}{n(E)} = \frac{2}{5}$$

এবার

E ইভেন্টের শর্ত ছাড়া, A ইভেন্টের সম্ভাব্যতা হল–

$$P(A) = \frac{11}{36}$$

অর্থাৎ কোন ছক্কার দু'টি মানের যোগফল 6 হবে এমন সম্ভাবনা $= \frac{11}{36}$

উপপাদ্য-৫.৬। শর্তযুক্ত সম্ভাব্যতার গুণনের উপপাদ্য (Multiplication theorem for conditional Probability)

ধরা যাক, স্যাম্পল স্পেস (নমুনা ক্ষেত্র) S এর দু'টি ইভেন্ট (ঘটনা) A এবং B । শর্তযুক্ত সম্ভাব্যতার সংজ্ঞা থেকে পাই-

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

বজ্রগুণন করে পাই,

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B|A)$$

তিন বা ততোধিক ইভেন্টের ক্ষেত্রে -

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m) = P(A_1).\, P(A_2|A) \dots P(A_m|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{m-1})$$

উদাহরণ-৫.২৫। একটি ঝুড়িতে 10টি ডিম আছে। এ ডিমগুলোর মধ্যে 2টি ডিম নষ্ট। ঐ ঝুড়ি থেকে প্রথমে একটি ডিম তোলা হল; এরপর আরো একটি ডিম তোলা হল। উত্তোলিত ২টি ডিম ভাল হবার সম্ভাব্যতা কত?

সমাধান:

প্রথম ডিম যখন উত্তোলন করা হয় তখন 10টি ডিমের মধ্যে 4টি ডিম ভাল।

অর্থাৎ প্রথমটি ভাল হবার সম্ভাবনা $= \frac{8}{10}$ । যদি প্রথমটি নষ্ট না হয়, তবে দ্বিতীয় ডিম তোলার সময় 9টি ডিমের মধ্যে 7টি ডিম ভাল। অর্থাৎ দ্বিতীয়টি ভাল হবার সম্ভাবনা $= \frac{7}{9}$ শর্তযুক্ত সম্ভাব্যতা গুনণের সূত্র অনুযায়ী 2 টি ডিম ভাল হবার সম্ভাবনা $= \frac{8}{10} \times \frac{7}{9}$

$$= \frac{56}{90} = \frac{28}{45}$$

৫.৫ স্বাধীন বা অনির্ভরশীল ঘটনা বা ইভেন্ট (Independent Events) ঃ

দু'টি ঘটনার মধ্যে যখন এদের একটি পরীক্ষার ফলাফল অপর পরীক্ষার ফলাফলের উপর নির্ভর না করে বা একটি অপরটির দ্বারা প্রবাবিত না হয় তবে তাকে স্বাধীন বা অনির্ভরশীল ঘটনা বা ইভেন্ট (Independent Events) বলা হয়।

কোন সম্ভাবনার স্যাম্পল স্পেস (নমুনা ক্ষেত্র) S এর ইভেন্ট A এবং ইভেন্ট B । সুতরাং ইভেন্ট B, ইভেন্ট A এর সাথে অনির্ভরশীল বা ইন্ডিপেন্ডেন্ট হবে যদি P(B) এবং P(B\A) একই হয়।

আমরা গুনণের সূত্র থেকে জানি যে,

$P(A \cap B) = P(A)\, P(B|A)$

P(B\A) স্থলে P(B) বসাই (কারণ, B, A কে ইন্ডিপেন্ডেন্ট বলে)

সুতরাং $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$

সংজ্ঞা ঃ ইভেন্ট A ও ইভেন্ট B ইন্ডিপেন্ডেন্ট হবে যদি

$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$ হয়

সুতরাং $P(A\backslash B) = P(A)$ এবং

$P(B\backslash A) = P(B)$ হবে।

উদাহরণ-৫.২৬। ধরা যাক 1 টি পয়সা 3 বার ছোড়া হলো।

সম্ভাব্যতার স্পেস

$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, TTH, HTT, THT, TTT\}$

ধরা যাক 3 টি ইভেন্ট

A = {প্রথম ছোড়ায় H পড়তে হবে} = {HHH, HHT, HTH, HTT}

B = {দ্বিতীয় ছোড়ায় H পড়তে হবে} = {HHH, HHT, THH, THT}

C = {পরপর দু'টি ছোড়ায় H পড়তে হবে} = {HHT, THH}

সমাধান ঃ

$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$P(C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

আবার

$P(A \cap B) = P(\{HHH, HHT\}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$P(A \cap C) = P(\{HHT\}) = \frac{1}{8}$

$P(B \cap C) = P(\{HHT, THH\}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

সূত্র অনুসারে

$P(A)\, P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(A \cap B)$ (সুতরাং এখানে A ও B পরস্পর ইন্ডিপেন্ডেন্ট)

$P(A)\, P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = P(A \cap C)$ (সুতরাং A ও C পরস্পর ইন্ডিপেন্ডেন্ট)

$P(B)\, P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \neq P(B \cap C)$ (সুতরাং এখানে B ও C পরস্পর ইন্ডিপেন্ডেন্ট নয়)

৫.৬ পরীক্ষা বা ট্রায়াল এর পুনরাবৃত্তি (Repeated trials) ঃ

কতকগুলো নির্দিষ্ট শর্তের অধীনে কোন একটি পরীক্ষা (Trial) পুনরাবৃত্তি করা হলে উক্ত পরীক্ষাকে ট্রায়ালের (পরীক্ষা) পুনরাবৃত্তি বলে। যেমন- একটি ছক্কা পুনঃপুন নিক্ষেপ পরীক্ষা বা একটি পয়সা পরপর ছোড়িয়ে পরীক্ষা করা।

উদাহরণ-৫.২৭। যদি একটি ছক্কা একবার ছোড়া হয়, তবে 2 পড়ার সম্ভাবনা $\frac{1}{6}$ কিংবা 5 পড়ার সম্ভাবনা $\frac{1}{6}$ । কিন্তু কোন একটি ছক্কা যদি পরপর 2 বার ছোড়া হয়, তবে পরপর 2 বা 6 পড়ার সম্ভাবনা কত? অর্থাৎ এটা 2 ট্রায়াল এর অন্তর্ভুক্ত। এখানে উত্তর হবে $\frac{1}{36}$ । কারণ প্রথম ট্রায়ালে 6 পড়ার সম্ভাবনা $\frac{1}{6}$ । দ্বিতীয় ট্রায়ালে 6 পড়ার সম্ভাবনা $\frac{1}{6}$ । যেহেতু প্রথম ও দ্বিতীয় ট্রায়াল একে অপরের ওপর নির্ভরশীল নয়, সে কারণে আমরা সম্ভাব্যতার গুনণের নিয়ম অনুসারে 2 টি ট্রায়ালই 6 পড়ার সম্ভাবনা $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$ পাই।

বার্নোলী ট্রায়াল (Bernouli trial) ঃ

আমরা আগেই আলোচনা করেছি যে, "বাইনোমিয়াল থিয়োরেম" আবিষ্কার করেন গাণিতিক বার্নোলী। তার পুরো নাম যাকোব বার্নোলী (Jacob Bernoulli) তিনি সুইস নাগরিক। যে ধরনের ট্রায়াল পুনরাবৃত্তি করা হয় অথচ ইন্ডিপেন্ডেন্ট, সে রকম ট্রায়াল নিয়েই বার্নোলী গভেষণা করেন।

ধরা যাক, একটি বার্ণোলী ট্রায়ালে সফলতা বা সাকসেস (Success) এর সম্ভাবনা P, অতএব সাকসেস না হবার (failure) সম্ভাবনা q=1-p । যদি n সংখ্যক বার বার্ণোলী ট্রায়াল করা হয় এবং সাকসেস যদি P হয়, তবে তা B(n,P) দ্বারা প্রকাশ হয়।

স্বাভাবিকভাবেই একটি ট্রায়ালে H পড়ার সম্ভাবনা $\frac{1}{2}$ এবং T পড়ার সম্ভাবনা $\frac{1}{2}$ (আমরা H কে সাকসেস এবং T কে সাকসেস্ নয় গণ্য করছি একটি পয়সা যদি পর পর ২বার (ছাড়া হয় অর্থাৎ ২টি ট্রায়ালে আমরা পাই -

$(H+T)^2 = H^2 + 2HT + T^2$

এখানে 2 বার H(Head) পড়ার সম্ভাবনা $= \frac{H^2 \text{ এর সহগ}}{2^2} = \frac{1}{4}$

2 বারের যে কোন একবার H পড়ার সম্ভাবনা $\frac{HT}{2^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

আবার

একটি পয়সা যদি পর পর 3 বার ছোড়া হয় অর্থাৎ পর পর 3 টি ট্রায়ালে আমরা পাই -

$(H+T)^3 = H^3 + 3H^2T + 3HT^2 + T^3$

সুতরাং পরপর 3 বার H পড়ার সম্ভাবনা $= \frac{H^3 \text{ এর সহগ}}{2^3}$

কমপক্ষে একবার H পড়ার সম্ভাবনা

$= \frac{H^3 \text{ এর সহগ} + H^2T \text{ এর সহগ} + HT^2 \text{ এর সহগ}}{2^3}$

$= \frac{1+3+3}{8} = \frac{7}{8}$

এবার একটি পয়সা যদি বার বার 4(চার) বার ছোড়া হয়, তাহলে $(H+T)^4 = H^4 + 4C_1 H^3T + 4C_2 H^2T^2 + 4C_3 HT^3 + T^4$

4 বারের মধ্যে যে কোন 3 বার H পড়ার সম্ভাবনা $= \frac{H^3T \text{ এর সহগ}}{2^4} = \frac{4C_1}{2^4} = \frac{4.1}{16} = \frac{1}{4}$

এভাবে আরো ট্রায়াল বর্ণনা করা যায়।

উপরের বিষয়টিকে সংক্ষেপ করে উপপাদ্য আকারে বর্ণনা করা হল--

উপপাদ্য ৫.৭। K সংখ্যাক সাকসেস এর জন্য বাইনোমিয়াল (binomial) ট্রায়াল B(n,p) কে $P(K) = {}_nC_K\, p^K q^{n-k}$ লেখা যায়।

বা $p(K) = p(\text{K successes}) = \binom{n}{k} P^k q^{n-k}$

(এখানে K = সাকসেসের সম্ভাবনা এবং q হচ্ছে ফেলিউর (failure) এর সম্ভাবনা । এখানে $p = q = \frac{1}{2}$)

উদাহরণ-৫.২৮। একটি সুষম পয়সা পরপর 6 বার ছোড়া হলো। এ 6 বারের মধ্যে কেবলমাত্র 2 বার H উঠার সম্ভাবনা কত?

সমাধান এখানে $n = 6$

সাকসেস এর সংখ্যা = K, এখানে $K = 2$

এবং $p = q = \frac{1}{2}$

বাইনোমিয়াল সূত্র মতে,

$p(k) = {}^{n}C_k\, p^k q^{n-k}$

$\therefore p(2) = {}^{6}C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{6-2}$

$$= \frac{\lfloor 6}{\lfloor 4 \cdot \lfloor 2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} = \frac{6\times5\times4\times3\times2}{4\times3\times2\times2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} = \frac{6\times5}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{16} = \frac{15}{64}$$

অতএব কেবলমাত্র 2 বার H ওঠার সম্ভাবনা $\frac{15}{64}$.

কতিপয় উপপাদ্য এবং এর প্রমাণ (Some Theorem and its proof) ঃ

উপপাদ্য-১। কোন ঘটনার সম্ভাব্যতা 0 হতে 1 এর মধ্যবর্তী হবে অর্থাৎ $0 \le P(A) \le 1$

প্রমাণ ঃ ধরা যাক, কোন নমুনাক্ষেত্র S, এবং এই S নমুনাক্ষেত্রে A একটি ঘটনা।

S নমুনা ক্ষেত্রের মোট উপাদান সংখ্যা = n এবং

A ঘটনার অনুকূল উপাদান সংখ্যা = m,

সুতরাং সম্ভাব্যতা, $P(A) = \frac{m}{n}$

এখন আমরা বিভিন্ন অবস্থায় A ঘটনার অবস্থা যাচাই করে দেখব।

যদি A ঘটনা অসম্ভব হয় তবে A ঘটনার অনুকূলে কোন উপাদান থাকবে না। অর্থাৎ $m = 0$ হবে।

$\therefore P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0$ ..... (1)

আবার, যদি A ঘটনা নিশ্চিত হয় তবে A ঘটনায় অনুকূল উপাদান এবং নমুনাক্ষেত্রের মোট উপাদান একই হবে।

এক্ষেত্রে, $n = m$ হবে

$\therefore P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1$ ..... (ii)

অতএব, যদি A ঘটনা অনিশ্চিত হয় তবে অনুকূল উপাদান সংখ্যা

0 এর চাইতে বেশি হবে এবং n অপেক্ষা কম হবে।

$\therefore 0 \angle m < n$ বা $\frac{0}{n} < \frac{m}{n} < \frac{n}{n}$ [উভয় পক্ষকে n দ্বারা ভাগ করে]

বা, $0 < P(A) < 1$ ..... (iii)

(i) (ii) (iii) নং এ প্রতিষ্ঠিত শর্তসমূহ একত্রিত করে আমরা পাই, $0 \le P(A) \le 1$

উপপাদ্য-২। কোন ঘটনা ঘটার এবং না ঘটার সম্ভাব্যতার যোগফল 1 অথবা কোন ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা P এবং না ঘটার সম্ভাব্যতা q হলে দেখাও যে, $p + q = 1$

প্রমাণ ঃ ধরা যাক, S নমুনা ক্ষেত্রে A একটি ঘটনা।

S নমুনা ক্ষেত্রের মোট উপাদান সংখ্যা = n এবং

A ঘটনার অনুকূল উপাদান সংখ্যা = m

সুতরাং, সম্ভাব্যতা, $P(A) = \frac{m}{n} = P$

A ঘটনা না ঘটার সম্ভাব্যতা অর্থাৎ A এর পূরক ঘটনা নির্দেশ করে না।

$\therefore$ A ঘটনার প্রতিকূল উপাদান সংখ্যা = n–m

সুতরাং সম্ভাব্যতা $P(\bar{A}) = \frac{n-m}{n} = q$

$\therefore$ A ঘটনা ঘটা ও না ঘটার সম্ভাব্যতার যোগফল,

$$p + q = P(A) + P(\bar{A})$$
$$= \frac{m}{n} + \frac{n-m}{n}$$
$$= \frac{n}{n} = 1$$

উপপাদ্য-৩। কোন ঘটনা ঘটা না ঘটার সম্ভাব্যতা 0 থেকে 1 এর মধ্যে থাকে অর্থাৎ $o \leq q \leq 1$.

প্রমাণ ঃ

ধরা যাক, S নমুনাক্ষেত্রে A একটি ঘটনা।

নমুনা ক্ষেত্রের মোট উপাদান সংখ্যা = n এবং

A ঘটনার অনুকূল উপাদান সংখ্যা = m

সুতরাং A ঘটনার প্রতিকূল উপাদান সংখ্যা = n–m ।

$\therefore$ A ঘটনা না ঘটার সম্ভাব্যতা

$$P(\bar{A}) = \frac{n-m}{n} = q$$

এটা স্পষ্টত যে, n–m এর মান o থেকে n এর মধ্যে থাকবে।

অর্থাৎ $o \leq n-m \leq n$

বা, $\frac{o}{n} \leq \frac{n-m}{n} \leq \frac{n}{n} = o \leq q \leq 1$

উপপাদ্য-৪। বায়েসের সূত্রটি বর্ণনা কর।

বর্ণনা ঃ একটি ঘটনা X ঘটতে পারে যদি n সংখ্যক পরস্পর বর্জনশীল বা বিচ্ছিন্ন ও সম্পূর্ণ ঘটনা $A_1, A_2 \ldots\ldots A_n$ এর মধ্যে একটি ঘটে।

মনে করি $P(A_1), P(A_2), \ldots\ldots P(A_n)$ সম্ভাব্যতাসমূহ এবং $P\left(\frac{X}{A_1}\right), P\left(\frac{X}{A_2}\right), \ldots\ldots P\left(\frac{X}{A_n}\right)$ শর্তযুক্ত সম্ভাবনা সমূহের মান জানা আছে। তাহলে X ঘটনা ঘটেছে এই শর্তে কোন Ai ঘটনার শর্তযুক্ত সম্ভাব্যতা বা $P\left(\frac{Ai}{X}\right)$ এর মান নিম্নরূপ ঃ

$$P\left(\frac{Ai}{X}\right) = \frac{P(Ai) \cdot P\left(\frac{X}{Ai}\right)}{P(A_1) P\left(\frac{X}{A_1}\right) + P(A_2) \cdot P\left(\frac{X}{A_2}\right) + \ldots\ldots + P(An) \cdot P\left(\frac{X}{An}\right)}$$

প্রমাণ ঃ শর্তানুসারে $A_1, A_2, \ldots\ldots$ ঘটনাসমূহ সম্পূর্ণ,

$\therefore A_1 \cup A_2 \cup, \ldots\ldots\ldots \cup An = S$ এখানে নমুনাক্ষেত্র s যেকোন ঘটনার ক্ষেত্রে, $X = S \cap X = (A_1 \cup A_2 \cup \ldots UAn)\ nX$

বা, $X = (A_1 \cap X) \cup (A_2 \cap X) \cup \ldots\ldots (An \cap X)$

$A_1, A_2 \ldots\ldots$পরস্পর পৃথক, সুতরাং $A_1 \cap X, A_2 nX, An \cap X$ ঘটনাগুলোর পরস্পর পৃথক।

তাই সম্ভাবনার সমষ্টি তত্ত্ব হতে,

$$P(X) = P(A_1 \cap X) + P(A_2 \cap X) + \ldots\ldots + P(An \cap X)$$

$$= P(A_1) \cdot P\left(\frac{X}{A_1}\right) + P(A_2) \cdot P\left(\frac{X}{A_2}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots + P(An) \cdot P\left(\frac{X}{An}\right) \ldots\ldots\ldots (i)$$

আবার,

$$= P(X \cap A_1) = P(X) \cdot P\left(\frac{A_1}{X}\right) = P(A1) \cdot P\left(\frac{X}{A_1}\right)$$

$$\therefore P\left(\frac{A_1}{X}\right) = \frac{P(A_1) \cdot P\left(\frac{X}{A_1}\right)}{P(X)}$$

(1) হতে P(X) এর মান বসিয়ে, $P\left(\frac{Ai}{X}\right) = \frac{P(Ai)\, P\left(\frac{X}{Ai}\right)}{\sum P(Ai)\, P\left(\frac{X}{Ai}\right)}$

অর্থাৎ,

$$P\left(\frac{Ai}{X}\right) = \frac{P(A_1) \cdot P\left(\frac{X}{A_1}\right)}{P(A_1)\, P\left(\frac{X}{A_1}\right) + P(A_2) \cdot P\left(\frac{X}{A_2}\right) + \ldots\ldots + P(An) \cdot P\left(\frac{X}{An}\right)}$$

উদাহরণ-৫.১৫। একটি মুদ্রা দুইবার নিক্ষেপ করা হল, নমুনা ক্ষেত্রটি লিখ।

সমাধান

1 টি মুদ্রা 2 বার নিক্ষেপ পরীক্ষায় নমুনা ক্ষেত্রটি হবে।

S : { HH, HT, TH, TT}

মোট নমুনা বিন্দু $= 2^2$ বা 4 টি

[নির্ণয়ের পদ্ধতি]

	S	I বারের ফলাফল
	H	T
H	HH	HT
T	TH	TT

একটি মুদ্রা 2 বার বা 2 টি মুদ্রা একত্রে একবার নিক্ষেপ করলে একই নমুনা ক্ষেত্র পাওয়া যাবে।

উদাহরণ-৫.১৬। একটি মুদ্রা তিনবার নিক্ষেপ করা হল। উপরের পিঠে- [বাকাশিবো-২০০৭]

(i) কোন হেড না

(ii) 1 টি হেড

(iii) কমপক্ষে 2 টি হেড

(iv) বড় জোড় 1টি হেড আসার সম্ভাবনা কত?

সমাধান একটি মুদ্রা তিনবার নিক্ষেপ পরীক্ষায় নমুনা ক্ষেত্রের মোট ফলাফল সংখ্যা হবে-

$n = 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

সমাবেশের সূত্রানুসারে 1 টি মুদ্রা n বার নিক্ষেপ করে x বার H পাওয়া যাবে এমন ফলাফল সংখ্যা $m = n_{c_x}$

(i) 1 টি মুদ্রা 3 বার নিক্ষেপ করে কোন হেড পাওয়া যাবে না এমন ফলাফলের সংখ্যা হবে-

$$m = 3C_o = \frac{3!}{o!(3-o)!} = \frac{3!}{3!}$$

অতএব, নির্ণেয় সম্ভাব্যতা P(0 টি হেড) $= \frac{m}{n} = \frac{1}{8}$

(ii) 1 টি হেড আসার অনুকূল ফলাফল,

$m = 3C_1$

$= \frac{3}{1!(3-1)!} = \frac{3\times2\times1}{1\times2\times1} = 3$

অতএব, নির্ণেয় সম্ভাব্যতা

$P(1 \text{ টি হেড}) = \frac{m}{n} = \frac{3}{8}$

(iii) কমপক্ষে 2 টি হেড আসার সম্ভাব্যতা

$= 1-\{P(OH) + P(1H)$

$= 1-[\frac{1}{8} + \frac{3}{8}] = 1 - \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

(iv) বড়জোড় 1 টি হেড আসার সম্ভাবনা-

$= P(OH) + P(1H)$

$= [\frac{1}{8} + \frac{3}{8}] = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

উদাহরণ-৫.১৭। একটি ছক্কা একবার নিক্ষেপ পরীক্ষায় নমুনা ক্ষেত্রটি লিখ এবং নিচের সম্ভাবনাগুলো নির্ণয় কর।

[বাকাশিবো-২০০৫, ২০১১R]

(i) উপরের পিঠে 6 আসার সম্ভাবনা

(ii) উপরের পিঠে 2 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা

(iii) উপরের পিঠে যেকোন সংখ্যা

(iv) উপরের পিঠে 2 এবং 3 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা

(v) উপরের পিঠে 2 অথবা 3 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা

(vi) উপরের পিঠে বিজোড় সংখ্যা

(vii) উপরের পিঠে জোড়সংখ্যা আসার সম্ভাবনা কত?

সমাধান

একটি ছক্কা একবার নিক্ষেপ পরীক্ষায় নমুনাক্ষেত্র

$S : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ এবং

নমুনা ক্ষেত্রের ফলাফল সংখ্যা $= 6$

(i) 6 আসার সম্ভাবনা $\{6\} = 1$ টি

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাব্যতা $= \frac{1}{6}$

(ii) 2 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা $= \{2, 4, 6\} = 3$ টি

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাব্যতা $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(iii) ছক্কার উপরের পিঠে সংখ্যাগুলো পরস্পর নির্ভরশীল।

সুতরাং উপরের পিঠে যেকোন সংখ্যা আসার সম্ভাব্যতা-

$= P(1 \text{ বা } 2 \text{ বা } 3 \text{ বা } 4 \text{ বা } 5 \text{ বা } 6)$

$= P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$

(iv) ছক্কায় 2 এবং 3 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা $= \{6\} = 1$ টি

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাব্যতা $= \frac{1}{6}$

(v) ধরি, ঘটনা A : { 2 দ্বারা বিভাজ্য } = {2, 4, 6} = 3 টি

∴ নির্ণেয় সম্ভাব্যতা $P(A) = \frac{3}{6}$

ঘটনা B; {3 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা} = {3, 6} = 2 টি

∴ নির্ণেয় সম্ভাব্যতা $P(B) = \frac{2}{6}$

অতএব $(A \cap B) = \{6\} = 1$ টি

∴ $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

এখানে ঘটনা A ও B দুটি অবর্জনশীল।

সুতরাং A অথবা B ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6}$$
$$= \frac{3+2-1}{6} = \frac{2}{3}$$

(iv) উপরের পিঠে বিজোড় সংখ্যা আসার অনুকূল ফলাফল,

m = { 1, 3, 5} = 3 টি

∴ নির্ণেয় সম্ভাব্যতা $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(vii) উপরের পিঠে জোড় সংখ্যা আসার অনুকূল ফলাফল

m = { 2, 4, 6} = 3 টি

∴ নির্ণেয় সম্ভাব্যতা $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

উদাহরণ-৫.১৮। একটি ছক্কা ও দুটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করা হল। নমুনাক্ষেত্র লিখ এবং নিচের সম্ভাব্যতাগুলো নির্ণয় কর।

(i) P (1 টি হেড)

(ii) P(2 টি লেজ ছক্কায় 4)

(iii) P (উভয় পিঠ)

সমাধান

একটি ছক্কা ও দুটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ পরীক্ষায় নমুনাক্ষেত্র নিচে দেয়া হল।

[H = Head, T = Tail]

1 H H	2HH	3HH	4HH	5HH	6HH
1HT	2HT	3HT	4HT	5HT	6HT
1TH	2HT	3TH	4TH	5TH	6TH
1TT	2TT	3TT	4TT	5TT	6TT

∴ নমুনাক্ষেত্রের মোট ফলাফল n = 24 টি

(i) 1 টি হেড আসার অনুকূল ফলাফল m = 12 টি

1HT, 2HT, 3HT, 4HT, 5HT, 6HT

1TH, 2TH, 3TH, 4TH, 5TH, 6TH

∴ নির্ণেয় সম্ভাব্যতা, P (1 টি হেড) $= \frac{m}{n} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

(ii) 2 টি লেজ (Tail) ও ছক্কায় 4 আসার অনুকূল ফলাফল $m = 4TT = 1$ টি

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাব্যতা P(2 টি Tail ছক্কায় 4) $\frac{m}{n} = \frac{1}{24}$

(iii) উভয় পিঠ এর অনুকূল ফলাফল সংখ্যা $m = 12$ টি

1 HT,	2HT,	3HT,	4 HT,	5HT,	6HT
1 TH	2TH	3TH	4TH	5TH	6TH

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাব্যতা P(উভয় পিঠ) $= \frac{m}{n} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

উদাহরণ-৫.১৯ । একটি পাত্রে 4 টি সাদা, 5 টি লাল এবং 6 টি সবুজ বল আছে। উহা হতে তিনটি বল দৈবায়িত উপায়ে নির্বাচিত করা হল। নিম্নবর্ণিত ক্ষেত্রগুলোর সম্ভাব্যতা বের কর।

(i) প্রতিটি বল লাল

(ii) 2 টি বল সবুজ

(iii) বলগুলো ভিন্ন রংয়ের

(iv) কমপক্ষে 2 টি বল লাল

সমাধান

পাত্রে সাদা বল = 4 টি

লাল বল = 5 টি

সবুজ বল = 6 টি

মোট বল = 15 টি

15 টি বল থেকে 3 টি বল মোট $15C_3$ উপায়ে নির্বাচন করা যাবে।

$\therefore$ মোট ফলাফলের সংখ্যা $= \frac{15!}{3!(15-3)!}$

$= \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12!}{3 \times 2 \times 12!}$

$= 455$

(i) প্রতিটি বল লাল পাওয়ার সম্ভাবনা-

P(3 টি লাল বল) $= \frac{5C_3}{15C_3} = \frac{\frac{5\times4\times3}{1\times2\times3}}{(455)} = \frac{10}{455} = \frac{2}{91}$

(ii) 2টি সবুজ বল হলে অন্যটি সাদা বল অথবা লাল হবে। অতএব ২টি সবুজ বল পাওয়ার সম্ভাবনা-

P (2টি সবুজ ও 1টি সাদা অথবা 2টি সবুজ ও 1টি লাল)

= P (2টি সবুজ ও 1টি সাদা) + P (2টি সবুজ ও 1টি লাল)

$= \frac{6C_2 \times 4C_1}{15C_3} + \frac{6C_2 \times 5C_1}{15C_3}$

$= \frac{\frac{6\times5}{1\times2}\times4}{455} + \frac{\frac{6\times5}{1\times2}\times5}{455}$

$= \frac{3\times5\times4}{455} \times \frac{3\times5\times5}{455}$

$= \frac{12}{91} + \frac{15}{91} = \frac{27}{91}$

(iii) বলগুলো ভিন্ন রংঙের পাওয়ার সম্ভাব্যতা

P (1 টি সবুজ, 1 টি লাল, 1 টি সাদা)

$$\frac{6C_1 \times 5C_1 \times 4C_1}{15C_3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{455}$$

$$= \frac{24}{91}$$

(iv) কমপক্ষে 2 টি লাল বল পাওয়ার সম্ভাব্যতা

P(3 টি বল লাল অথবা 2 টি লাল ও 1টি সবুজ

অথবা 2 টি লাল ও 1 টি সাদা)

= P (3 টি লাল) + P(2 টি লাল 1 টি সবুজ) +P (2 টি লাল 1 টি সাদা)

$$= \frac{5C_3}{15C_3} + \frac{5C_2 \times 6C_1}{15C_3} + \frac{5C_2 \times 4C_1}{15C_3}$$

$$= \frac{10}{455} + \frac{40}{455} + \frac{60}{455}$$

$$= \frac{2}{91} + \frac{8}{91} + \frac{12}{91}$$

$$= \frac{22}{91}$$

উদাহরণ-৫.২০। এক প্যাকেট তাস থেকে দৈব ভাবে নেয়া হল 1 তাসটি-

(i) হরতন বা ইসকাবন

(ii) হরতন বা রাজা হবার সম্ভাবনা কত?

সমাধান

প্যাকেটে মোট তাস 52 টি, হরতন 13 টি, ইস্কাবন 13 এবং রাজা 4 টি।

ধরি, ঘটনা A : { তাসটি হরতন}

ঘটনা B : { তাসটি ইস্কাবন}

ঘটনা C : { তাসটি রাজা}

(i) তাসটি হরতন হলে ইস্কাবন হতে পারবে না, সুতরাং ঘটনা A ও ঘটনা B পরস্পর বর্জনশীল। সুতরাং তাসটি হরতন বা ইস্কাবন হবার সম্ভাব্যতা।

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{13C_1}{52C_1} + \frac{13C_1}{52C_1}$$

$$= \frac{13}{52} + \frac{13}{52} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

(ii) এখানে তাসটি হরতন হলে তা হরতনের রাজাও হতে পারে।

সুতরাং ঘটনা A ও B অবর্জনশীল।

অতএব $A \cap C$: {1 টি তাস} = 1

$$P(A \cap C) = \frac{1}{52}$$

সুতরাং তাসটি হরতন বা রাজা হবার সম্ভাব্যতা

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$$

$$= \frac{13C_1}{52C_1} + \frac{4C_1}{52C_1} - \frac{1C_1}{52C_1}$$

$$= \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52}$$

$$= \frac{4}{13}$$

উদাহরণ-৫.২১। এক প্যাকেট কার্ড থেকে ইচ্ছামত (Randomly) একটি কার্ড তোলা হলে কার্ডটি হার্টস (Hearts) হবার সম্ভাব্যতা কত?

সমাধান কার্ডের সেটে মোট হার্টস্ এর সংখ্যা = 13

সর্বমোট কার্ড সংখ্যা = 52

$\therefore$ হার্টস পাওয়ার সম্ভাব্যতা $= \frac{13}{52}$

অর্থাৎ এক প্যাকেট কার্ড থেকে ইচ্ছামত একটি কার্ড তোলা হলে কার্ডটি হার্টস হবার সম্ভাব্যতা $\frac{1}{4}$।

উদাহরণ-৫.২২। যদি একটি মুদ্রা যুগপৎভাবে (Simultaneously) 7 বার নিক্ষেপ করা হয় তবে 3 বার হেড পাবার সম্ভাবনা কত?

সমাধান যদি একটি মুদ্রা 7 বার নিক্ষেপ করা হয়,

No of total outcomes $= 2^7 = 128$

No of total outcomes with 3 heads $= {}^7c_3 = 35$

$\therefore$ সম্ভাব্যতা $(H = 3) = \frac{35}{128}$

কোন একটি Experiment এ যতগুলো Event ঘটতে পারে তাদের Probability এর Sum 1, যেমন Heads এবং Tails আসার Probability র Sum 1, কোন একটি ঘটনা ঘটা না ঘটার Probability- র Sum 1। এই তত্ত্বটি খুবই গুরুত্বপূর্ণ। উপরের Example-এ 7 টি মুদ্রা নিক্ষেপ করা হয়েছিল। এখানে যদি জানতে চাওয়া হতো $P(H = o) = ?$ উত্তর হতো $\frac{1}{128}$ কিন্তু at least একটি 'হেড' আসার সম্ভাব্যতা কত জানতে চাইলে, কমপক্ষে একটি 'হেড' অতএব 1 থেকে 7 পর্যন্ত সংখ্যক বার 'হেড' আসার probability যোগ করতে হতো। কিন্তু $P(H = 1 \to 7) = 1 - P(H = o)$। এভাবে Method টি অনেক সহজ, একইভাবে Maximum 6 টি 'হেড' আসার সম্ভাব্যতা $= 1 - P(H = 7)$।

উদাহরণ-৫.২৩। Experiment : Let three coins be tossed and the number of heads observed.

The sample space is $s = \{0, 1, 2, 3\}$ নিচের Assignments যা S- এর Elements এর উপর Probability space define করবে। $P(o) = \frac{1}{8}, P(1) = \frac{3}{8}, P(2) = \frac{3}{8}, P(3) = \frac{1}{8}$ অর্থাৎ প্রত্যেক Probability ই Nonnegative এবং Probability এর Sum হচ্ছে 1.

উদাহরণ-৫.২৪। 100 জন ছাত্রের মধ্যে 30 জন গণিত, ২০ জন রসায়ন এবং 10 জন গণিত ও রসায়ন উভয় বিষয় নিয়েছে। ছাত্রদের গণিত এবং রসায়ন নেবার সম্ভাব্যতা p কত?

সমাধান মনে করি,

M = { গণিত নেয়া ছাত্ররা} এবং

C = { রসায়ন নেয়া ছাত্ররা}

যেহেতু Space হচ্ছে Equiprobable.

$P(M) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$

$P(C) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

$P(M \text{ and } C) = P(M \cap C)$

$= \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$

এভাবে Addition principle (Theorem 4) দ্বারা আমরা পাই,

$P = P(M \text{ or } C) = P(M \cup C) = P(M) + P(C) - P(M \cap C)$

$= \frac{3}{10} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10}$

$= \frac{2}{5}$

$\therefore P = \frac{2}{5}$

● সমাধানকৃত সমস্যাবলী ঃ

উদাহরণ-৫.২৫। একটি ছক্কা নিক্ষেপ করা হলে নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলো উপরের পিঠে পাবার সম্ভাব্যতা কত বার?

(ক) 3 সংখ্যাটি (খ) 4 অপেক্ষা বড় সংখ্যা

(গ) জোড় সংখ্যা (ঘ) 2 অপেক্ষা ছোট সংখ্যা।

সমাধান ঃ

(ক) 3 সংখ্যাটি আসার সম্ভাবনা $=\frac{1}{6}$

(খ) 4 অপেক্ষা বড় সংখ্যা {5, 6}

$\therefore$ 4 অপেক্ষা বড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনা $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

(গ) জোড় সংখ্যা {2, 4, 6}

$\therefore$ জোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনা $=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

(ঘ) 2 অপেক্ষা ছোট সংখ্যা 1

সুতরাং 2 অপেক্ষা ছোট সংখ্যা আসার সম্ভাবনা $=\frac{1}{6}$

উদাহরণ-৫.২৬। একটি ছক্কা একবার নিক্ষেপ করলে উপরের পিঠে 3 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা আসার সম্ভাবনা কত?

সমাধান ঃ একটি ছক্কায় সংখ্যা থাকে 6 টি (1, 2, 3, 4, 5, 6) যার মধ্যে 3, 6 – 3 দ্বারা বিভাজ্য।

তাহলে, আমরা জানি, $P = \frac{m}{n} = \frac{3}{6}$

$= \frac{1}{2}$

উদাহরণ-৫.২৭। দুটি অবর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে $P(A\cap B)=\frac{1}{3}$, $P(A\cup B)=\frac{5}{6}$ এবং $P(A)=\frac{1}{2}$ হলে P(B) কত?

সমাধান ঃ দেয়া আছে,

$P(A\cap B)=\frac{1}{3}$

$P(A\cup B)=\frac{5}{6}$

$P(A)=\frac{1}{2}$

$\therefore P(B) = ?$

দুইটি অবর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাব্যতার সংযোগ সূত্র হচ্ছে-

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

বা, $\frac{5}{6}=\frac{1}{2}+P(B)-\frac{1}{3}$ [মান বসিয়ে]

বা, $\frac{5}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=P(B)$

বা, $\frac{5-3+2}{6}=P(B)$

বা, $\frac{4}{6}=P(B)$

বা, $\frac{2}{3}=P(B)$

$\therefore P(B)=\frac{2}{3}$

উদাহরণ-৫.২৮। 52 খানা তাসের একটি প্যাকেট হতে রুইতনের টেক্কা সরিয়ে রাখা হল। বাকী তাসগুলোকে ভালভাবে ভালিয়ে একটি তাস দৈবভাবে টানলে সেই তাসটি রুইতন হবার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

সমাধান 52 খানা তাসের একটি প্যাকেট হতে রুইতনের টেক্কা সরিয়ে রাখা হলে তাস থাকে মোট 51 টি যার মধ্যে রুইতন 12 টি।

∴ দৈবভাবে টানলে সেই তাসটি রুইতন হবার সম্ভাব্যতা হবে,

$P = \frac{m}{n}$ m = ঘটনার অনুকূলে ফলাফল সংখ্যা

$= \frac{12}{51}$ n = মোট ফলাফল সংখ্যা

$= \frac{4}{14}$ P = সম্ভাব্যতা = ?

উদাহরণ-৫.২৯। তিনটি মুদ্রা নিক্ষেপ করা হলে কোন মুদ্রায় হেড না পাবার সম্ভাবনা কত?

সমাধান ধরি, A, B, C তিনটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করা হলে হেড না পাবার সম্ভাবনা,

$P(A \cap B \cap C) = P(A), P(B), P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

উদাহরণ-৫.৩০। একটি অধিবর্ষে (Leap year) 53 টি শুক্রবার থাকার সম্ভাব্যতা কত?

সমাধান একটি অধিবর্ষে মোট দিন = 366 দিন।

52 সপ্তাহ = (52 x 7) দিন

= 364 দিন

অবশিষ্ট থাকে = (366 – 364) দিন = 2 দিন

∴ বাকি 2 দিন নিম্নরূপ সমাবেশে থাকবে।

(1) শনিবার, রবিবার 2) রবিবার, সোমবার 3) সোমবার, মঙ্গলবার 4) মঙ্গলবার, বুধবার 5) বুধবার, বৃহস্পতিবার 6) বৃহস্পতিবার, শুক্রবার 7) শুক্রবার, শনিবার।

এখন 7 টি সম্ভাব্য ঘটনার মধ্যে অনুকূল সম্ভাব্যতা 2 টি।

অতএব, একটি অধিবর্ষে 53 টি শুক্রবার থাকার সম্ভাবনা $= \frac{2}{7}$

উদাহরণ-৫.৩১। এক জরীপে দেখা গেল যে, 70% লোক ইনকিলাব, 60% লোক ইত্তেফাক এবং 40% লোক উভয় পত্রিকা পড়ে। যে কোন একজন লোক দৈবভাবে নির্বাচন করা হলে লোকটির ইনকিলাব বা জনকণ্ঠ পড়ার সম্ভাব্যতা কত?

সমাধান দেয়া আছে-

70% লোক ইনকিলাব

60% ইত্তেফাক

40% উভয় পত্রিকা

মনে করি,

P(A) = 70%

P(B) = 60%

$P(A \cap B)$ = 40%

We come to know,

দুটি অবর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাব্যতার সংযোগ সূত্র

$P(B \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 70\% + 60\% - 40\%$

$= 130\% - 40\% = 90\%$

$= 0.90$

∴ যে কোন একজন লোক দৈবভাবে নির্বাচন করা হলে লোকটির ইনকিলাব বা ইত্তেফাক পড়ার সম্ভাব্যতা= 0.90

উদাহরণ-৫.৩২। একটি বাক্সে 5 টি লাল এবং 3 টি সাদা বল আছে। বাক্সটি হতে পরপর দুইটি বল নির্বিচারে নেয়া হল। বল দুইটি (ক) একই রংয়ের, (খ) ভিন্ন রংয়ের হবার সম্ভাব্যতা কত?

সমাধান: বাক্সে রাখা মোট বলের সংখ্যা (5 + 3) = 8 টি। এই 8 টি বল হতে প্রতিবার 2 টি বল নির্বাচন করার উপায় সংখ্যা–

$$^8C_2 = \frac{8!}{2!6!} \quad \left[{}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \right]$$

$$= \frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2}{2\times6\times5\times4\times3\times2}$$

$$= 28$$

সম্ভাব্য মোট ফলাফলের সংখ্যা 28

(i) 5 টি লাল বল ও 3 টি সাদা বল হতে একই রঙের 2 টি বল পাবার $= {}^5C_2 + {}^BC_2$

অনুকূল ফলাফল সংখ্যা $= 10 + 3$

$= 13$

$\therefore$ ঘটনাটি ঘটার বা 2 টি একই রঙের বল পাবার সম্ভাবনা $P = \frac{13}{28}$ [P = m/n হতে]

(ii) 2 টি ভিন্ন ভিন্ন রঙের বল পাওয়ার ক্ষেত্রে প্রতিবার 2 টি লাল ও 1 টি সাদা বল পাওয়া যাবে। এরূপ ফলাফলের সংখ্যা ${}^5c_1 + {}^3c_1$

$= 5 + 3$

$= 8$

$\therefore$ ঘটনাটি ঘটার সম্ভাবনা বা ভিন্ন রঙের বল হবার সম্ভাবনা $P = \frac{m}{n}$

$= 8/28$

$= 2/7$

উদাহরণ-৫.৩৩। ঢাকা থেকে চট্টগ্রামে বিমানে, বাসে, ট্রেনে ও স্টীমারে যাওয়া যায়। একজন লোকের ঢাকা থেকে চট্টগ্রামে ট্রেনে বা বাসে যাবার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

সমাধান:

ঢাকা থেকে বিমানে, বাসে, ট্রেনে ও স্টীমারে যাওয়া যায়

এখন,

ঢাকা থেকে চট্টগ্রাম ট্রেনে যাওয়ার সম্ভাব্যতা $P(A) = \frac{1}{4}$

ঢাকা " " কোসে " " $P(B) = 1/4$

$\therefore$ ঢাকা থেকে চট্টগ্রাম ট্রেনে বা বাসে যাবার সম্ভাব্যতা

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

$= \frac{1+1}{4}$

$= 2/4$

$= 1/2$

উদাহরণ-৫.৩৪। পুনরাবৃত্তি না করে 1, 2, 3, 4, 5 অংকগুলো হতে দুই অংক বিশিষ্ট একটি সংখ্যা তৈরি করা হল। সংখ্যাটি (ক) জোড়, (খ) 5 দ্বারা বিভাজ্য হবার সম্ভাব্যতা কত?

সমাধান

পুনরাবৃত্তি না করে 1, 2, 3, 4, 5 অংকগুলো হতে দুই অংক বিশিষ্ট একটি সংখ্যা তৈরি করতে হলে প্রতিবার 2 টি করে অংক নিতে হবে-

$$5C_2 = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5\times4\times3\times2}{2\times3\times2}$$

$= 10$ [মোট ফলাফল সংখ্যা]

(ক) সংখ্যাটি জোড় হতে হলে এককের ঘরে 2 অথবা 4 থাকতে হবে। সুতরাং এককের ঘরে 2 অথবা 4 রেখে বাকি অংকগুলো হতে 1 টি করে অংক নিয়ে-

$$4C_1 = \frac{41}{1131} = \frac{4\times3\times2}{1\times3\times2}$$

$= 4$ [অনুকূল ফলাফল সংখ্যা]

অতএব, সংখ্যাটি জোড় হবার সম্ভাব্যতা $P = \frac{m}{n}$

$$= \frac{4}{10}$$

$$= 2/5$$

(খ) মোট অংক = 5 টি

প্রাপ্ত সংখ্যাগুলো হতে 5 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা 1 টি।

∴ সংখ্যাটি 5 দ্বারা বিভাজ্য হবার সম্ভাবনা $\frac{1}{5}$

উদাহরণ-৫.৩৫। এক প্যাকেট তাস হতে একটি তাস দৈবভাবে টানা হল। তাসটি (ক) হরতন বা রুইতন, (খ) হরতন বা কুইন হবার সম্ভাব্যতা কত? [বাকাশিবো-২০১২]

সমাধান এক প্যাকেট তাস হতে একটি তাস দৈবভাবে টানা হলে তাসটি হরতন হবার সম্ভাব্যতা $P(A) = \frac{13}{52}$

তাসটি রুইতন হবার সম্ভাব্যতা $P(B) = \frac{13}{52}$

∴ তাসটি হরতন বা রুইতন হবার সম্ভাব্যতা $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{13}{52} + \frac{13}{52} = \frac{13 + 13}{52}$$

$$= \frac{26}{52} = 1/2$$

(খ) হরতন হবার সম্ভাব্যতা $P(A) = \frac{13}{52}$ [যার ভেতরে Q থাকবে]

আবার কুইন হবার সম্ভাব্যতা $P(B) = \frac{3}{52}$ [হরতনের Q ছাড়া]

∴ হরতন বা কুইন হবার সম্ভাব্যতা $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{13}{52} + \frac{3}{52} = \frac{16}{52}$$

$$= \frac{4}{13}$$

উদাহরণ-৫.৩৬। 5 জন বালক এবং 3 জন বালিকার একটি দল হতে 3 জনকে দৈবভাবে নির্বাচিত করা হল। নির্বাচিতদের মধ্যে (ক) কোন বালিকা না থাকার সম্ভাব্যতা, (খ) অন্তত একজন বালিকা থাকার সম্ভাব্যতা কত?

সমাধান

5 জন বালক + 3 জন বালিকা অর্থাৎ মোট 8 জনের একটি দল হতে 3 জনকে দৈবভাবে নির্ভাচিত করা হলে মোট দল সংখ্যা-

$$^8C_3 = \frac{8!}{3!5!}$$

$$= \frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2}{5\times4\times3\times2\times\ 3\times2}$$

$$= 56$$

(ক) নির্বাচিতদের মধ্যে কোন বালিকা না থাকে তবে দলসংখ্যা

$$^5C_3 = \frac{5!}{3!2!}$$

$$= \frac{5\times4\times3\times2}{3\times2\times2}$$

$\therefore$ কোন বালিকা না থাকার সম্ভাব্যতা $P = \frac{m}{n}$

$$= \frac{10}{56} = \frac{5}{28}$$

(খ) অন্তত একজন বালিকা থাকার সম্ভাব্যতা-

$$1-\frac{5}{28} = \frac{28-5}{28}$$

$$= 23/28$$

অনুশীলনী-৫

অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি ঃ

১। সম্ভাব্যতা কাকে বলে? [বাকাশিবো-২০১০R]

২। সম্ভাব্যতার (Probability) গাণিতিক সূত্রটি কী? [বাকাশিবো-২০০৩, ০৭, ০৯R, ১২, ১৪R]

৩। সম্ভাব্যতার দু'টি উপাদানের নাম লিখ।

৪। A ও B দুটি দলের মধ্যে A দলের জয় লাভের সম্ভাব্যতা কতটুকু?

৫। নমুনা ক্ষেত্র (Sample Space) বলতে কী বুঝ? [বাকাশিবো-২০০৭, ১০, ১১]

৬। ঘটনা (Event) বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০০৩R]

৭। নমুনা বিন্দু কাকে বলে?

৮। যৌগিক ঘটনা (compound Event) কাকে বলে?

৯। সরল ঘটনা (Simple Event) বলতে কী বুঝ? [বাকাশিবো-২০১১R]

১০। একটি অসম্ভব ঘটনার উদাহরণ দাও।

১১। Probability Function কী? [বাকাশিবো-২০০৫]

১২। সম্ভাবতার গুণনের সূত্রটি লেখ। [বাকাশিবো-২০১৩R]

১৩। Mutually Exclussive কাকে বলে?

১৪। Finit Probability Space বা সীমাবদ্ধ সম্ভাব্যতা ক্ষেত্রে এর সংজ্ঞা দাও। [বাকাশিবো-২০০২]

১৫। একটি ছক্কা ছুড়ে মারলেও না পড়ার সম্ভাবনা কত? [বাকাশিবো-২০০৭]

১৬। Conditional Probability (শর্তযুক্ত সম্ভাব্যতা) এর উপপাদ্যটি লিখ।

১৭। বাইনোমিয়াল থিয়োরেমটি লিখ।

১৮। একটি ছক্কা নিক্ষেপ করা হলে জোড় সংখ্যাগুলো উপরের পিঠে পাওয়ার সম্ভাব্যতা কতবার? [বাকাশিবো-২০০৬]

১৯। একটি মুদ্রা দু'বার নিক্ষেপ করা হল, নমুনা ক্ষেত্রটি লেখ। [বাকাশিবো-২০০৮, ১৩R]

২০। অসম্ভব ঘটনা (Impossible Events) কী? [বাকাশিবো-২০০৭]

২১। 52টি তাসের একটি প্যাকেট হতে যে কোন একটি তাস টেনে বের করলে রাজার তাসটি বের হওয়ার সম্ভাবনা কত? [বাকাশিবো-২০০২, ১২, ১৪R]

২২। তিনটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করলে প্রাপ্ত নমুনা ক্ষেত্রটি লেখ। [বাকাশিবো-২০১২]

২৩। সরল ঘটনা বলতে কী বোঝায়? [বাকাশিবো-২০১২R]

২৪। যৌগিক ঘটনা ঃ [বাকাশিবো-২০১২R]

২৫। অসম্ভব ঘটনা কী? [বাকাশিবো-২০০৭]

২৬। একটি ছক্কা নিক্ষেপ করলে মৌলিক সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাবনা কত?

▸▸ সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি ঃ

২৭। সম্ভাব্যতা বলতে কী বুঝায়?

২৮। নিশ্চিত ঘটনা (Sure Event) বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০০৫, ০৬]

২৯। সম্পূর্ণ ঘটনা বলতে কী বুঝায়?

৩০। শাফল করা 52 টি তাসের বান্ডেল হতে নিম্নবর্ণিত একটি তাস টেনে পাবার সম্ভাবনা কত? [বাকাশিবো-২০০২]
(i) একটি টেক্কা; (ii) একটি স্পেড

৩১। ইংরেজি বর্ণমালা হতে দৈবভাবে একটি অক্ষর নেয়া হলে অক্ষরটি স্বরবর্ণ হবার সম্ভাবনা কত?

৩২। সীমাবদ্ধ সম্ভাব্যতার যোগসূত্রগুলো কী কী?

৩৩। দুইটি বর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাব্যতার সংযোগ সূত্র বিবৃত কর।

৩৪। শর্তাধীন সম্ভাব্যতা (Conditional Probability) বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০০৭]

৩৫। পুনঃকৃত পরীক্ষা (Repeated Trials) বলতে কী বুঝায়?

৩৬। Independent Event (স্বাধিন ঘটনা) কী? উদাহরণসহ ব্যাখ্যা কর। [বাকাশিবো-২০০২, ০৩, ০৭, ০৯, ১১]

৩৭। ফাইনাইট প্রোবাবিলিটি (Finite Probability) স্পেস (Space) এর সংক্ষিপ্ত বর্ণনা দাও। [বাকাশিবো-২০০২, ০৫, ০৪, ১৪R]

▸▸ রচনামূলক প্রশ্নাবলি ঃ

৩৮। সম্ভাব্যতা বলতে কী বুঝায়? বিভিন্ন ক্ষেত্রে সম্ভাব্যতার যোগসূত্রটি বিবৃত কর এবং প্রমাণ কর।

৩৯। উদাহরণসহ নির্ভরশীল ও অনির্ভরশীল ঘটনার সংজ্ঞা দাও। উভয় ক্ষেত্রে সম্ভাবনার গুণন সূত্র বিবৃত কর।

৪০। n সংখ্যক পরস্পর বর্জনশীল ঘটনার সম্ভাব্যতার যোগসূত্র বিবৃত কর এবং প্রমাণ কর। [বাকাশিবো-২০০৩]

৪১। তিনটি ঘটনা A, B, C পরস্পর অবর্জনশীল হলে প্রমাণ কর যে,
$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$
[বাকাশিবো-২০০৫, ০৭, ১০R, ১২, ১৩R, ১৪R]

৪২। A ও B দুটি ফাইনাইট সেট হলে, প্রমাণ কর যে, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ [বাকাশিবো-২০০২]

৪৩। সম্ভাবনার গুণন সূত্রটি বর্ণনা ও প্রমাণ কর।

৪৪। দুটি বর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাব্যতার যোগসূত্র প্রমাণ কর। [বাকাশিবো-২০০৩, ০৫, ০৮]

৪৫। দু'টি অবর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাবনার সংযোগ সূত্র লিখ এবং প্রমাণ কর। [বাকাশিবো-২০১৩]

৪৬। তিনটি অবর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাবনার সংযোগ সূত্র লিখ এবং প্রমাণ কর।

৪৭। শর্তাধীন সম্ভাবনা (Conditional Probability) উদাহরণসহ ব্যাখ্যা কর। A ও B ঘটনাদ্বয় পরস্পর অধীন হলে প্রমাণ কর যে. $P(A\backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ [বাকাশিবো-২০০৯R]

৪৮। ব্যায়েসের সূত্রটি ব্যাখ্যা কর।

৪৯। দেখাও যে, $0 \le P(A) \le 1$।

৫০। Finit Probability Spaces এর উপপাদ্যগুলো লিখে বর্ণনা কর।

৫১। বার্ণোলী ট্রায়ান (বাইনোমিয়াল থিয়োরেম) বর্ণনা কর।

৫২। যদি একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা P এবং না ঘটার সম্ভাবনা q হয় তবে প্রমান কর যে, $P + q = 1$

[বাকাশিবো-২০০৫, ০৭, ১০R, ১১, ১১R, ১৪R]

৫৩। প্রমান কর যে, $P(A) + P(A^c) = 1$

৫৪। $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots A_n$ সম্পূর্ণ ঘটনা হলে প্রমাণ কর যে, $\Sigma P(Ai) = 1$

৫৫। দেখাও যে, কোন কোন ক্ষেত্রে সম্ভাবনার সংজ্ঞা সীমিত?

৫৬। A ঘটনা ঘটার সম্ভাবনাকে P(A) দ্বারা প্রকাশ করা হলে $P(A) = 0$ এবং $P(A) = 1$ যে অর্থ বহন করে তা ব্যাখ্যা কর।

৫৭। মন্তব্য কর ঃ যদি কোন ঘটনার সম্ভাবনা শূন্য হয় তবে এটা একটি অসম্ভব ঘটনা।

৫৮। দুটি মুদ্রা ও 1টি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করা হল নমুনা ক্ষেত্রটি লিখ।

৫৯। 10টি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করলে প্রাপ্ত নমুনা ক্ষেত্রটি লিখ। [**উত্তর ঃ** 5/128]

৬০। একটি মুদ্রা তিনবার নিক্ষেপ করলে প্রাপ্ত নমুনা ক্ষেত্রটি লিখ-

(i) 3টি হেড (ii) 2টি হেড (iii) কমপক্ষে 2টি হেড (iv) বড়জোড় 2টি Head, (v) 0টি হেড আসার সম্ভাব্যতা কত?

[বাকাশিবো-২০০৩, ১১, ১২, ১৪R]

[**উত্তর ঃ** (i) $\frac{1}{8}$; (ii) $\frac{3}{8}$; (iii) $\frac{1}{2}$; (iv) $\frac{8}{8}$; (v) $\frac{1}{8}$;]

৬১। একটি 50 পয়সার Coin 10 বার টস্ করা হলে শাপলা ফুলের দিক পড়ার সম্ভাবনা কত? [**উত্তর ঃ** 1] [বাকাশিবো-২০০৪]

৬২। দুটি নিখুঁত মুদ্রা ও একটি নিখুঁত ছক্কা একত্রে একবার নিক্ষেপ করা হল। নমুনা ক্ষেত্রটি লিখ এবং

(i) দুটি মাথা ও বিজোড় সংখ্যা

(ii) একটি লেজ ও জোড় সংখ্যা

(iii) যে কোন পিঠ ও বিজোড় সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর। [**উত্তর ঃ** (i) $\frac{1}{8}$; (ii) $\frac{1}{4}$; (iii) $\frac{1}{2}$]

৬৩। দুটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ করা হল। নমুনা ক্ষেত্রটি লিখ ১ম ছক্কার পাঠ = x এবং ২য় ছক্কার পাঠ = y হলে নিম্নের সম্ভাব্যতাগুলো নির্ণয় কর।

(i) $P(x = y)$ (iv) $P(x + y = 7)$
(ii) $P(x = 2y)$ (v) $P(x + y > 7)$
(iii) $P(2x = y)$ (vi) $p(x + y \ge 7)$

[**উত্তর ঃ** (i) $\frac{1}{6}$; (ii) $\frac{1}{12}$; (iii) $\frac{1}{12}$; (iv) $\frac{1}{6}$ (v) $\frac{5}{12}$; (vi) $\frac{7}{12}$;]

৬৪। দু'টি ছক্কা একই সাথে নিক্ষেপ করা হল। যদি একটি ছক্কার সবসময় 5 পাওয়া যায়, তবে দু'টি ছক্কার সমষ্টি 10 হওয়ার সম্ভাবনা কত? [**উত্তর ঃ** $\frac{1}{6}$ [বাকাশিবো-২০০২]

৬৫। একটি পাত্রে 3টি লাল ও 4টি কালো বল আছে। অন্য পাত্রে 4টি লাল ও 5টি কালো বল আছে। প্রত্যেক পাত্র হতে 1টি করে বল নেয়া হল ঃ

(i) সব কয়টি কালো

(ii) ২টি সাদা

(iii) একই রংঙের বল পাওয়ার সম্ভাবনা কত? [**উত্তর ঃ** (i) $\frac{33}{63}$; (ii) $\frac{31}{63}$; (iii) $\frac{32}{63}$]

৬৬। একটি বাক্সে 6টি লাল ও 4টি সাদা বল আছে। তা হতে–

(i) পুনঃস্থাপন করে

(ii) পুনঃস্থাপন না করে 2টি বল নেয়া হল। বল দুইটি সাদা হবার সম্ভাবনা কত? [উত্তর : (i) $\frac{4}{25}$; (ii) $\frac{1}{15}$;]

৬৭। একটি বাক্সে 4টি সাদা, 5টি লাল এবং 6টি নীল রং এর বল আছে। বাক্স হতে দৈবভাবে 3টি বল নেয়া হলো। নিম্নোক্ত ক্ষেত্রে সম্ভাব্যতাগুলো নির্ণয় কর ঃ

(i) 3টি 3 রং এর বল,

(ii) 2টি সাদা 1টি অন্য রঙের

(iii) 3টি সাদা। [উত্তর : (i) $\frac{24}{91}$; (ii) $\frac{66}{455}$; (iii) $\frac{4}{455}$;] [বাকাশিবো-২০০৬]

৬৮। এক প্যাকেট তাস হতে ২টি তাস দৈবভাবে টানা হল। তাস দুটি–

(i) কালো অথবা টেক্কা

(ii) হরতন বা রাজা

(iii) লাল বা কালো হবার সম্ভাব্যতা কত? [উত্তর : $\frac{55}{221}$; (ii) $\frac{14}{221}$ (iii) $\frac{25}{51}$;]

৬৯। 52টি তাসের 1টি প্যাকেট হতে যে কোন 1টি তাস টেনে বের করলে রাজার তাসটি বের হওয়ার সম্ভাবনা (Probability) কত? [উত্তর : $\frac{4}{52}$; [বাকাশিবো-২০০২]

৭০। এক প্যাকেট তাস হতে পর পর তিন খানা তাস

(i) পুনঃস্থাপন না করে।

(ii) পুনঃস্থাপন করে নেয়া হল

তাস তিনটি টেক্কা হবার সম্ভাবনা কত? [উত্তর : (i) $\frac{1}{5525}$; (ii) $\frac{1}{2197}$;]

৭১। পুনরাবৃত্তি না ঘটিয়ে 1, 2, 3, 4, 5, সংখ্যাগুলো হতে দুই অংক বিশিষ্ট একটি সংখ্যা নেয়া হল। সংখ্যাটি (i) যুগ্ম× (ii) 5 দ্বারা বিভাজ্য হবার সম্ভাব্যতা কত? [উত্তর : (i) $\frac{2}{5}$; (ii) $\frac{1}{5}$;]

৭২। একটি পাত্রে 6টি সাদা এবং 9টি কালো বল আছে। একবারে 4টি করে (i) পুনঃস্থাপন সহকারে (ii) পুনঃস্থাপন ব্যতিরেকে দুবার মোট 8টি বল উত্তোলন করা হল। প্রথম চারটি বল সাদা এবং দ্বিতীয় চারটি বল কালো হবার সম্ভাব্যতা কত?

[উত্তর : (i) $\frac{6}{5915}$; (ii) $\frac{3}{715}$]

৭৩। $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$, $P(A) = \frac{1}{2}$ হলে

(i) P(B) (ii) $P(\bar{A})$ এর মান কত?

(iii) A ও B স্বাধীন কিনা তা পরীক্ষা কর। [উত্তর : (i) $\frac{2}{3}$; (ii) $\frac{1}{2}$; (iii) হ্যাঁ;]

৭৪। একটি প্যাকেট তাস থেকে দৈবভাবে একটি তাস নেয়া হলে তাসটি (i) হরতন বা ইস্কাবন এবং (ii) হরতন বা রাজা হবার সম্ভবনা কত? [উত্তর : (i) $\frac{1}{2}$; (ii) $\frac{1}{52}$; [বাকাশিবো ঃ ২০০৯. ১১R, ১২, ১৩]

৭৫। একটি প্যাকেট (৫২টি) তাস হতে একটি তাস টানলে তাসটি কালো হওয়ার সম্ভাবনা কত?

৭৬। একটি ছক্কা একবার নিক্ষেপ করলে উপরের 6 আসার সম্ভাবনা কত? [বাকাশিবো-২০১৩]

৭৭। একটি কয়েন 6 বার টস করা হল। 2 বার হেড পড়ার সম্ভাবনা কত? [বাকাশিবো-২০১০]

৭৮। একজোড়া ছক্কা একসাথে জোড়া হল। ছক্কাদ্বয়ের প্রদর্শিত সংখ্যার সমষ্টি 6 এবং যে কোন একটি সংখ্যা 2 হওয়ার সম্ভাবনা কত? [বাকাশিবো-২০১০]

অনুশীলনী-৫ এর সমাধান

▶▶ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

১। সম্ভাব্যতা হল ঘটনার সকল ও মোট ফলাফলের অনুপাত। অর্থাৎ একটি অনিশ্চিত ঘটনা সম্পর্কে প্রদত্ত উক্তির প্রতি বিশ্বাসের মাত্রাকে সম্ভাব্যতা বলা হয়।

২। $\text{সম্ভাব্যতা} = \frac{\text{ঘটনার অনুকূলে ফলাফলের সংখ্যা}}{\text{সম্ভাব্য সকল ফলাফলের সংখ্যা}}$

৩। সম্ভাব্যতার দু'টি উপাদান হ'ল।

১। নমুনা ক্ষেত্র (Sample space)

২। ঘটনা (Event)

৪। A দলের জয় লাভের সম্ভাব্যতা $\frac{1}{3}$ ।

৫। কোন ফলাফলের পুনরাবৃত্তি গণনায় না ধরে একটি পরীক্ষায় প্রাপ্ত সকল ফলাফলের সেটকে ঐ পরীক্ষার নমুনা ক্ষেত্র (Sample space) বলা হয়।

৬। কোন পরীক্ষার সাথে সংশ্লিষ্ট নমুনা ক্ষেত্রে কোন একটি নির্দিষ্ট বৈশিষ্ট্যের অনুকূল ফলাফলের সেটকে ঘটনা বা ইভেন্ট (Event) বলা হয়।

৭। কোন নমুনা ক্ষেত্রে যতগুলো উপাদান বা ফলাফল থাকে তাদের প্রত্যেকটিকে এক একটি নমুনা বিন্দু (Sample point) বলা হয়।

৮। কোন পরীক্ষণের সে ঘটনাগুলোকে দু'বা ততোধিক ঘটনায় বা সরল ঘটনায় বিভক্ত করা সম্ভব সেই ঘটনাগুলোকে যৌগিক ঘটনা বা মিশ্র ঘটনা (Compound Event) বলা হয়।

৯। যদি কোন একটি ঘটনার নমুনা বিন্দু নিয়ে আর কোন ঘটনা লেখা না যায় তবে ঐ ঘটনাকে সরল ঘটনা (Simple Event) বলে।

১০। একটি ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষায় উপরের পিঠে 7 পাওয়ার ঘটনাটি একটি অসম্ভব ঘটনা।

১১। কোন বিরত বা বিচ্ছিন্ন দৈব চলকের প্রতিটি মানের সম্ভাব্যতা যে বিশেষ গাণিতিক সূত্রে বা ফাংশনের মাধ্যমে নির্ণয় বা প্রকাশ করা যায় তাকে ঐ চলকের সম্ভাব্যতা ফাংশন (Probability Function) বলা হয়। কোন বিরত বা বিচ্ছিন্ন দৈব চলক x এর সম্ভাব্যতা ফাংশন P(x) হলে এটা অবশ্যই নিচের শর্ত দুটি মেনে চলবে। শর্তদ্বয় হল ঃ

(i) $P(x_i) \geq 0$ (ii) $\sum P(x_i) = 1$

১২। $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ অথবা $P(A \cap B) = P(B).\ P(A/B)$ ..... (1)

যদি A এবং B ঘটনা দুটি পরস্পর নিরপেক্ষ হয় অর্থাৎ A ঘটার সম্ভাবনা B ঘটার উপর নির্ভর না করে তবে P(A/B) = P(A) সুতরাং (1) থেকে পাই,

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

এটাকে সম্ভাব্যতার গুণন বিধি বলে।

১৩। $A \cap B = \varnothing$ হলে, A, B কে পরস্পর আলাদা বা মিউচুয়ালী এক্সক্লুসিভ (Mutually exclusive) বলা হয়। ঠিক একইভাবে, তিন বা ততোধিক ইভেন্টকে আলাদা বা মিউচুয়ালী এক্সক্লুসিভ (Mutually exclusive) বলা হবে, যদি তাদের মধ্যে প্রত্যেক দুটি ইভেন্ট পরস্পর আলাদা হয়।

১৪। সীমাবদ্ধ সম্ভাব্যতার ক্ষেত্র (স্পেস) কে নিম্ন রূপে ভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায়-

মনে করি, S একটি সীমাবদ্ধ (সসীম) স্যাম্পল স্পেস ক্ষেত্র। ধরা যাক, $S = \{a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n\}$। S এর প্রত্যেকটি Sample point a_i এবং একটি বাস্তব সংখ্যা (Real number) P_i।

P_i উপাদান দ্বারা একটি সীমাবদ্ধ সম্ভাব্যতার ক্ষেত্র (ফাইনাইট প্রোবাবিলিটি স্পেস) গঠিত হবে যদি নিম্নবর্ণিত শর্ত পূরণ হয়।

১। প্রত্যেক P_i অঋণাত্মক অর্থাৎ $P_i \geq 0$

২। $\sum P_i = 1$ অর্থাৎ $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots P_n = 1$

১৫। একটি ছক্কা ছুড়ে মারলেও না পড়ার সম্ভাবনা শূন্য।

১৬। **উপপাদ্য-১ ঃ**

ধরা যাক, একটি স্যাম্পল স্পেস S, A এবং E দুটি ঘটনা বা ইভেন্ট, তখন সম্ভাব্যতা-

$$P(A?E) = \frac{(A \cap E) \text{ এর উপাদান সংখ্যা (Number of elements } A \cap B)}{E \text{ এর উপাদান সংখ্যা (Number of elements in E)}}$$

$$= \frac{n(A \cap E)}{n(E)}$$

উপপাদ্য-২ ঃ

শর্তযুক্ত সম্ভাব্যতার গুণনের উপপাদ্য (Multiplication theorm for conditional probability) ঃ

ধরা যাক, স্যাম্পল স্পেস (নমুনা ক্ষেত্র) S এর দুটি ইভেন্ট (ঘটনা) A এবং B।

শর্তযুক্ত সম্ভাব্যতার সংজ্ঞা থেকেই পাই-

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

বজ্রগুণন করে পাই-

$P(A \cap B) = P(A)\, P(B/A)$

তিন বা ততোধিক ইভেন্টের ক্ষেত্রে-

$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots\ldots\ldots\ldots \cap A_m) = P(A_1).\, P(A_2/A) \ldots\ldots\ldots\ldots P(A_m/A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots\ldots\ldots\ldots \cap A_{m-1})$

১৭। K সংখ্যক সাকসেস এর জন্য বাইনোমিয়াল (Binomial) ট্রায়াল B(n, P) কে $P(K) = {}^nC_K\, p^k q^{n-k}$ লেখা যায় বা P(K) =

$$P(K \text{ successes}) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

(এখানে K = সাকসেসের সম্ভাবনা এবং q হচ্ছে ফেলিয়ার (Failure) এর সম্ভাবনা। এখানে $p = q = \frac{1}{2}$

১৮। উপরের পিঠে জোড় সংখ্যা আসার অনুকূল ফলাফল m = {2, 4, 6} = 3টি

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা = $3/6 = \frac{1}{2}$

১৯। 1টি মুদ্রা 2 বার নিক্ষেপ পরীক্ষায় নমুনা ক্ষেত্রটি হবে। S : { HH, HT, TH, TT }

মোট নমুনা বিন্দু $= 2^2$ বা 4টি

একটি মুদ্রা 2 বার বা 2টি মুদ্রা একত্রে একবার নিক্ষেপ করলে একই নমুনা ক্ষেত্র পাওয়া যাবে।

২০। যদি কোন ঘটনার অনুকূলে কোন ফলাফল না পাওয়া যায় অর্থাৎ কোন একটি পরীক্ষণে যখন কোন অবস্থাতে ঘটনাটি ঘটবে না তবে তাকে অসম্ভব ঘটনা (Impossible Events) বলা হয়।

২১। 52টি তাসের একটি প্যাকেটে রাজা 4টি

$\therefore$ মোট ঘটনা 52টি এবং অনুকূল ঘটনা 4টি

$\therefore$ রাজা পাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

২২। S = { HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT }

২৩। **সরল ঘটনা ঃ** একটিমাত্র নমুনাবিন্দু নিয়ে গঠিত ঘটনাকে সরল ঘটনা বলে। অর্থাৎ যে ঘটনায় একটিমাত্র ফলাফল থাকে তাকে সরল ঘটনা বলে। নমুনাক্ষেত্রের প্রত্যেকটি উপাদান দ্বারা গঠিত ঘটনা এক একটি সরল ঘটনা।

উদাহরণ ঃ একটি মুদ্রা দুইবার নিক্ষেপের নমুনা ক্ষেত্র ঃ

S : { HH, HT, TH, TT }

দুটি লেজ পাবার ঘটনা A = { TT } হল একটি সরল ঘটনা।

২৪। একাধিক নমুনাবিন্দু নিয়ে গঠিত ঘটনাকে যৌগিক ঘটনা বলে। অর্থাৎ যে ঘটনায় একাধিক ফলাফল থাকে তাকে যৌগিক ঘটনা বলে। অন্যভাবে, দুই বা ততোধিক সরল ঘটনায় সংযোগে যে ঘটনা গঠিত হয় তাকে যৌগিক ঘটনা বলে।

উদাহরণ ঃ একটি নিরপেক্ষ ছক্কা নিক্ষেপে নমুনাক্ষেত্র S : { 1, 2, 3, 4, 5, 6 } বিজোড় সংখ্যা পাওয়ার ঘটনা A = {1, 3, 5 } একটি যৌগিক ঘটনা কারণ ঘটনা A এর উপাদান 3টি (1 এর বেশি)।

২৫। **অসম্ভব ঘটনা (Imposible Events) ঃ** যদি কোন ঘটনার অনুকূলে কোন ফলাফল না পাওয়া যায় অর্থাৎ কোন একটি পরীক্ষণে যখন কোন অবস্থাতেই ঘটনাটি ঘটবে না তবে তাকে অসম্ভব ঘটনা (Imposible Events) বলা হয়। এক্ষেত্রে সংশ্লিষ্ট পরীক্ষার নমুনা ক্ষেত্রের সাপেক্ষে ঐ ঘটনার কোন নমুনা বিন্দু থাকে না। A অসম্ভব ঘটনা হলে A = φ এবং n(A) = 0। সুতরাং

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0$$

২৬। একটি ছক্কা নিক্ষেপ করলে মৌলিক সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাব্যতা

$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ কারণ মৌলিক সংখ্যা 2, 3, 0, 5

অর্থাৎ, 3টি

▸▸ সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

২৭। সম্ভাব্যতা বলতে কোন ঘটনার সফল ও মোট সম্ভাব্য ফলাফলের অনুপাতকে বুঝায়। এই সম্ভাব্যতা আমাদের যেকোন অনিশ্চয়তার একটি গাণিতিক পরিমাপ দিয়ে থাকে। অর্থাৎ কোন ঘটনার মোট সম্ভাব্য ফলাফলের সাথে এর কাঙ্ক্ষিত বা অনুকূল ফলাফলের অনুপাতই হচ্ছে ঐ ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতার গাণিতিক পরিমাপ।

সুতরাং কোন ঘটনা ঘটার ক্ষেত্রে

$$\text{সম্ভাব্যতা} = \frac{\text{ঐ ঘটনার অনুকূলে ফলাফলের সংখ্যা}}{\text{সম্ভাব্য সকল ফলাফলের সংখ্যা}}$$

২৮। যদি কোন ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা এক (1) হয় তবে এটাকে নিশ্চিত ঘটনা (Sure Event) বলা হয়। অর্থাৎ কোন কোন নমুনাক্ষেত্রের সকল নমুনা বিন্দুই যদি একটি ঘটনার অনুকূলে ঘটে তবে ঐ ঘটনাকে নিশ্চিত ঘটনা বলে। নিশ্চিত ঘটনা, $P = \frac{n(s)}{n(s)} = 1$

২৯। কোন পরীক্ষার সাথে সংশ্লিষ্ট দু'বা ততোধিক ঘটনা যদি এরূপ হয় যে, পরীক্ষাটি যেকোন অবস্থায় সম্পাদন করলে এদের যেকোন একটি অবশ্যই ঘটবে তবে ঘটনাগুলোকে সম্পূর্ণ ঘটনা (Exclusive Event) বলা হয়।

৩০। (i) 52টি তাসের বান্ডেলে 4টি টেক্কা থাকে।

∴ একটি টেক্কা পাবার সম্ভাবনা

$$P(\text{একটি টেক্কা}) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

(ii) তাসের বান্ডেলে 13টি স্পেড থকে

∴ একটি স্পেড পাবার সম্ভাবনা

$$P(\text{একটি স্পেড}) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

৩১। ইংরেজি বর্ণমালা = 29টি

স্বরবর্ণের সংখ্যা = 5টি

∴ ইংরেজি বর্ণমালা থেকে নেয়া অক্ষরটি স্বরবর্ণ হবার সম্ভাবনা,

$$P(\text{স্বরবর্ণ}) = \frac{5}{29}$$ ।

৩২। সীমাবদ্ধ সম্ভাব্যতার যোগ সূত্রগুলো হল

১। বর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

২। অবর্জনশীল ঘটনায় ক্ষেত্র, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

৩৩। দু'টি ঘটনা বর্জনশীল হলে এদের যেকোন একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা এদের প্রত্যেকটির পৃথক পৃথকভাবে ঘটার সম্ভাবনার যোগ ফলের সমান। অর্থাৎ A ও B দুইটি বর্জনশীল ঘটনা হলে A অথবা B ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা-

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$,

৩৪। কোন একটি পরীক্ষণে যদি কোন ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা অন্য কোন ঘটনা ইতিপূর্বে ঘটেছে কিংবা ঘটেনি তার ওপর নির্ভর করে তবে এ ঘটনার সম্ভাব্যতাকে শর্তাধীন সম্ভাব্যতা (Conditional probability) বলা হয়। অর্থাৎ A ও B দুইটি ঘটনার ক্ষেত্রে-

$$P(A\backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

অথবা, $P(B\backslash A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

৩৫। কতগুলো নির্দিষ্ট শর্তের অধীনে কোন একটি চেষ্টা বা পরীক্ষা পুনরাবৃত্তি বা পুনঃপুন সম্পাদন করা হলে উক্ত পরীক্ষাকে পুনঃকৃত পরীক্ষা (Repeated Trials) বলা হয়। যেমন ঃ একটি ছক্কা পুনঃপুন নিক্ষেপ পরীক্ষা।

ধরা যাক, 'S' হল সীমাবদ্ধ সম্ভাব্যতা ক্ষেত্র। n সংখ্যক স্বাধীন পুনঃকৃত পরীক্ষার জন্য সীমাবদ্ধ সম্ভাব্যতা ক্ষেত্র Sn হবে; যাতে S এর n সংখ্যক উপাদান বিদ্যমান।

সুতরাং সম্ভাব্যতা, $P(S_1, S_2, S_3, \ldots\ldots\ldots, S_n) = P(s_1), P(s_2), P(s_3) \ldots\ldots P(S_n)$ ।

৩৬। দু'টি ঘটনার মধ্যে যখন এদের একটি পরীক্ষার ফলাফল অপর পরীক্ষার ফলাফলের ওপর নির্ভর না করে বা একটি অপরটির দ্বারা প্রভাবিত না হয় তবে তাকে স্বাধীন বা অনির্ভরশীল ঘটনা বা ইভেন্ট (Independent event) বলা হয়।

ইভেন্ট A ও ইভেন্ট B ইন্ডিপেন্ডেন্ট হবে যদি $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$ হয়।

সুতরাং $P(B|A) = P(A)$ এবং

$P(B|A) = P(B)$ হবে।

উদাহরণ ঃ ধরা যাক 1টি পয়সা 3 বার ছোড়া হলো ঃ

সম্ভাব্যতার স্পেস

S = {HHH, HHT, HTH, THH, TTH, HTT, THT, TTT}

ধরা যাক, 3টি ইভেন্ট

A = { প্রথম ছোড়ায় H পড়তে হবে}
= {HHH, HHT, HTH, HTT}

B = {দ্বিতীয় ছোড়ায় H পড়তে হবে}
= {HHH, HHT, THH, THT}

C = { পরস্পর দুটি ছোড়ায় H পড়তে হবে}
= {HHT, THH}

সমাধান ঃ

$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$P(C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

আবার,

$P(A \cap B) = P\{HHH, HHT\}$

$= \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$P(A \cap C) = P(\{HHT\}) = \frac{1}{8}$

$P(B \cap C) = P(\{HHT, THH\})$

$= \frac{2}{8}$

$= \frac{1}{4}$

$P(A)\,P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(A \cap B)$ (সুতরাং এখানে A ও B পরস্পর ইন্ডিপেন্ডেন্ট)

$P(A)\,P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = P(A \cap C)$ (সুতরাং এখানে A ও C পরস্পর ইন্ডিপেন্ডেন্ট)

$P(B)\,P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = P(B \cap C)$ (সুতরাং এখানে B ও C পরস্পর ইন্ডিপেন্ডেন্ট)

৩৭। **সীমাবদ্ধ সম্ভাব্যতা ক্ষেত্র ঃ** সীমাবদ্ধ সম্ভাব্যতার ক্ষেত্র (স্পেস)কে নিম্নরূপভাবে সংজ্ঞাভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায়।

মনে করি, S একটি সীমাবদ্ধ (সসীম) স্যাম্পল স্পেস ক্ষেত্র। ধরা যায়, $S = \{a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots\ldots\ldots a_n\}$। S-এর প্রত্যেকটি Sample point a_i এবং একটি বাস্তবসংখ্যা (Real number) P_i। P_i উপাদান দ্বারা একটি সীমাবদ্ধ সম্ভাব্যতার ক্ষেত্র (ফাইনাইট প্রোবাবিলিটি স্পেস) গঠিত হবে যদি নিম্নবর্ণিত শর্ত পূরণ হয়।

১। প্রত্যেক P_i অঋণাত্মক অর্থাৎ $P_i \geq 0$

২। $\sum P_i = 1$ অর্থাৎ $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots P_n = 1$

কোন একটা ঘটনা সম্ভাবনা যদি A হয়, তবে আমরা সম্ভাব্যতাকে P(A) দ্বারা প্রকাশ করব। ঘটনা a_i ঘটনার একটি অংশ বিশেষ 1 এর জন্য লিখবে $P(a_i)$। আসলে $P(\{a_i\})$ কে সংক্ষেপে $P(a_i)$ লিখছি।

▶▶ রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ঃ

৩৮। সম্ভাব্যতা হলো ঘটনার সফল ও মোট ফলাফলের অনুপাত। ব্যাপক অর্থে সম্ভাব্যতা হলো একই অবস্থার মধ্যে অসংখ্যবার একটি চেষ্টা পুনরাবৃত্তি করতে পারি এমন কোন পরীক্ষার ফলাফল।

নিম্নে দুটি ক্ষেত্রে সম্ভাব্যতার সংযোগ সূত্র বিবৃত ও প্রমাণ করা হল। এখানে উল্লেখ্য, সরল ও যৌগিক উভয় প্রকার ঘটনার ক্ষেত্রে যোগসূত্র সমভাবে প্রযোজ্য।

(1) বর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে (For Mutually Exclusive Events)

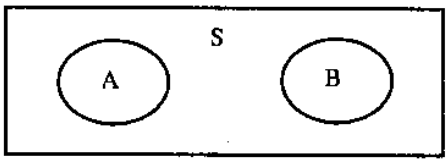
(2) অবর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে (For Not Mutually Exclusive Events)

(1) দুটি বর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাব্যতার যোগ সূত্র ঃ দু'টি ঘটনা বর্জনশীল হলে এদের যে কোন একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা এদের প্রত্যেকটির পৃথক পৃথকভাবে ঘটার সম্ভাবনার যোগফলের সমান অর্থাৎ A ও B দুটি বর্জনশীল ঘটনা হলে A অথবা B ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

প্রমাণ ঃ

মনে করি, কোন একটি নমুনাক্ষেত্র S_1, S নমুনা ক্ষেত্রের মধ্যে A ও B দুটি বর্জনশীল ঘটনা। এদেরকে নিচের ভেনচিত্রের সাহায্যে দেখান হ'ল ঃ



ধরা যাক, S নমুনা ক্ষেত্রের মধ্যে মোট উাপাদান সংখ্যা = $n(s) = n$

A ঘটনার অনুকূল উপাদান সংখ্যা = $n(A) = n_a$.

B ঘটনার অনুকূল উপাদান সংখ্যা = $n(B) = n_b$.

সুতরাং A ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা,

$P(A) = \frac{n_a}{n}$ এবং

B ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা

$P(B) = \frac{n_b}{n}$

A ও B দুটি বর্জনশীল ঘটনা বলে এদের মধ্যে কোন সাধারণ নমুনা বিন্দু নেই। সুতরাং A ও B এর সংযোগ $(A \cup B)$ ঘটনার অনুকূল উপাদান হবে A এবং B ঘটনার অনুকূল উপাদানের যোগফল।

$(A \cup B)$ এর অনুকূল উপাদান

$= n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

$= n_a + n_b$

সুতরাং, $P(A \cup B) = \frac{n(A \gg B)}{n(S)}$

$= \frac{n_a + n_b}{n} = \frac{n_a}{n} + \frac{n_b}{n}$

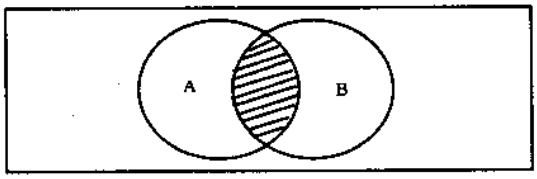
$= P(A) + P(B)$

(2) অবর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাব্যতার যোগসূত্র ঃ দুটি ঘটনা অবর্জনশীল হলে এদের যে কোন একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা এদের পৃথক পৃথক সম্ভাবনার যোগফল হতে এদের একত্রে ঘটার সম্ভাব্যতার বিয়োগফলের সমান। অর্থাৎ S নমুনাক্ষেত্রে A ও B দুটি পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা হলে,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

প্রমাণ ঃ

মনে করি, কোন নমুনাক্ষেত্র S, S নমুনাক্ষেত্রের সাথে সংশ্লিষ্ট A ও B দুটি অবর্জনশীল ঘটনা। এদেরকে নিচের ভেনচিত্রের মাধ্যমে দেখান হ'ল।



ধরা যাক, S নমুনাক্ষেত্রের মোট উপাদান সংখ্যা = $n(s) = n$

A ঘটনার অনুকূল উপাদান সংখ্যা $n(A) = n_a$

B ঘটনার অনুকূল উপাদান সংখ্যা $n(B) = n_b$

$A \cap B$ ঘটনার অনুকূল উপাদান সংখ্যা $n(A \cap B) = n_a b$

সুতরাং A ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা, $P(A) = n_a/n$.

B ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা, $P(B) = n_b/n$.

$A \cap B$ ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা $P(A \cap B) = n_{ab}/n$.

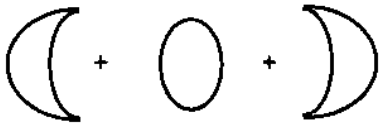
A ও B দুটি অবর্জনশীল ঘটনা,

$A \cap B$ এদের মধ্যকার সাধারণ বিন্দু নির্দেশ করে।

সুতরাং $A \cap B = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$

সুতরাং $(A \cap B)$ এর অনুকূল ফলাফল সংখ্যা

$$n(A \cup B) = n(A \cap \overline{B}) + n(A \cap B) + n(\overline{A} \cap B)$$
$$= (n_a - n_{ab}) + n_{ab} + (n_b - n_{ab})$$



$$= n_a - n_{ab} + n_{ab} + n_b - n_{ab}$$
$$= n_a + n_b - n_{ab}$$

$$\therefore P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(s)} = \frac{n_a + n_b - n_{ab}}{n}$$
$$= \frac{n_a}{n} + \frac{n_b}{n} - \frac{n_{ab}}{n}$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

৩৯। দু'টি ঘটনার মধ্যে যখন এদের একটি পরীক্ষার ফলাফল অপর পরীক্ষার ফলাফলের ওপর নির্ভর না করে বা একটি অপরটির দ্বারা প্রভাবিত না হয় তবে তাকে স্বাধীন বা অনির্ভরশীল ঘটনা (Independent Events) বলা হয়।

দুটি ছক্কা নিক্ষেপ করলে একটিতে ছক্কা পাওয়ার ঘটনার ওপর অন্যটিতে ছক্কা পাওয়া নির্ভর করে না। এক্ষেত্রে ছক্কা পাওয়ার ঘটনা দুইটি পরস্পর স্বাধীন বা অনির্ভরশীল ঘটনা। আবার দুইটি পাত্রের একটি পাত্রে দুটি সাদা ও 4টি লাল বল আছে এবং দ্বিতীয় পাত্রে 5টি কালো ও 6টি সাদা বল আছে এবং দ্বিতীয় পাত্রে 5টি কালো বল নেওয়া হলে উত্তোলনদ্বয় স্বাধীন হবে। এক্ষেত্রে প্রথম পাত্রে লাল বল উত্তোলিত হবার ঘটনা ও দ্বিতীয় পাত্রে কালো বল উত্তোলিত হবার ঘটনা স্বাধীন ঘটনা (Independent Event)।

নমুনা ক্ষেত্র S-এ দুইটি ঘটনা A এবং B তখনই স্বাধীন বা অনির্ভরশীল হবে যখন P(B), P(B/A) এর একইরূপ ঘটনা হয়।

সুতরাং $P(A \cap B) = P(A), P(B/A)$

বা, $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

প্রমাণ ঃ

মনে করি, নমুনা ক্ষেত্র S, S নমুনাক্ষেত্রের মোট ফলাফল সংখ্যা n এবং কোন ঘটনা A এর অনুকূল সংখ্যা m হলে A এর পূরক ঘটনার ফলাফলের সংখ্যা হবে–

$$n - m.P(A) = \frac{m}{n} . P(A^c)$$
$$= \frac{m - n}{n}$$

সুতরাং, $P(A) + P(A^c) = \frac{m}{n} + \frac{n - m}{n}$
$$= \frac{m + n - m}{n}$$
$$= \frac{n}{n} = 1$$

$\therefore P(A) + P(A^c) = 1$

৪০। n সংখ্যক বর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাব্যতার যোগসূত্র ঃ

কতকগুলো ঘটনা পরস্পর বর্জনশীল হলে এদের যে কোন একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা এদের নিজ নিজ সম্ভাব্যতার যোগফলের সমান। অর্থাৎ $A_1, A_2, A_3 \ldots\ldots A_n$ কোন নমুনাক্ষেত্রে n সংখ্যক বর্জনশীল ঘটনা হলে এদের যে কোন একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা হবে-

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots\ldots \cup An)$

$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots\ldots\ldots + P(A_n)$

প্রমাণ ঃ

মনে করি, কোন নমুনাক্ষেত্র S, S নমুনা ক্ষেত্রের মোট উপাদান সংখ্যা N এবং $A_1\ A_2 \ldots\ldots\ldots\ldots An$।

ঐ নমুনাক্ষেত্রে n সংখ্যক বর্জনশীল ঘটনা যাদের অনুকূল উপাদান সংখ্যা যথাক্রমে $N_1, N_2, N_3 \ldots\ldots\ldots\ldots N_n$।

তাহলে,

$P(A_1) = \frac{N_1}{N}, P(A_2) = \frac{N_2}{N}, \ldots\ldots P(A_n) = \frac{N_n}{n}$

যেহেতু ঘটনাগুলো পরস্পর বর্জনশীল,

সুতরাং, $A_1 \cup A_2 \cup \text{-----} \cup A_n$ এর অনুকূল উপাদান সংখ্যা হবে, $N_1 + N_2 + N_3 + \text{------} + N_n = N$.

অতএব, এদের যে কোন একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \text{----} \cup A_n) = \frac{N_1 + N_2 + N_3 + \text{------} + N_n}{N}$$

$$= \frac{N_1}{N} + \frac{N_2}{N} + \frac{N_3}{N} + \text{------} + \frac{N_n}{N}$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \text{--------} + P(A_n)$$

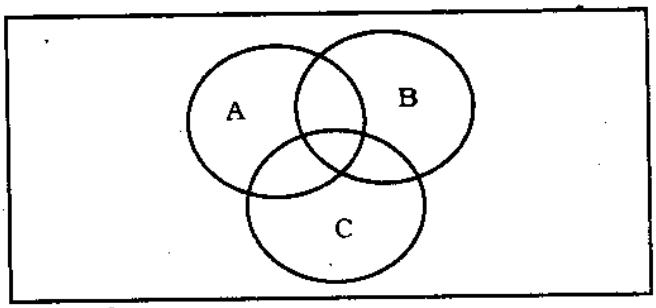
৪১। তিনটি অবর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাব্যতার যোগসূত্র ঃ

তিনটি ঘটনা A, B ও C অবর্জনশীল হলে A বা B বা C অবর্জনশীল হলে A বা B বা C ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B)$

$- P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

প্রমাণ ঃ মনে করি, কোন নমুনাক্ষেত্র S, S নমুনা ক্ষেত্রের মধ্যে A, B ও C তিনটি অবর্জনশীল ঘটনা। নিচে ভেনচিত্রে উহা দেখান হল ঃ



আমরা জানি, A ও B দুটি অবর্জনশীল ঘটনা হলে–

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

এখানে, যেহেতু A, B ও C তিনটি অবর্জনশীল ঘটনা,

$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P(A \cup B) \cap C)$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C)$

$\therefore P(A \cup B) \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P((A \cap C) \cup (B \cap C))$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - [P(A \cap C) + P(B \cap C) - P((A \cap B) \cap (B \cap C))]$

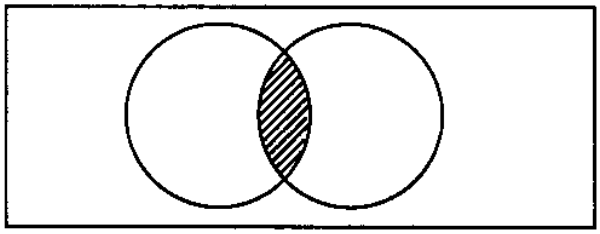
$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

$\therefore P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

৪২। দু'টি ঘটনা অবর্জনশীল হলে এদের যে কোন একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা এদের পৃথক পৃথক সম্ভাবনার যোগফল হতে এদের একত্রে ঘটার সম্ভাব্যতার বিয়োগফল সমান। অর্থাৎ ১ নমুনাক্ষেত্রে A ও B দু'টি পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা হলে

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

প্রমাণ ঃ মনে করি, কোন নমুনাক্ষেত্র S, S নমুনাক্ষেত্রের সাথে সংশ্লিষ্ট A ও B দু'টি অবর্জনশীল ঘটনা। এদেরকে নিচের ভেনচিত্রের মাধ্যমে দেখান হল–



ধরা যাক, S নমুনাক্ষেত্রে মোট উপাদান সংখ্যা = $n(S) = n$

A ঘটনার অনুকূল উপাদান সংখ্যা $n(A) = n_a$

B ঘটনার অনুকূল উপাদান সংখ্যা $n(B) = n_b$

$A \cap B$ ঘটনার অনুকূল উপাদান সংখ্যা $n(A \cap B) = n_{ab}$

সুতরাং A ঘটনার ঘটার সম্ভাব্যতা $P(A) = n_{a/n}$

B ঘটনার ঘটার সম্ভাব্যতা $P(B) = n_{b/n}$

$A \cap B$ ঘটনার ঘটার সম্ভাব্যতা $P(A \cap B) = n_{ab/n}$

A ও B দুটি অবর্জনশীল ঘটনা।

$A \cap B$ এদের মধ্যকার সাধারণ বিন্দু নির্দেশ করে।

সুতরাং $A \cap B = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$

সুতরাং $(A \cap B)$ এর অনুকূল ফলাফল সংখ্যা

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A \cap \bar{B}) + n(A \cap B) + n(\bar{A} \cap B) \\ &= (n_a - m_{ab}) + n_{ab} + (n_b - n_{ab}) \\ &= n_a - n_{ab} + n_{ab} + n_b - n_{ab} \\ &= n_a + n_b - n_{ab} \end{aligned}$$

$$\therefore P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n_a + n_b - n_{ab}}{n}$$

$$= \frac{n_a}{n} + \frac{n_b}{n} + \frac{n_{ab}}{n}$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

৪৩। একটি পরীক্ষার সাথে সংশ্লিষ্ট যে কোন একটি ঘটনা ঘটা এবং এর না ঘটার ঘটনাকে পরস্পর পূরক ঘটনা (Complementary Event) বলা হবে। দুটি পূরক ঘটনা পরস্পর বর্জনশীল এবং এদের সংযোগ বা Union নমুনা ক্ষেত্রের সমান হবে। যদি নমুনা ক্ষেত্রে A কোন একটি ঘটনা হয় তবে A^C বা $\overline{A}$ দ্বারা এর পূরক ঘটনা নির্দেশিত হবে এবং $A \cup A^C = S$ হবে। পূরক ঘটনাদ্বয়ের পৃথক পৃথক সম্ভাবনার যোগফল 1 হবে।

সুতরাং $P(A) + P(A^c) = 1$

প্রমাণ ঃ

মনে করি, নমুনা ক্ষেত্র S, S নমুনাক্ষেত্রের মোট ফলাফল সংখ্যা n এবং কোন ঘটনা A এর অনুকূল সংখ্যা m হলে A এর পূরক ঘটনার ফলাফলের সংখ্যা হবে–

$$n - m.P(A) \quad = \frac{m}{n} . P(A^c) = \frac{m-n}{n}$$

$$\text{সুতরাং}, P(A) + P(A^c) \quad = \frac{m}{n} + \frac{n-m}{n}$$

$$= \frac{m+n-m}{n} \quad = \frac{n}{n} = 1$$

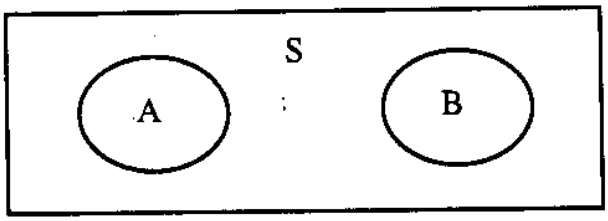
$$\therefore P(A) + P(A^c) = 1$$

৪৪। **দুটি বর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাব্যতার যোগসূত্র ঃ** দু'টি ঘটনা বর্জনশীল হলে এদের যে কোন একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা এদের প্রত্যেকটির পৃথক পৃথকভাবে ঘটার সম্ভাবনার যোগফলের সমান অর্থাৎ A ও B দুটি বর্জনশীল ঘটনা হলে A অথবা B ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

প্রমাণ ঃ

মনে করি, কোন একটি নমুনাক্ষেত্র S_1, S নমুনা ক্ষেত্রের মধ্যে A ও B দুটি বর্জনশীল ঘটনা। এদেরকে নিচের ভেনচিত্রের সাহায্যে দেখান হল ঃ



ধরা যাক, S নমুনা ক্ষেত্রের মধ্যে মোট উপাদান সংখ্যা = n(s) = n

A ঘটনার অনুকূল উপাদান সংখ্যা = n (A) = n_a.

B ঘটনার অনুকূল উপাদান সংখ্যা = n (B) = n_b.

সুতরাং A ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা,

$P(A) = \frac{n_a}{n}$ এবং

B ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা

$P(B) = \frac{n_b}{n}$

A ও B দুটি বর্জনশীল ঘটনা বলে এদের মধ্যে কোন সাধারণ নমুনা বিন্দু নেই। সুতরাং A ও B এর সংযোগ $(A \cup B)$ ঘটনার অনুকূল উপাদান হবে A এবং B ঘটনার অনুকূল উপাদানের যোগফল।

$(A \cup B)$ এর অনুকূল উপাদান

$= n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

$= n_a + n_b$

$$\text{সুতরাং}, P(A \cup B) \quad = \frac{n(A \gg B)}{n(S)}$$

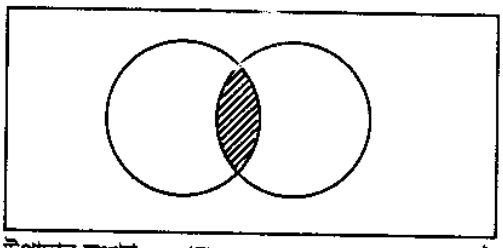
$$= \frac{n_a + n_b}{n} = \frac{n_a}{n} + \frac{n_b}{n}$$

$$= P(A) + P(B)$$

৪৫। দু'টি ঘটনা অবর্জনশীল হলে এদের যে কোন একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা এদের পৃথক পৃথক সম্ভাবনার যোগফল হতে এদের একত্রে ঘটার সম্ভাব্যতার বিয়োগফল সমান। অর্থাৎ ১ নমুনাক্ষেত্রে A ও B দু'টি পরস্পর অবর্জনশীল ঘটনা হলে,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

প্রমাণ ঃ মনে করি, কোন নমুনাক্ষেত্র S, S নমুনাক্ষেত্রের সাথে সংশ্লিষ্ট A ও B দু'টি অবর্জনশীল ঘটনা। এদেরকে নিচের ভেনচিত্রের মাধ্যমে দেখান হল–



ধরা যাক, S নমুনাক্ষেত্রে মোট উপাদান সংখ্যা = $n(S) = n$

A ঘটনার অনুকূল উপাদান সংখ্যা $n(A) = n_a$

B ঘটনার অনুকূল উপাদান সংখ্যা $n(B) = n_b$

$A \cap B$ ঘটনার অনুকূল উপাদান সংখ্যা $n(A \cap B) = n_{ab}$

সুতরাং A ঘটনার ঘটার সম্ভাব্যতা $P(A) = n_{a/n}$

B ঘটনার ঘটার সম্ভাব্যতা $P(B) = n_{b/n}$

$A \cap B$ ঘটনার ঘটার সম্ভাব্যতা $P(A \cap B) = n_{ab/n}$

A ও B দুটি অবর্জনশীল ঘটনা।

$A \cap B$ এদের মধ্যকার সাধারণ বিন্দু নির্দেশ করে।

সুতরাং $A \cap B = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$

সুতরাং $(A \cap B)$ এর অনুকূল ফলাফল সংখ্যা

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A \cap \bar{B}) + n(A \cap B) + n(\bar{A} \cap B) \\ &= (n_a - m_{ab}) + n_{ab} + (n_b - n_{ab}) \\ &= n_a - n_{ab} + n_{ab} + n_b - n_{ab} = n_a + n_b - n_{ab} \end{aligned}$$

$$\therefore P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n_a + n_b - n_{ab}}{n}$$

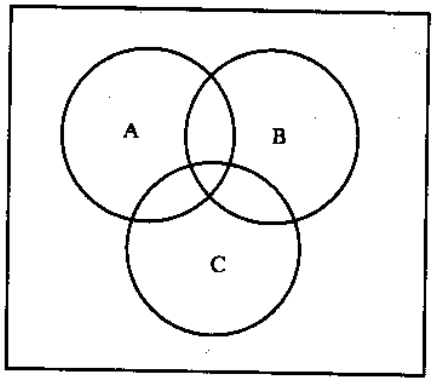
$$= \frac{n_a}{n} + \frac{n_b}{n} + \frac{n_{ab}}{n} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

৪৬। তিনটি ঘটনা A, B, C অবর্জনশীল হলে A বা B বা C অবর্জনশীল হলে A বা B বা C ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা।

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

প্রমাণ ঃ

মনে করি, কোন নমুনাক্ষেত্র S, S নমুনাক্ষেত্রের মধ্যে A, B, C তিন অবর্জনশীল ঘটনা। নিচে ভেনচিত্রে উহা দেয়া হলো ঃ



আমরা জানি, A ও B দুটি অবর্জনশীল ঘটনা হলে-

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

এখানে, A, B ও C তিনটি অবর্জনশীল ঘটনা,

$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C)$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C)$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P((A \cap C) \cup (B \cap C))$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - [P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B) \cap (B \cap C))]$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

$\therefore P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$ **(প্রমাণিত)।**

৪৭। কোন একটি পরীক্ষণে যদি কোন ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা অন্য কোন ঘটনা ইতিপূর্বে ঘটেছে কিংবা ঘটেনি তার উপর নির্ভর করে তবে ঐ ঘটনার সাম্ভাব্যতাকে শর্তাধীন সম্ভাব্যতা (Conditional Pobability) বলা হয়। অর্থাৎ A ও B দুটি ঘটনার ক্ষেত্রে,

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

অথবা, $P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

প্রমাণ ঃ

মনে করি, কোন নমুনাক্ষেত্র S_1, S নমুনাক্ষেত্রে A ও B দুইটি ঘটনা, A ঘটনার সম্ভাব্যতাকে B ঘটনার সাপেক্ষ শর্তাধীন সম্ভাব্যতা বলে যদি A ঘটনাটি ঘটার সম্ভাব্যতা ও B ঘটনাটি ইতিপূর্বে ঘটেছে কিনা তার ওপর নির্ভর করে।

ধরি, নমুনাক্ষেত্রের মোট উপাদানের সংখ্যা = n

A ঘটনার অনুকূল উপাদান সংখ্যা = n_a

B ঘটনার অনুকূল উপাদান সংখ্যা = n_b

এবং $A \cap B$ ঘটনার অনুকূল উপাদান সংখ্যা = n_{ab}

সুতরাং, $P(A) = \frac{n_a}{n}$ এবং $P(B) = \frac{n_b}{n}$

$\frac{n_{ab}}{n_a}$ দ্বারা ঘটনার শর্তাধীনে B ঘটনার সম্ভাব্যতা প্রকাশিত হয়।

$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{n_{ab}}{n_a} \cdot \frac{n_{ab}}{n_b}$ দ্বারা B ঘটনার শর্তাধীনে A ঘটনার সম্ভাব্যতা প্রকাশিত হয়, $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{n_{ab}}{n_b}$.

এখন n_{ab} দ্বারা A ও B এক সাথে ঘটনার ঘটনা প্রকাশ করে।

$\therefore P(A \cap B) = \frac{n_{ab}}{n} = \frac{n_a}{n} \cdot \frac{n_{ab}}{n_a}$

$= P(A)\, P(B/A).$

$\therefore P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$; যখন $P(A) \neq 0$

অনুরূপভাবে,

$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$; যখন $P(B) \neq 0$

৪৮। ব্যায়েস সূত্র (Bayes Theorem) ঃ

একটি ঘটনা A কে সম্পূর্ণ ও পরস্পর বর্জনশীল ঘটনা

$B_1, B_2, B_3, \ldots\ldots\ldots\ldots B_n$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

দেয়া আছে–

(i) $B_1, B_2, B_3, \ldots\ldots\ldots\ldots B_n$ এর সম্ভাব্যতা $P(B_1), P(B_2), P(B_3), \ldots\ldots\ldots P(B_n)$ A ঘটনার সংঙ্গে সামঞ্জস্যপূর্ণ (যা জানা নেই)

(ii) শর্তাধীনে সম্ভাবনা $P(A/B_1), P(A/B_2) \ldots\ldots\ldots P(A/B_n)$।

(a) পরবর্তী সম্ভাব্যতা পাওয়ার জন্য $P(B_1/A), P(B_2/A) \ldots\ldots\ldots P(B_n/A)$ প্রয়োজন।

(b) আবার অপর একটি ঘটনা C এর প্রয়োগের সম্ভাবনা বের করতে হবে। দেয়া আছে সম্ভাবনা

$P(C/AB_1), P(C/AB_2), \ldots\ldots\ldots\ldots, P(C/AB_n)$

প্রমাণ ঃ

যৌগিক ঘটনার সম্ভাব্যতার সূত্র হতে পাই,

$P(AB_i) = P(B_i)\, P(A/B_i)$

বা, $P(A)\, P(B_i/A) = P(B_i)\, P(A/Bi)$

বা, $P(Bi / A) = \dfrac{P(Bi)\, P(A/Bi)}{P(A)}$

যেহেতু A ঘটনাকে পরস্পর বর্জনশীল আকারে

$AB_1, AB_2, AB_3, \ldots\ldots\ldots\ldots AB_n$ দ্বারা বাস্তবায়ন করা যায়। সুতরাং সম্পূর্ণ ঘটনার সম্ভাবনার সূত্র হতে আমরা পাই,

$$P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots + P(AB_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(Bi)\, P(A/Bi)$$

$$\therefore P(Bi/A) = \frac{P(Bi)\, P(A.Bi)}{\sum_{i=1}^{n} P(Bi)\, P(A/Bi)}$$

$$(ii)\ P(C/A) = \sum_{i=1}^{n} P(CBi/A)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(Bi/A)\, P(C/ABi)$$

$$\therefore P(C/A) = \frac{\sum_{i=1}^{n} P(Bi)\, P(A/Bi) P(C/ABi)}{\sum_{i=1}^{n} P(Bi)\, P(A/Bi)}$$

৪৯। প্রমাণ ঃ ধরা যাক, কোন নমুনাক্ষেত্র S, এবং এই S নমুনাক্ষেত্রে A একটি ঘটনা।

S নমুনা ক্ষেত্রের মোট উপাদান সংখ্যা = n এবং

A ঘটনার অনুকূল উপাদান সংখ্যা = m,

সুতরাং সম্ভাব্যতা, $P(A) = \dfrac{m}{n}$

এখন আমরা বিভিন্ন অবস্থায় A ঘটনার অবস্থা যাচাই করে দেখব।

যদি A ঘটনা অসম্ভব হয় তবে A ঘটনার অনুকূলে কোন উপাদান থাকবে না। অর্থাৎ $m = 0$ হবে।

$\therefore P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{o}{n} = 0$ ..... (1)

আবার, যদি A ঘটনা নিশ্চিত হয় তবে A ঘটনায় অনুকূল উপাদান এবং নমুনাক্ষেত্রের মোট উপাদান একই হবে।

এক্ষেত্রে, $n = m$ হবে

$\therefore P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1$ ..... (ii)

অতএব, যদি A ঘটনা অনিশ্চিত হয় তবে অনুকূল উপাদান সংখ্যা

0 এর চাইতে বেশি হবে এবং n অপেক্ষা কম হবে।

$\therefore 0 < m < n$ বা $\frac{0}{n} < \frac{m}{n} < \frac{n}{n}$ [উভয় পক্ষকে n দ্বারা ভাগ করে]

বা, $0 < P(A) < 1$ ..... (iii)

(i) (ii) (iii) নং এ প্রতিষ্ঠিত শর্তসমূহ একত্রিত করে আমরা পাই, $0 \le P(A) \le 1$

৫০। স্যাম্পল (নমুনা) পয়েন্টসমূহের সম্ভাবনার যোগফলই হলো ইভেন্ট (Event)। এটা অনুসরণ করে নিয়ে 4টি উপপাদ্য বা সূত্র বর্ণনা করা হল।

উপপাদ্য-১ ঃ

সম্ভাবনার ফাংশন P, সীমাবদ্ধ (সসীম) সম্ভাব্যতা ক্ষেত্রের (স্পেসের) ইভেন্টগুলোর সাথে নিম্নবর্ণিত শর্তগুলো মেনে চলে-

১। প্রত্যেক ইভেন্ট A এর জন্য, $0 \le P(A) \le 1$

২। $P(S) = 1$, এখানে S হল স্যাম্পল স্পেস (নমুনা ক্ষেত্র)

৩। যদি ইভেন্ট A এবং ইভেন্ট B পরস্পর আলাদা (মিউচুয়ালী এক্সক্লুসিভ) হয়, তবে $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$।

উদাহরণ ঃ

ধরা যাক, ২টি পয়সা একত্রে ছোড়া হল। ফলাফল নিম্নরূপ পাওয়া যেতে পারে।

{HH, HT, TH, TT}

যদি ২টা পয়সায় H উঠে, তাকে আমরা 0 বলি।

যদি ১টা পয়সায় H এবং ১টা পয়সায় T উঠে তাকে 1 বলি

যদি ২টা পয়সায় T উঠে তাকে ২ বলি।

এবং যদি ২টি HH অথবা ২টি TT উঠে তাকে 3 বলি

তবে $P(0) = \frac{1}{4}$

$P(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$P(2) = \frac{1}{4}$

$P(3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ অর্থাৎ এর প্রত্যেকটি হলো 1 এর চেয়ে ছোট, যা উপপাদ্য-১ এর প্রথম শর্ত পূরণ করে।

এবার $P(S) = P(0) + P(1) + P(2)$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$, বা উপপাদ্য-১ এর দ্বিতীয় শর্ত পূরণ করে।

আবার,

$P(A \cup B) = P(3) = \frac{1}{2}$

এবং $P(A) + P(B) = P(0) + P(2)$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

যা উপপাদ্যটি তৃতীয় শর্ত পূরণ করে।

উপপাদ্য-২। যদি কোন একটি ইভেন্ট A হয়, তখন $P(A^C) = 1 - P(A)$ হবে।

উদাহরণ ঃ মনে করি, P(A) একটি সম্ভাবনা, A কে উপপাদ্য-১ এর উদাহরণের 0 এর সাথে তুলনা করি।

তবে $P(0) = \frac{1}{4}$

এবার $P(A^C)$ এর অর্থ হলো, 0 নয় অর্থাৎ HH নয় এমন ইভেন্টের সম্ভাবনা।

$$P(A^C) = P(1) + P(2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4} = 1 - P(A)$$

অর্থাৎ, এটি উপপাদ্য-২ এর শর্ত পূরণ করে।

উপপাদ্য-৩। যদি একটি শূন্য সেট $\varnothing$; এবং যদি A এবং B দুটি ইভেন্ট হয়, তবে–

১। $P(\varnothing) = 0$; ২। $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$

৩। যদি $A \leq B$ হয়, তবে $P(A) \leq P(B)$

উদাহরণ ঃ

(ক) ধরা যাক, ২টি পয়সা একত্রে ছোড়া হলো। এখন ২টি পয়সাতে ২টা H (Heads) উঠতে পারে কিংবা ২টি পয়সাতে ২টা T (tails) উঠতে পারে। অথবা 1টিতে T অন্যটিতে H উঠতে পারে। যদি বলি আমাদের ৩টি পয়সাতে H প্রয়োজন। যেহেতু পয়সা দুটি। অতএব ৩টি H এর কোন সুযোগ নেই। অতএব এরূপ সেট হচ্ছে $\varnothing$।

অতএব সম্ভাব্যতা $P(\varnothing) = 0$

(খ) ধরা যাক, একটি ছক্কা প্রথম 3 বার ছোড়া হলো। পাওয়া গেল {1, 3, 5}-এরপর আবার ছোড়া হল পাওয়া গেল {3, 4, 6}

ধরি সেট $A = \{1, 3, 5\}$ এবং $B = \{3, 4, 6\}$

এখানে, $A \backslash B = \{1, 5\}$ এবং $A \cap B = \{3\}$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \backslash B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

এবং $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

অতএব,

$$P(A \backslash B) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = P(A) - P(A \cap B)$$

$$\therefore P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$$

(গ) ধরা যাক, একটি ছক্কা প্রথমে 2 বার ছোড়া হল, এতে পাওয়া গেল ইভেন্ট $A = \{2, 3\}$, পরে আবার 3 বার ছোড়া হল। এতে পাওয়া গেল ইভেন্ট $B = \{2, 3, 5\}$

এখানে $A \times B$

$$\therefore P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{2}$$

অতএব $P(A) < P(B)$ যদি $A + B$ হতো, তবে $P(A) = P(B)$ হতো।

অতএব, এখানে $A \leq B$ হলো, $P(A) \leq P(B)$ এর সত্যতা পাওয়া যায়।

উপপাদ্য-৪। প্রত্যেক উভেন্ট A এবং B এর জন্য $(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

একে যোজনের নীতি (Addition principle) বলে।

৫১। "বাইনোমিয়াল থিয়োরেম" আবিষ্কার করেন গাণিতিক বার্নোলী। তার পুরো নাম যাকোব বার্নোলী (Jacob bernonulli)। তিনি ছিলেন সুইস নাগরিক। যে ধরনের ট্রায়াল পুনরাবৃত্তি করা হয় অথচ ইন্ডিপেন্ডেন্ট, সে রকম ট্রায়াল নিয়েই বার্নোলী গবেষণা করেন।

ধরা যাক, একটি বার্নোলী ট্রায়ালে সফলতা (Success) এর সম্ভাবনা P, অতএব সাকসেস না হবার সম্ভাবনা (Failur), q = 1 – p। যদি n সংখ্যক বার বার্নোলী ট্রায়াল করা হয় এবং সাকসেস যদি p হয়, তবে তা B (n, p) দ্বারা প্রকাশ হয়।

স্বাভাবিকভাবেই, একটি ট্রায়ালে H পড়ার সম্ভাবনা $\frac{1}{2}$ এবং T পড়ার সম্ভাবনা $\frac{1}{2}$ (আমরা H কে সাকসেস এবং T কে সাকসেস নয় গণ্য করছি)। একটি পয়সা যদি বার বার 2 বার ছোড়া হয় অর্থাৎ ২টি ট্রায়ালে আমরা পাই-

$(H + T)^2 = H^2 + 2HT + T^2$

এখানে ২ বার H (Head) পড়ার সম্ভাবনা $= \frac{H^2 \text{ এর সহগ}}{2^2} = \frac{1}{4}$

২ বারের যে কোন একবার H পড়ার সম্ভাবনা $\frac{HT}{2^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

আবার,

একটি পয়সা যদি পরপর 3 বার ছোড়া হয় অর্থাৎ পরপর 3টি ট্রায়ালে আমরা পাই,

$(H + T)^3 = H^3 + 3H^2T + 3HT^2 + T^3$

সুতরাং পরপর 3 বার H পড়ার সম্ভাবনা $= \frac{H^3 \text{ এর সহগ}}{2^2} = \frac{1 + 3 + 3}{8}$

$= \frac{7}{8}$

এবার একটি পয়সা যদি বার বার 4(চার) বার ছোড়া হয়, তাহলে $(H + T)^4 = H^4 + {}^4C_1H^3T + {}^6C_2H^2T^2 + 4C_3HT^3 + T^4$

আবার,

4 বারের মধ্যে যে কোন 3 বার

H পড়ার সম্ভাবনা $= \frac{H^3\text{-এর সহগ}}{2^4} = \frac{{}^4C_1}{2^4}$

$= \frac{4.1}{16} = \frac{1}{4}$

এভাবে আরো ট্রায়াল বর্ণনা করা যায়। উপরের বিষয়টিকে সংক্ষেপে করে উপপাদ্য আকারে বর্ণনা করা হলো-

উপপাদ্য- "K সংখ্যক সাকসেস এর জন্য বাইনোমিয়াল (Binomial) ট্রায়াল B (n, P) কে

$P(K) = {}^nC_K P^K q^{n-k}$ লেখা যায়।

বা $P(k) = P(K \text{ successes})$

$= \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

(এখানে K = সাকসেসের সম্ভাবনা এবং q হচ্ছে ফেলিয়ার (Failure) এর সম্ভাবনা। এখানে $p = q = \frac{1}{2}$)

৫২। **প্রমাণ ঃ** ধরা যাক, S নমুনা ক্ষেত্রে A একটি ঘটনা।

S নমুনা ক্ষেত্রের মোট উপাদান সংখ্যা = n এবং

A ঘটনার অনুকূল উপাদান সংখ্যা = m

সুতরাং, সম্ভাব্যতা, $P(A) = \frac{m}{n} = P$

A ঘটনা না ঘটার সম্ভাব্যতা অর্থাৎ A এর পূরক ঘটনা নির্দেশ করে না।

∴ A ঘটনার প্রতিকূল উপাদান সংখ্যা = n–m

সুতরাং সম্ভাব্যতা $P(\bar{A}) = \frac{n-m}{n} = q$

∴ A ঘটনা ঘটা ও না ঘটার সম্ভাব্যতার যোগফল,

$p + q = P(A) + P(\bar{A}) = \frac{m}{n} + \frac{n-m}{n} = \frac{n}{n} = 1$

৫৩। **প্রমাণ ঃ** মনে করি, নমুনা ক্ষেত্র S, S নমুনাক্ষেত্রের মোট ফলাফল সংখ্যা n এবং কোন ঘটনা A এর অনুকূল সংখ্যা m হলে A এর পূরক ঘটনার ফলাফলের সংখ্যা হবে–

$n - m.P(A) = \frac{m}{n} . P(A^c) = \frac{m-n}{n}$

সুতরাং, $P(A) + P(A^c) = \frac{m}{n} + \frac{n-m}{n} = \frac{m+n-m}{n} = \frac{n}{n} = 1$

∴ $P(A) + P(A^c) = 1$

৫৪। কোন অবিরত বা অবিচ্ছিন্ন দৈব চলকের মান কোন একটি সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রে থাকার সম্ভাব্যতাকে সীমাবদ্ধ সম্ভাব্যতা ক্ষেত্র (Finite Probability space) বলা হয়। যখন 'S' একটি সীমাবদ্ধ নমুনা ক্ষেত্র, যেমন, $S = \{a_1, a_2\ a_3\ .....\ a_n\}$ হয় এবং উহার সম্ভাব্যতা ক্ষেত্র P(A) হলে এটা অবশ্যই নিচের শর্ত দুটি মেনে চলবে ঃ

(i) $P(a_i) \geq 0$

(ii) $\sum P(a_i) = 1$

৫৫। **প্রমাণ ঃ** ধরা যাক, কোন নমুনাক্ষেত্র S, এবং এই S নমুনাক্ষেত্রে A একটি ঘটনা।

S নমুনা ক্ষেত্রের মোট উপাদান সংখ্যা = n এবং

A ঘটনার অনুকূল উপাদান সংখ্যা = m,

সুতরাং সম্ভাব্যতা, $P(A) = \frac{m}{n}$

এখন আমরা বিভিন্ন অবস্থায় A ঘটনার অবস্থা যাচাই করে দেখব।

যদি A ঘটনা অসম্ভব হয় তবে A ঘটনার অনুকূলে কোন উপাদান থাকবে না। অর্থাৎ m = 0 হবে।

∴ $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{o}{n} = 0$ ..... (1)

আবার, যদি A ঘটনা নিশ্চিত হয় তবে A ঘটনায় অনুকূল উপাদান এবং নমুনাক্ষেত্রের মোট উপাদান একই হবে।

এক্ষেত্রে, n = m হবে

∴ $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1$ ..... (ii)

অতএব, যদি A ঘটনা অনিশ্চিত হয় তবে অনুকূল উপাদান সংখ্যা

0 এর চাইতে বেশি হবে এবং n অপেক্ষা কম হবে।

∴ $O < m < n$ বা $\frac{o}{n} < \frac{m}{n} < \frac{n}{n}$ [উভয় পক্ষকে n দ্বারা ভাগ করে]

বা, $0 < P(A) < 1$ ..... (iii)

(i) (ii) (iii) নং এ প্রতিষ্ঠিত শর্তসমূহ একত্রিত করে আমরা পাই, $0 \leq P(A) \leq 1$

৫৬। যদি কোন ঘটনার অনুকূলে কোন ফলাফল না পাওয়া যায় অর্থাৎ কোন একটি পরীক্ষণে যখন কোন অবস্থাতেই ঘটনাটি ঘটবে না তবে তাকে অসম্ভব ঘটনা (Impossible Events) বলা হয়। এক্ষেত্রে সংশ্লিষ্ট পরীক্ষার নমুনা ক্ষেত্রের সাপেক্ষে ঐ ঘটনার কোন নমুনা বিন্দু থাকে না। A অসম্ভব ঘটনা হলে $A = \varphi$ এবং $n(A) = 0$। সুতরাং

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0$$

৫৭। যদি কোন ঘটনার অনুকূলে কোন ফলাফল না পাওয়া যায় অর্থাৎ কোন একটি পরীক্ষণে যখন কোন অবস্থাতেই ঘটনাটি ঘটবে না তবে তাকে অসম্ভব ঘটনা (Impossible Events) বলা হয়। এক্ষেত্রে সংশ্লিষ্ট পরীক্ষার নমুনা ক্ষেত্রের সাপেক্ষে ঐ ঘটনার কোন নমুনা বিন্দু থাকে না। A অসম্ভব ঘটনা হলে $A = \varphi$ এবং $n(A) = 0$। সুতরাং

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0$$

৫৮। দুটি মুদ্রা ও একটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ পরীক্ষার নমুনাক্ষেত্র নিচে দেওয়া হলঃ

[H = Head, T = Tail]

1 HH, 2HH, 3HH, 4HH, 5HH, 6HH,

1HT, 2HT, 3HT, 4HT, 5HT, 6HT,

1TH, 2TH, 3TH, 4TH, 5TH, 6TH,

1TT, 2TT, 3TT, 4TT, 5TT, 6TT,

নমুনাক্ষেত্রের মোট ফলাফল সংখ্যা = 24.

একটি ছক্কা একবার নিক্ষেপ পরীক্ষার নমুনা ক্ষেত্রে নমুনাক্ষেত্রের ফলাফল =6

৫৯। 10টি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ পরীক্ষায় মোট নমুনাবিন্দু= $2^{10} = 1024$টি

3টি মাথা পাওয়ার অনুকূল উপাদান= ${}^{10}C_3 = 120$

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা = $\frac{120}{1024}$

৬০। একটি মুদ্রা তিনবার নিক্ষেপ পরীক্ষায় নমুনা ক্ষেত্র নিচে দেয়া হল ঃ

একটি মুদ্রা দুইবার নিক্ষেপ	
HH	HT TH
H	HHH, HHT, HTH, HTT
T	THH, THT, TTH, TTT
মোট নমুনা বিন্দু = 8 টি	

(i) 3টি Head আসার অনুকূল উপাদান = {HHH)}= 1টি

$\therefore$ P(3টি Head) = $\frac{1}{8}$

(ii) 2টি Head আসার অনুকূল উপাদান

{HHT, HTH, THH} = 3টি

$\therefore$ P(2টি Head) = $\frac{3}{8}$

(iii) কমপক্ষে 2টি Head আসার অনুকূল উপাদান

{HHH, HHT, HTH, THH) = 4টি

$\therefore$ P (কম পক্ষে 2টি Head) = $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

(iv) বড় জোড় 2টি Head আসার অনুকূল উপাদান

{TTT, HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH} = 7টি

$\therefore$ P (বড়জোড় 2টি Head) $= \frac{7}{8}$

(v) কোন Head না অথবা, 0টি Head আসার অনুকূল উপাদান

{TTT} = 1টি

$\therefore$ P(0টি Head) $= \frac{1}{8}$

৬১। একটি 50 পয়সার মুদ্রা 10 বার নিক্ষেপ পরীক্ষায় নমুনা ক্ষেত্রের মোট ফলাফল সংখ্যা হবে,

$n = 2^{10} = 1024$

সমাবেশের সূত্রানুসারে মুদ্রাটির n বার নিক্ষেপ করে x বার H পাওয়া যাবে এমন ফলাফলের সংখ্যা হবে $m = {}^nC_x$

$\therefore$ মুদ্রাটির 10 বার নিক্ষেপ করে 10 বারই H (শাপলা ফুলের দিক) পাওয়ার সম্ভাবনা

$= {}^{10}C_{10}$

$= \frac{\lfloor 10}{\lfloor 10 \ \lfloor 10-10}$

$= \frac{1}{\lfloor 0}$

$= 1$

কোনবারই কোন হেড (H) না পাওয়ার সম্ভাবনা

$= {}^{10}C_{10}$

$= \frac{\lfloor 10}{\lfloor 0 \ \lfloor 10-0}$

$= \frac{10}{\lfloor 10}$

$= 1$

৬২। একটি ছক্কা একবার

		1	2	3	4	5	6
একটি মুদ্রা ছুড়লে	HH	1HH,	2HH,	3HH,	4HH,	5HH,	6HH
	HT	1HT,	2HT,	3HT,	4HT,	5HT,	6HT
	TH	1TH,	2TH,	3TH,	4TH,	5TH,	6TH
	TT	1TT,	2TT,	3TT,	4TT,	5TT,	6TT

মোট নমুনাবিন্দু = 24টি

(i) দুটি মাথা ও বিজোড় সংখ্যা আসার অনুকূল উপাদান

{1HH, 3HH, 5HH} = 3টি

$\therefore$ P (2টি মাথা ও বিজোড় সংখ্যা) $= \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$

(ii) একটি লেজ ও জোড় সংখ্যা আসার অনুকূল উপাদান

{2HT, 2TH, 4HT, 5TH, 6HT, 6TH} = 6টি

$\therefore$ P (১টি লেজ ও জোড় সংখ্যা) $= \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

(iii) যে কোন পিঠ ও বিজোড় সংখ্যা আসার অনুকূল উপাদান

(১ম ৩য় ও ৫ম কলাম) = 12টি

$\therefore$ P(যে কোন পিঠ ও বিজোড় সংখ্যা) $= \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

৬৩। দুইটি ছক্কা একত্রে নিক্ষেপ পরীক্ষায়

নমুনাক্ষেত্র ঃ

	1	2	3	4	5	6
	(x, y)	(x, y)	(x, y)	(x, y)	(x, y)	(x, y)
1	(1,1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
3	(I, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

মোট নমুনাবিন্দু = 36টি

(i) (x = y) এর অনুকূল উপাদান সংখ্যা

{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)} = 6টি

$\therefore$ P(x = y) $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

(ii) x = 2y এর অনুকূল উপাদান সংখ্যা

{(2, 1), (4, 2), (6, 3)} = 3টি

$\therefore$ P(x = 2y) $= \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

(iii) 2x = y এর অনুকূল উপাদান সংখ্যা

{(1, 2), (2, 4), (3, 6)} = 3টি

$\therefore$ P(x = 2y) $= \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

(iv) (x + y = 7) এর অনুকূল উপাদান সংখ্যা

{(1, 6), (2, 5), (3,4), (6, 1) (5, 2), (4, 3)} = 6টি

$\therefore$ P(x + y = 7) $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

(v) (x + y > 7) এর অনুকূল উপাদান সংখ্যা

{(6,2), (5, 3), (6, 3), (4, 4), (5,4), (6, 4), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5), (2, 6), (3,6), (4, 6), (5,6), (6, 6)} = 15

$\therefore$ P(x + y > 7) $= \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

(vi) $(x + y \geq 7)$ এর অনুকূল উপাদান সংখ্যা

(1, 6) (2, 5) (2, 6) (3, 4) (3, 5) (3, 6) (4, 3)

(4, 4) (4,5) (4, 6) (5, 2) (5, 3) (5, 4) (5, 5)

(5, 6) (6, 1) (6,2) (6, 3) (6, 4) (6,5) (6, 6) = 21টি

$\therefore P(x + y \geq 7) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$

৬৪। দুটি ছক্কা একই সাথে নিক্ষেপ করা হল।

প্রশ্নমতে, একটি ছক্কায় সবসময় 5 পাওয়া যায়। দুটি ছক্কার যোগফল 10

দুটি ছক্কার নমুনা ক্ষেত্র-

S : {(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5,6)}

মোট নমুনা বিন্দু = 6টি

(দুটি ছক্কার যোগফল = 10) এর অনুকূল উপাদান সংখ্যা (5, 5) = 1টি

$\therefore P(10) = \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

৬৫। প্রথম পাত্রে লাল বল = 3টি

কালো বল = 4টি

মোট = 7টি

দ্বিতীয় পাত্রে লাল বল = 4টি

কালো বল = 5টি

মোট = 9টি

প্রথম পাত্রের উত্তেজিত বল দ্বিতীয় পাত্রের উত্তেজিত বলের উপর প্রভাব ফেলে না। সুতরাং উত্তোলনদ্বয় স্বাধীন

(i) P (সব কয়টি বল কালো) = P (১ম পাত্র হতে কালো ও ২য় পাত্র হতে কালো)

= P (১ম পাত্র হতে কালো) × P (২য় পাত্র হতে কালো)

$= \frac{{}^4C_1}{{}^7C_1} \times \frac{{}^5C_1}{{}^9C_1} = \frac{4}{7} \times \frac{5}{9} = \frac{20}{63}$

(ii) P(2টি বল লাল) = P (প্রথম পাত্র হতে লাল ও দ্বিতীয় পাত্র হতে লাল বল)

= P (প্রথম পাত্র হতে লাল বল) × P (দ্বিতীয় পাত্র হতে লাল বল)

$= \frac{{}^3C_1}{{}^7C_1} \times \frac{{}^4C_1}{{}^9C_1} = \frac{12}{63}$

(iii) P (ভিন্ন রংয়ের বল) = P (প্রথম পাত্র হতে লাল ও দ্বিতীয় পাত্র হতে কালো অথবা ১ম পাত্র হতে কালো ও ২য় পাত্র হতে লাল বল)

= P (প্রথম পাত্র হতে লাল ও দ্বিতীয় পাত্র হতে কালো

+ P (প্রথম পাত্র হতে কালো ও দ্বিতীয় পাত্র হতে লাল)

$= \frac{{}^3C_1}{{}^7C_1} \times \frac{{}^5C_1}{{}^9C_1} + \frac{{}^4C_1}{{}^7C_1} \times \frac{{}^4C_1}{{}^9C_1}$

$= \frac{3}{7} \times \frac{5}{9} + \frac{4}{7} \times \frac{4}{9}$

$= \frac{15}{63} + \frac{16}{63}$

$= \frac{31}{63}$

৬৬। বাক্সে সাদা বল = 4টি

লাল বল = 6টি

মোট = 10টি

(i) পুনঃস্থাপন প্রক্রিয়ায় বল দুটি নেয়া হলে যেহেতু দ্বিতীয় বলটি উঠানোর পূর্বে ১ম বলটি বাক্সে ফেরত দেয়া হয়। সুতরাং বাক্সে বলের সংখ্যা অপরিবর্তীত থাকবে।

অতএব বল দুটি সাদা হবার সম্ভাবনা

P (১ম বলটি সাদা ও ২য় বলটি সাদা)

$= \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}$

(ii) পুনঃস্থাপন না করে প্রক্রিয়ায় বল দুটি নেয়া হলে যেহেতু ২য় বলটি উঠানোর পূর্বে ১ম বলটি বাক্সে ফেরত দেয়া হয় না সুতরাং বাক্সে মোট বলের সংখ্যা $(10 - 1) = 9$টি এবং সাদা বলের সংখ্যা $(4 - 1) = 3$টি হবে।

অতএব বল দুটি সাদা হবার সম্ভাবনা

P (১ম বল সাদা ও ২য় বল সাদা) $= \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$

৬৭। বাক্সে সাদা বল = 4টি

লাল বল = 5টি

নীল বল = 6টি

মোট = 15টি

মোট ফলাফলের সংখ্যা $= {}^{15}C_3 = \frac{\lfloor 15}{\lfloor 3 \lfloor 15-3}$

$= \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12}{3 \times 2 \times \lfloor 12} = 445$

(i) তিনটি তিন রংঙের বল পাওয়ার সম্ভাবনা

= P(1টি লাল, 1টি সাদা, 1টি নীল)

$= \frac{{}^5C_1 \times {}^4C_1 \times {}^6C_1}{{}^{15}C_3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{455} = \frac{24}{91}$

(ii) 2টি সাদা ও 1টি অন্য রঙের বল পাওয়ার সম্ভাবনা

= P(2টি সাদা ও 1টি লাল অথবা 1টি নীল)

= P(2টি সাদা ও 1টি লাল) + P(2টি সাদা ও 1টি নীল)

$= \frac{{}^4C_2 \times {}^5C_1}{{}^{15}C_3} = \frac{{}^4C_2 \times {}^6C_1}{{}^{15}C_3} = \frac{6 \times 5}{455} + \frac{6 \times 6}{455} = \frac{30 + 36}{455}$

$= \frac{66}{455}$

(iii) প্রতিটি বল সাদা হওয়ার সম্ভাবনা

= P(3টি বল সাদা)

$= \frac{{}^4C_3}{{}^{15}C_3} = \frac{4}{455}$

৬৮। প্যাকেটে মোট তাস = 52টি

ধরি, ঘটনা A তাসটি টেক্কা = 4টি

ঘটনা B তাসটি রাজা = 4টি

ঘটনা C তাসটি হরতন = 13টি

ঘটনা D তাসটি লাল = 26টি

ঘটনা E তাসটি কালো = 26টি

(i) যেহেতু তাস দুটি কালো হলে কালো টেক্কাও হতে পারে সুতরাং A ও E ঘটনা দুটি অবর্জনশীল

$\therefore A \cap E = 2$টি

$\therefore P(A) = \frac{^4C_2}{^{52}C_2}, P(E) = \frac{^{26}C_2}{^{52}C_2}; P(A \cap E) = \frac{^2C_2}{^{52}C_2}$

$\therefore P(A \cap E) = P(A) + P(E) - P(A \cap E)$

$$= \frac{^4C_2}{^{52}C_2} + \frac{^{26}C_2}{^{52}C_2} - \frac{^2C_2}{^{52}C_2}$$

$$= \frac{\frac{4 \times 3}{2}}{\frac{52 \times 51}{2}} + \frac{\frac{26 \times 25}{2}}{\frac{52 \times 51}{2}} - \frac{1}{\frac{52 \times 51}{2}}$$

$$= \frac{4 \times 3}{52 \times 51} + \frac{26 \times 25}{52 \times 51} - \frac{1}{26 \times 51} = \frac{1}{221} + \frac{25}{102} - \frac{1}{1326}$$

$$= \frac{6 + 325 - 1}{1325} = \frac{330}{1326} = \frac{55}{221}$$

(ii) যেহেতু তাস দুটি হরতন হলে একটি তাস হরতনের রাজাও হতে পারে কিন্তু হরতনের দুটি রাজা নেই। সুতরাং এরূপ তাস নেই যাহা রাজাও নির্দেশ করে আবার হরতনও নির্দেশ করে।

অতএব, B ও C ঘটনা দুটি বর্জনশীল।

$\therefore P(B \cap C) = P(B) + P(C)$

$$P(B \cap C) = \frac{^4C_2}{^{52}C_2} + \frac{^{13}C_2}{^{52}C_2}$$

$$= \frac{\frac{4 \times 3}{2}}{\frac{52 \times 51}{2}} + \frac{\frac{13 \times 12}{2}}{\frac{52 \times 51}{2}}$$

$$= \frac{4 \times 3}{52 \times 51} + \frac{13 \times 12}{52 \times 51}$$

$$= \frac{12 + 156}{52 \times 51} = \frac{168}{52 \times 51} = \frac{14}{221}$$

(iii) যেহেতু তাস দুটি লাল হলে কালো হবে না এবং কালো হলে লাল হবে না সুতরাং D ও E ঘটনা দুটি বর্জনশীল।

$\therefore P(D \cup E) = P(D) + P(E)$

$$= \frac{^{26}C_2}{^{52}C_2} + \frac{^{26}C_2}{^{52}C_2}$$

$$= \frac{\frac{26\times25}{2}}{\frac{52\times51}{2}} + \frac{\frac{26\times25}{2}}{\frac{52\times51}{2}}$$

$$= \frac{26\times25}{52\times51} + \frac{26\times25}{52\times51}$$

$$= 2\times\frac{26\times25}{52\times51}$$

$$= \frac{25}{51}$$

৬৯। প্যাকেটে মোট তাস = 52টি

রাজা = 4টি

$\therefore$ তাসটি রাজা হবার সম্ভাবনা $= \frac{^4C_1}{^{52}C_1}$

$$= \frac{4}{52}$$

৭০। প্যাকেটে মোট তাস = 52টি

টেক্কা তাস = 4টি

(i) পুনঃস্থাপন না করে প্রক্রিয়া তাস তিনটি নেয়া হলে যেহেতু দ্বিতীয় ও তৃতীয় তাস নেয়ার পূর্বে প্যাকেটে টেক্কা তাস ও মোট তাসের সংখ্যা একটি একটি করে কমতে থাকবে। সুতরাং এক্ষেত্রে তাস নেয়ার ঘটনাগুলি অধীন হবে।

অতএব নির্ণেয় সম্ভাবনা $= \frac{^4C_1}{^{52}C_1} \times \frac{^3C_1}{^{51}C_1} \times \frac{^2C_1}{^{50}C_1}$

$$= \frac{4\times3\times2}{52\times51\times50}$$

$$= \frac{1}{5525}$$

(ii) পুনঃস্থাপন প্রক্রিয়ায় তাস তিনটি নেয়া হলে যেহেতু দ্বিতীয় ও তৃতীয় তাস নেয়ার পূর্বে তাসগুলি প্যাকেটে ফেরৎ দেয়া হয়। সুতরাং প্যাকেটে টেক্কা তাস ও মোট তাসের সংখ্যা অপরিবর্তিত থাকবে। অতএব প্রতিবার তাস নেয়ার ঘটনাগুলি স্বাধীন হবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা $= \frac{^4C_1}{^{52}C_1} \times \frac{^4C_1}{^{52}C_1} \times \frac{^4C_1}{^{52}C_1}$

$$= \frac{4\times4\times4}{52\times52\times52}$$

$$= \frac{1}{2197}$$

৭১। পুনরাবৃত্তি না ঘটিয়ে দুই অংক বিশিষ্ট একটি করে সংখ্যা নেয়া হলে নমুনাক্ষেত্র হবে নিম্নরূপ ঃ

12, 13, 14, 15
21, 23, 24, 25
31, 32, 34, 35
41, 42, 43, 45
51, 52, 53, 54

মোট নমুনা বিন্দু = 20টি

(i) যুগ্ম× সংখ্যা আসার অনুকূল ফলাফল 12, 32, 42, 52, 14, 24, 34, 53 = 8টি

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা $= \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

(ii) 5 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা আসার অনুকূল ফলাফল 15, 25, 35, 45 = 4টি

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা $= \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

৭২। পাত্রে সাদা বল = 6টি

কালো বল = 9টি

মোট বল = 15টি

(i) পুনঃস্থাপন প্রক্রিয়ায় 4টি করে দুইবার বল নেয়া হলে দ্বিতীয় নির্বাচনে পূর্বে পাত্রে বল ফেরত দেয়ার ফলে পাত্রে ব সংখ্যা অপরিবর্তিত থাকবে। অর্থাৎ উত্তোলনদ্বয় পরস্পর স্বাধীন হবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা = P (১ম উত্তোলনে 4টি সাদা) × P (দ্বিতীয় উত্তোলনে 4টি কালো বল)

$= \frac{{}^{6}C_4}{{}^{15}C_4} \times \frac{{}^{9}C_4}{{}^{15}C_4}$

$= \frac{6}{5915}$

(ii) পুনঃস্থাপন ব্যতিরেখে 4টি করে দুইবার বল উঠানো হলে দ্বিতীয় উত্তোলনের পূর্বে বল 4টি পাত্রে ফেরত দেয়া হয় সুতরাং পাত্রে বলের সংখ্যা পরিবর্তীত হলে মোট বলে সংখ্যা হবে (15 – 4) = 11টি অর্থাৎ দ্বিতীয় উত্তোলন প্রথম উত্তোল উপর অধীন।

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাবনা = P (১ম উত্তোলনে 4টি সাদা) × P (দ্বিতীয় উত্তোলনে 4টি কালো বল)

$= \frac{{}^{6}C_4}{{}^{15}C_4} \times \frac{{}^{9}C_4}{{}^{15}C_4} = \frac{3}{715}$

৭৩। (i) যেহেতু $P(A \cap B) \neq 0$ সুতরাং A ও B দুটি অবর্জনশীল ঘটনা

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + P(B) - \frac{1}{3}$

$P(B) = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

$= \frac{5-3+2}{6}$

$= \frac{7-3}{6} = \frac{4}{6}$

$\therefore P(B) = \frac{2}{3}$

(ii) আমরা জানি = $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

$\frac{1}{2} + P(\overline{A}) = 1$

$\therefore P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(iii) A ও B স্বাধীন হলে $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{6}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{3}$

দেয়া আছে, $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$

সুতরাং A ও B স্বাধীন ঘটনা।

৭৪। প্যাকেটে মোট তাস 52 টি, হরতন 13 টি, ইস্কাবন 13 এবং রাজা 4 টি।

ধরি, ঘটনা A : { তাসটি হরতন}

ঘটনা B : { তাসটি ইস্কাবন}

ঘটনা C : { তাসটি রাজা}

(i) তাসটি হরতন হলে ইস্কাবন হতে পারবে না, সুতরাং ঘটনা A ও ঘটনা B পরস্পর বর্জনশীল। সুতরাং তাসটি হরতন বা ইস্কাবন হবার সম্ভাব্যতা।

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
$$= \frac{^{13}C_1}{^{52}C_1} + \frac{^{13}C_1}{^{52}C_1}$$
$$= \frac{13}{52} + \frac{13}{52} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

(ii) এখানে তাসটি হরতন হলে তা হরতনের রাজাও হতে পারে।

সুতরাং ঘটনা A ও B অবর্জনশীল।

অতএব $A \cap C$: {1 টি তাস} = 1

$P(A \cap C) = \frac{1}{52}$

সুতরাং তাসটি হরতন বা রাজা হবার সম্ভাব্যতা

৭৫। একটি প্যাকেট হতে ৫২টি তাসের মধ্যে কালো তাস ২৬টি তাহলে যেকোন একটি কালো হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{২৬}{৫২} = \frac{১}{২}$ (উত্তর)

৭৬। একটি ছক্কা একবার নিক্ষেপ করলে 6 আসার সম্ভবনা $= \frac{১}{৬}$ (উত্তর)

৭৭। একটি কয়েন 6 বার নিক্ষেপ করা হলে নমুনাক্ষেত্র হল 6 H
5H + 1T
4H + 2T
3H + 3T
24 + 4T
IH + 5T
6T

$\therefore$ 2 হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{1}{7}$

৭৮। এখানে, মোট ঘটনা $= 6 \times 6$
$= 36$

যোগফল 6 হওয়ার ঘটনা 1 + 5
2 + 4
3 + 3
4 + 2
5 + 1

$\therefore$ যোগফল 6 হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{5}{26}$

যেকোন সংখ্যা 2 হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{2}{36}$

অধ্যায়-৬

চিত্রলেখ
(Graphs)

৬.০ চিত্রলেখ (Graphs) ঃ

অনেক আধুনিক প্রয়োগ ক্ষেত্রেই গ্রাফ বা চিত্রলেখ একটি পুরাতন বিষয়। আঠার শতকে বিখ্যাত সুইস গণিতবিদ লিওনার্ড ইউলার (Leonhard Euler) সর্বপ্রথম এর ধারণা প্রবর্তন করেন। তিনি বিখ্যাত কিংসবার্গ ব্রিজ (Konigsberg bridge) এর সমস্যাবলি সমাধান কল্পে এই গ্রাফ ব্যবহার করেন।

গ্রাফ নানা ক্ষেত্রের সমস্যাবলি সমাধান কল্পে ব্যবহৃত হয় দৃষ্টান্তস্বরূপ, একটি আবর্তনি (Circuit) প্লেনার আবর্তনি বোর্ডে ব্যবহার করা যাবে কিনা তা নির্ধারণে গ্রাফ ব্যবহার করা হয়। দুটি রাসায়নিক যৌগের মধ্যে পার্থক্য নির্ধারণে যার একই আণবিক গঠন কিন্তু ভিন্ন গাঠনিক সংকেত, তা চিত্রলেখ প্রয়োগ করে বুঝানো হয়। কম্পিউটার নেটওয়ার্কে (Computer network) চিত্রলেখ ব্যবহারের দ্বারা দুটি কম্পিউটারের মধ্যে যোগাযোগ সংযুক্ত নির্ণীত হয়। দুটি শহরের মধ্যে সর্বনিম্ন দূরত্বের পথ শনাক্তকরণে চিত্রলেখ গুরুত্বপূর্ণ অবদান রাখে।

চিত্রলেখ (Graph) হল ডিসক্রীট স্ট্রাকচার, ভার্টিকস (Vertices) এবং বাহু (Edge) নিয়ে গঠিত যা ভার্টিকসগুলোকে সংযুক্ত করে।

৬.০.১ চিত্রলেখ এর প্রকারভেদ (Types of Graphs) ঃ

গ্রাফ বা চিত্রলেখকে প্রধানত ৫ ভাগে ভাগ করা যায়। যথা–

১। সরল গ্রাফ (Simple Graph)

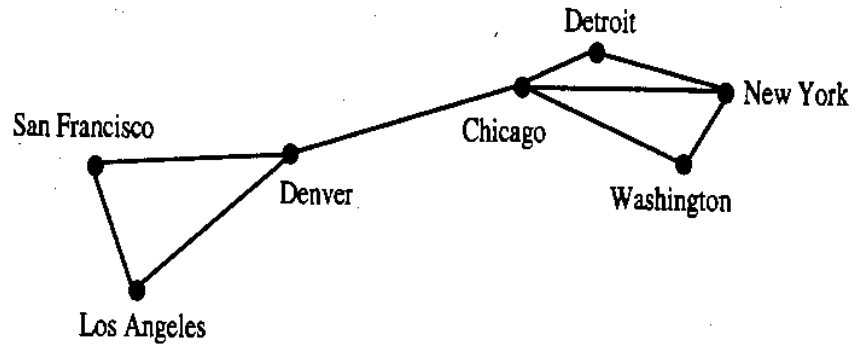
২। মাল্টিগ্রাফ (Multigraph)

৩। সিউডোগ্রাফ (Pseudograph)

৪। ডিরেকটেড গ্রাফ (Directed graph)

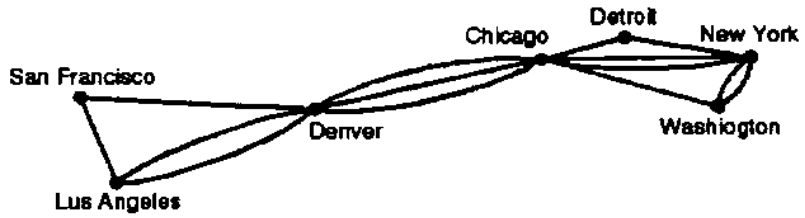
৫। ডিরেকটেড মাল্টিগ্রাফ (Directed Multigraph)।

সরল চিত্রলেখ (Simple Graph) ঃ একটি সরল চিত্রলেখ, G = (V, E), v নিয়ে গঠিত ভার্টিকস এর অশূন্য সেট এবং E, স্বতন্ত্র উপাদান V এর ক্রমহীন একটি সেট যাকে ধার (Edges) বলা হয়।



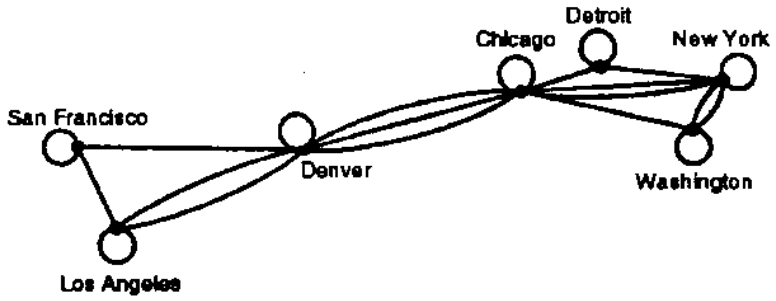
চিত্র ঃ ৬.১ সরল চিত্রলেখ

মাল্টিগ্রাফ (Multigraph) ঃ একটি মাল্টিগ্রাফ, G = (V, E), ভার্টিকস এর V সেট নিয়ে গঠিত ধার (Edges) E এর একটি সেট এবং E থেকে $\{\{u, v\} | u, v \in v, u \neq v\}$ একটি ফাংশন f। যদি $f(e_1) = f(e_2)$ হয় তবে ধার (edges) e_1 এবং e_2 কে মাল্টিপল অথবা প্যারালাল ধার (edges) বলা হয়।



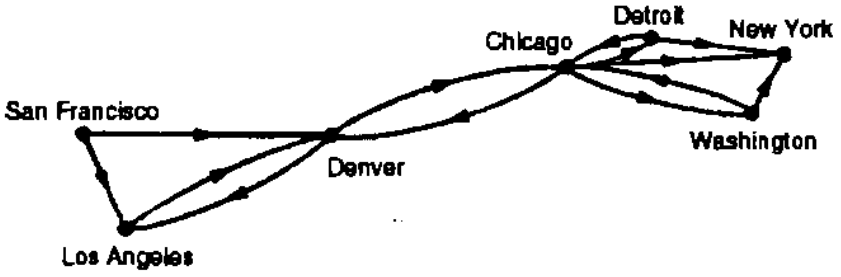
চিত্র ঃ ৬.২ মাল্টি গ্রাফ

সিউডোগ্রাফ (Pseudograph) ঃ একটি সিউডোগ্রাফ, G = (V, E) ভার্টিকস এর V সেট নিয়ে গঠিত, ধার (Edges) এর একটি সেট E, এবং E থেকে $\{\{u, v\} | u, v \in v\}$। যদি $f(e) = \{u, v\} = \{u\}$ একই $u \in v$ এর জন্য একটি ফাংশন f।



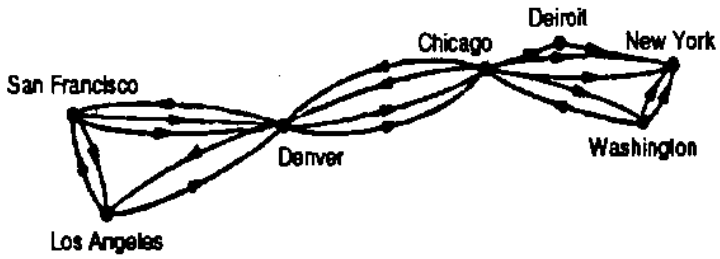
চিত্র ঃ ৬.৩ সিউডোগ্রাফ

ডিরেকটেড গ্রাফ (Directed Graph) ঃ একটি ডিরেকটেড গ্রাফ (V, E) ভার্টিকস V এর একটি সেট এবং ধার (Edges) E যা উপাদান V এর ক্রমজোড় নিয়ে গঠিত।



চিত্র ঃ ৬.৪ ডিরেকটেড গ্রাফ

ডিরেকটেড মাল্টিগ্রাফ (Directed Multigraph) ঃ একটি ডিরেকটেড মাল্টিগ্রাফ, G = (V, E) ভার্টিকস এর একটি সেট v, ধার (Edges) একটি সেট E এবং একটি ফাংশন f, E থেকে $\{(u, v) | u, v \in v\}$ পর্যন্ত। যদি $f(e_1) = f(e_2)$ হয় তবে e_1 এবং e_2 কে মাল্টিপল ধার (Edges) বলা হয়।



চিত্র ঃ ৬.৫ ডিরেকটেড মাল্টিগ্রাফ

৬.১ গ্রাফ ও মাল্টিগ্রাফ (Graph and Multigraph) ঃ

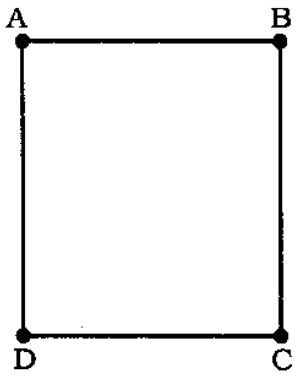
গ্রাফ (Graph) ঃ একটি গ্রাফ G এর নিম্নবর্ণিত দু'টি বিষয় থাকবে ঃ

১। একটি সেট V থাকবে। V সেটের উপাদান হবে নোড।

২। একটি সেট E থাকবে। E সেটের উপাদান হবে বাহু। বাহুকে e দ্বারা প্রকাশ করা হয়। e এর মান e = [u, v], যেখানে [u, v] একটি আনঅর্ডারড পেয়ার (unordered pairs)। এখানে u একটি নোড এবং v একটি নোড।

কখনও বা একটি গ্রাফ G = [V, E] দ্বারা প্রকাশ করা হয়। ধরা যাক e = [u, v] একটি বাহু। এখানে u এবং v বাহুটির প্রান্ত বিন্দু। এরূপ পাশাপাশি অবস্থিত কোন নোডকে পার্শ্ববর্তী নোড বা প্রতিবেশি নোড (Adjacent nodes or neighbours) বলে।

উদাহরণ-৬.১।



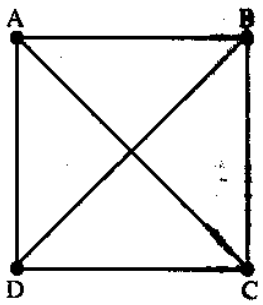
চিত্র ঃ ৬.৬

চিত্রে G একটি গ্রাফ। কেননা G এর মধ্যকার দু'টি নোডকে একটি সাধারণ রেখা দ্বারা যুক্ত করা হয়। অর্থাৎ এ গ্রাফের 4 টি নোড আছে ও 4 টি বাহু আছে। প্রত্যেকটি নোডই কোন না কোন বাহুর সাথে যুক্ত।

কোন গ্রাফকে একটি কমপ্লিট (Complete) গ্রাফ বলা হবে, যদি প্রত্যেকটি প্রতিবেশী নোড (Adjacent node) একটি অপরটির সাথে যুক্ত থাকে।

উদাহরণ-৬.২।

উপরের চিত্রে 4 টি নোড এবং 6 টি বাহু (Edge)। প্রত্যেকটি পার্শ্ববর্তী নোড পরস্পরের সাথে যুক্ত হয়েছে। এ চিত্রটি একটি কমপ্লিট (Complete) গ্রাফ। কোন কমপ্লিট গ্রাফে যদি n সংখ্যক নোড থাকে, তবে মোট বাহু (Edge) সংখ্যা হবে $\frac{n(n-1)}{2}$।



চিত্র ৬.৭

৬.৭ চিত্রের নোড 4টি। যেহেতু ৬.৭ চিত্রটি একটি কমপ্লিট গ্রাফ সেহেতু বাহু সংখ্যা না গুণে হিসেব করে বাহু সংখ্যা বের করা যাবে। অর্থাৎ ঐ গ্রাফের বাহু সংখ্যা হলো-

$$\frac{4(4-1)}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

উদাহরণ-৬.৩।

উপরের চিত্র একটি গ্রাফ G(V, E) যেখানে

(i) V ভার্টিকস বা নোড A, B, C D দ্বারা গঠিত।

(ii) E গঠিত হয় বাহু বা (edge) দাঁড়ায়। যার বাহু

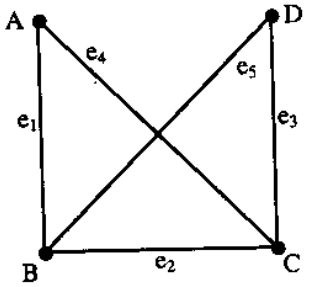
$e_1 = \{A, B\}$

$e_2 = \{B, C\}$

$e_3 = \{C, D\}$

$e_4 = \{A, C\}$

$e_5 = \{B, D\}$

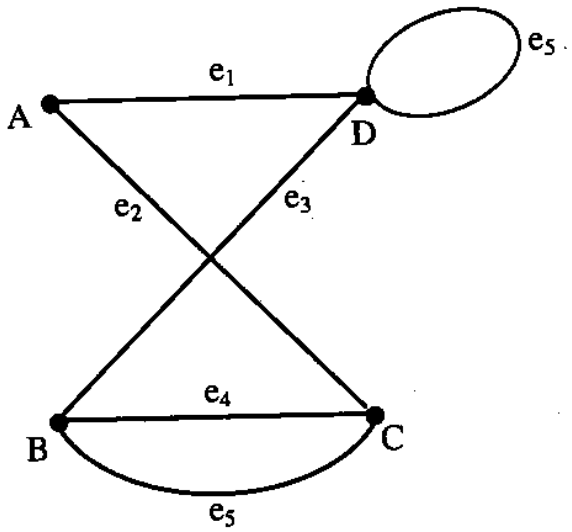


চিত্র ঃ ৬.৮

মাল্টি গ্রাফ (Multigraphs) ঃ

চিত্রে ৬.৯নং diagram টি বিবেচনা করি। বাহু e_4 এবং e_5 কে বলা হয় Multiple edges, যেহেতু তারা একই প্রান্তবিন্দুতে সংযুক্ত, এবং বাহু e_6 কে বলা হয় একটি Loop (লুপ), যেহেতু এর প্রান্তবিন্দুদ্বয় একই শীর্ষে (Vertices) সংযুক্ত। এরূপ diagram কে Multigraph (মাল্টিগ্রাফ) বলা হয়। প্রথাগতভাবে গ্রাফের সংজ্ঞা Multiple edges কিংবা loop এর ওপর নির্ভর করে।

আবার Mutiple edges অথবা loop ব্যতীত একটি গ্রাফকেও Multigraph হিসেবে সংজ্ঞায়িত করা যেতে পারে।



চিত্র ঃ ৬.৯

উপরের ৬.৯ নং চিত্রে একটি মাল্টি গ্রাফ দেখানো হয়েছে। এ গ্রাফে 4 টি নোড আছে। নোডগুলো A, B, C এবং D। এ গ্রাফে বাহু আছে 6 টি। বাহুগুলো হলো, $e_1 = [A,D]$, $e_2 = [A,C]$, $e_3 = [B, D]$, $e_4 = [B, C]$, $e_5 = [B, C]$ এবং $e_6 = [D, D]$

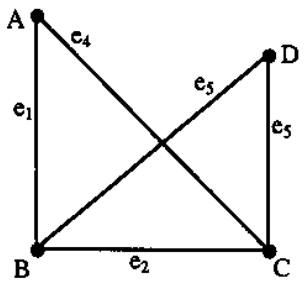
৬.২ ভার্টেক্স বা শীর্ষ মাত্রা (Degree of Vertex) ঃ

G গ্রাফে শীর্ষ বিন্দু V এর মাত্রাকে লেখা হয় deg (V), যা G এর বাহু (edges) গুলোর সংখ্যার সমান, যাহা V এর মধ্যে অন্তর্ভুক্ত। G এর শীর্ষগুলির মাত্রা গণনায় প্রত্যেক বাহুকে দুবার গণনা করা হয়েছে।

উপপাদ্য ঃ একটি গ্রাফ G এর ভার্টেক্সগুলোর (শীর্ষগুলির) স্তরের (মাত্রার) যোগফল, ঐ গ্রাফের বাহুগুলোর (edges) যোগফলের দ্বিগুণের সমান।

উদাহরণ-৬.৪ ।

চিত্রে লেখচিত্রটির মধ্যে আমরা পাই--



deg (A) = 2

deg (B) = 3

deg (C) = 3

deg (D) = 2

এখানে মাত্রাগুলির সমষ্টি $= 2 + 3 + 3 + 2 = 10$

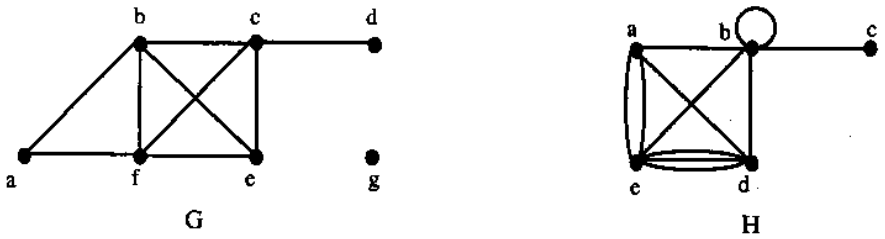
(এখানে বাহু 5 টি) যা বাহুগুলোর যোগফলের দ্বিগুণের সমান।

একটি ভার্টেক্সকে (শীর্ষ) জোড় বা বিজোড় বলা হবে যদি এর ডিগ্রির (মাত্রা) সংখ্যা জোড় বা বিজোড় হয়।

সুতরাং A এবং D হচ্ছে জোড় ভার্টেক্স (শীর্ষ) আর B এবং C হচ্ছে বিজোড় ভার্টেক্স (শীর্ষ)।

"এক ভার্টেক্সের (শীর্ষের) ডিগ্রি (মাত্রা) যদি শূন্য হয় তাকে আইসোলেটেড ভার্টেক্স (Isolated Vertex) বলে।"

উদাহরণ ৬.৫। চিত্র ৬.১০ এ প্রদর্শিত চিত্রলেখ G এবং H এর শীর্ষ মাত্রা কি?



চিত্র ঃ ৬.১০ শীর্ষ মাত্রা

সমাধান ঃ

G-এ শীর্ষমাত্রা

deg (a) = 2

deg (b) = deg (c = deg (*f*) = 4

deg (d) = 1

deg (e) = 3

এবং deg (g) = 0

H-এ, শীর্ষমাত্রা

deg (a) = 4

deg (b) = deg (e) = 6

deg (c) = 1

এবং deg (d) = 5

C ভার্টিক্সকে প্যানডেন্ট বলা হয় কারণ এর শীর্ষমাত্রা 1।

হ্যান্ড সেকিং নীতি (The Handshaking Theorem) ঃ

নীতি ঃ ১। ধরা যাক, G = (V, E) হল e ধার যুক্ত অনির্ণীত চিত্রলেখ।

তখন, $2e = \sum_{v \in V} \deg(v)$

উদাহরণ-৬.৬। 10 ভার্টিকস যুক্ত 6 মাত্রা বিশিষ্ট একটি চিত্রলেখ এর কতগুলো ধার (Edges) আছে তা বের কর।

সমাধান

শীর্ষমাত্রা $= 6 \times 10 = 60$

$\therefore$ হ্যান্ড সেকিং নীতি অনুসারে,

$2e = 60$

বা, $e = \frac{60}{2} = 30$

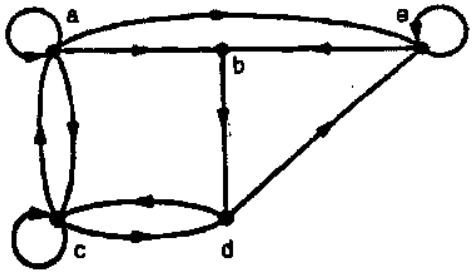
নীতি ঃ ২। "একটি অনির্ণীত চিত্রলেখ এর বেজোড় মাত্রায় জোড় সংখ্যক ভার্টিকস থাকে।

ধরা যাক, V_1 এবং V_2 যথাক্রমে জোড় মাত্রার ভার্টিকস এর সেট এবং বেজোড় মাত্রার ভার্টিকস এর সেট একটি অনির্ণীত চিত্রলেখ, $G = (V, E)$।

তখন, $2e = \sum_{v \in V} \deg(v), \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{J \in V_2} \deg(v)$

উদাহরণ-৬.৭।

চিত্র ৬.১১ এ প্রদর্শিত নির্দেশিত ধার (edges) যুক্ত চিত্রলেখ G এর প্রতি ভার্টিকস এর ইন-ডিগ্রি এবং আউট-ডিগ্রি নির্ণয় কর।



চিত্র ঃ ৬.১১ ডিরেকটেড গ্রাফ

সমাধান

G এ ইন-ডিগ্রি ঃ

$\deg^-(a) = 2$

$\deg^-(b) = 2$

$\deg^-(c) = 3$

$\deg^-(d) = 2$

$\deg^-(e) = 3$

এবং $\deg(f) = 0$

G-এ আউট-ডিগ্রি

$\deg^+(a) = 4$

$\deg^+(b) = 1$

$\deg^+(c) = 2$

$\deg^+(d) = 2$

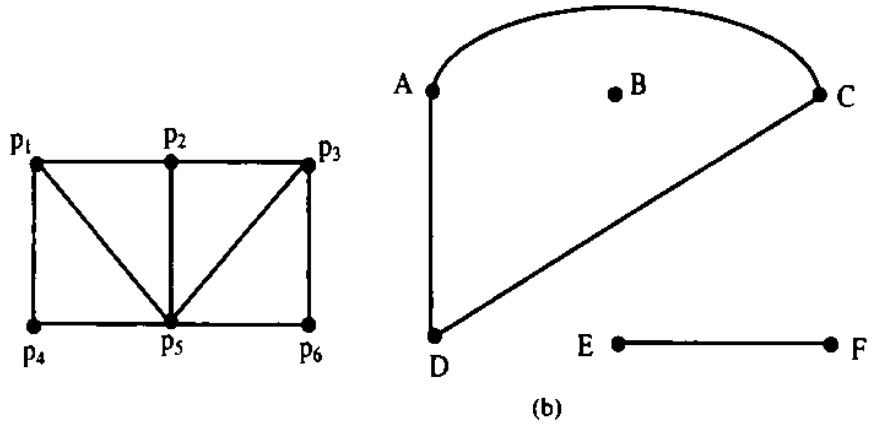
$\deg^+(e) = 3$

এবং $\deg^+(f) = 0$

৬.৩ কানেকটিভিটি (Connectivity) ঃ

একটি গ্রাফ G, সংযুক্ত বা কানেকটেড হয় যদি যে কোন এর দুটি ভার্টিকস এর মধ্যে একটি পাথ (Path) থাকে। (a) চিত্র ৬.১২ কানেকটেড চিত্রলেখ এবং চিত্র ৬.১২ (b) কানেকটেড নয় কারণ ভার্টিকস D এবং E এর মধ্যে কোন পাথ (Path) নেই।

একটি অনির্দেশিত চিত্রলেখকে কানেকটেড বলা হবে যদি গ্রাফের প্রতিজোড়া স্বতন্ত্র ভার্টিকস এর মধ্যে একটি পাথ থাকে।



চিত্র ঃ ৬.১২

ধরা যাক, G হল একটি গ্রাফ। G এর একটি উপ সাবগ্রাফ H-কে G এর কানেকটেড কম্পোনেন্ট বলা হবে যদি H, G এর অধিক বৃহৎ উপ সাবগ্রাফ ধারণ না করে। চিত্রলেখ G চিত্র নং ৬.১২ (b) তিনটি সংযুক্ত সাবগ্রাফ আছে। সাবগ্রাফ ভার্টিকস সেট {A, C, D}, {E, F} এবং {B} দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

চিত্র নং ৬.১২ (b)-এ ভার্টিকস B কে আইসোলেটেড ভার্টিকস বলা হয়, যেহেতু B এর কোন বাহু (edge) নাই অথবা অন্য কথায় deg (B) = 0।

অতএব B নিজেই চিত্রলেখ এ একটি কানেকটেড কম্পোনেন্ট গঠন করে।

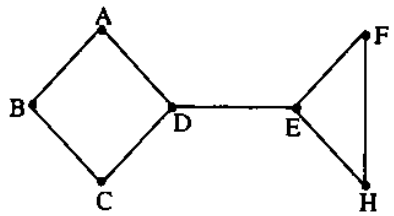
দূরত্ব এবং ব্যাস (Distance and Diameter) ঃ

ধরা যাক, G একটি কানেক্টেড গ্রাফ। u এবং v যথাক্রমে G এর দুটি ভার্টেক্স। u এবং v এর দূরত্ব (Distance) লেখা হয় d(u,v)। d(u,v) এর অর্থ হলো u এবং v এর মধ্যকার সবচেয়ে ছোট পথ (Path)।

G এর মধ্যকার দুটি ভার্টেক্সের (শীর্ষের) সবচেয়ে বেশি দূরত্ব বুঝাতে diam(G) লেখা হয়। একে ডায়ামিটার বা ব্যাস বলা হয়।

উদাহরণ-৬.৮।

নিচের গ্রাফটি মনোযোগ সহকারে লক্ষ করা যাক-

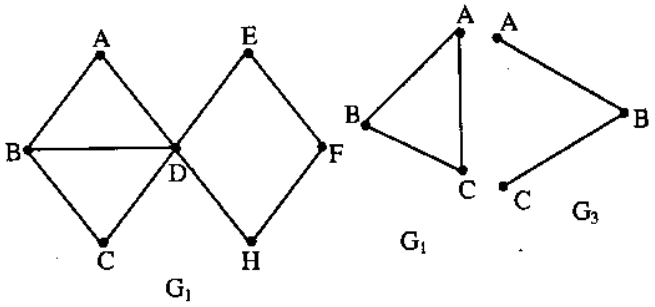


চিত্র ঃ ৬.১৩

উপরের গ্রাপ d (A,B) = 1, d(B, D)=2, d (B,E) = 3, d(B,F) = d (B, H) = 4, এখানে diam(G)=4। অর্থাৎ G গ্রাফের সর্বোচ্চ লম্বা পথ হলো 4, এটাই হচ্ছে G গ্রাফের ডায়ামিটার বা ব্যাস।

কাট পয়েন্ট (Cut point) ঃ মনে করি, G হল একটি Connected graph । যদি G গ্রাফের কোন ভার্টেক্স V কে বাদ দেয়া হয় এবং এতে যদি G গ্রাফ disconnected (বিচ্ছিন্ন) হয়ে দু'টি আলাদা গ্রাফে পরিণত হয়ে যায়, তবে V কে G গ্রাফের কাট পয়েন্ট (Cut point) বলে।

উদাহরণ-৬.৯।

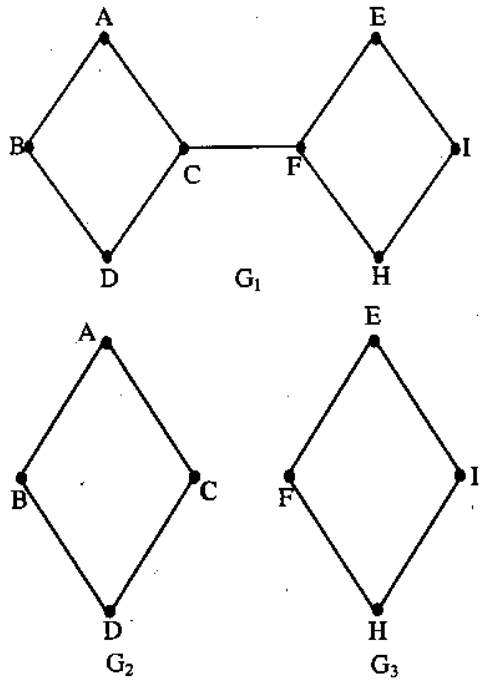


চিত্র ঃ ৬.১৪

উপরের চিত্রে G_1 একটি কানেক্টেড গ্রাফ। G_1 গ্রাফের ভার্টেক্স D কে যদি বাদ দেওয়া হয় কিংবা মুছে ফেলা হয়, তবে ভার্টেক্স D এর সাথে সংযুক্ত [A,D], [B,D], [C,D], [D,E], এবং [D,H] বাহুগুলোর কোন অস্তিত্ব থাকে না। অর্থাৎ G_1 গ্রাফ বিচ্ছিন্ন হয়ে G_2 এবং G_3 গ্রাফে পরিণত হয়। এই একটি পয়েন্টের জন্য একটি গ্রাফের বিভক্তির বৈশিষ্ট্যের কারণে, ভার্টেক্স D কে G_1 গ্রাফের কাট পয়েন্ট (Cut point) বলে।

ব্রীজ (Bridge) ঃ কোন গ্রাফ G । এ G গ্রাফের একটি বাহু e। যদি G গ্রাফ থেকে e বাহু বাদ দেয়া হয় বা মুছে ফেলা হয়, এবং যদি এতে G গ্রাফটি disconnected (বিচ্ছিন্ন) হয়ে দু'টি গ্রাফে পরিণত হয়ে যায়, তবে e বাহুকে G গ্রাফের ব্রীজ বলা হয়।

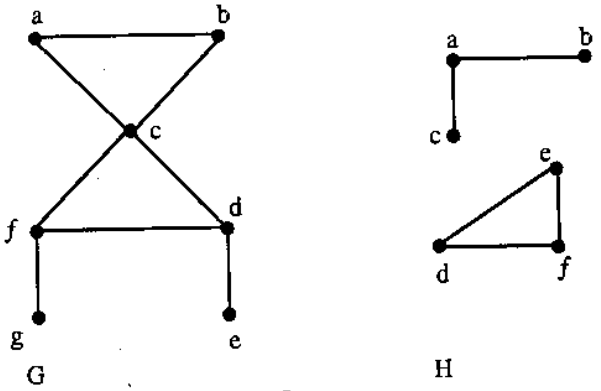
উদাহরণ-৬.১০। নিম্নের চিত্রে বর্ণিত গ্রাফগুলো মনোযোগ সহকারে দেখ।



চিত্র ঃ ৬.১৫

এখানে G_1 একটি গ্রাফ। এ গ্রাফ থেকে যখন [C, F] বাহুটি বাদ দেয়া হয় - বা মুছে ফেলা হয়, তখন G_1 গ্রাফটি দু'ভাগে বিভক্ত হয়ে যায়। বিভক্ত হওয়া গ্রাফ দু'টি হলো G_2 এবং G_3। এখানে [C,F] বাহুটি হলো G_1 গ্রাফের ব্রীজ।

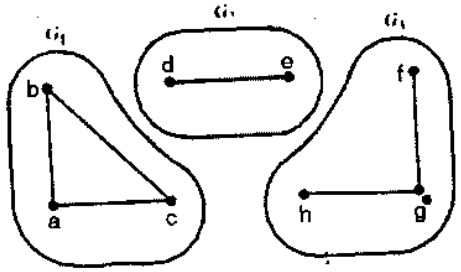
উদাহরণ-৬.১১। চিত্র নং ৬.১৬ এর চিত্র লেখ G এবং H এর মধ্যে কোনটি কানেকটেড চিত্রলেখ?



চিত্র ঃ ৬.১৬ চিত্রলেখ G এবং H

সমাধান চিত্র নং ৬.১৬ এর G চিত্রলেখ এ প্রতি জোড়া স্বতন্ত্র ভার্টিকস এ একটি পাথ আছে। কিন্তু চিত্রলেখ H এ a এবং d এর মধ্যে কোন সংযোগকারী পাথ নেই। সুতরাং G চিত্র লেখটি কানেকটেড গ্রাফ আর H কানেকটেড গ্রাফ নয়।

উদাহরণ-৬.১২। চিত্র নং ৬.১৭ এ প্রদর্শিত চিত্রলেখ G এ সংযোগকারী কম্পোনেন্ট কী?



চিত্র ঃ ৬.১৭ চিত্র লেখ G

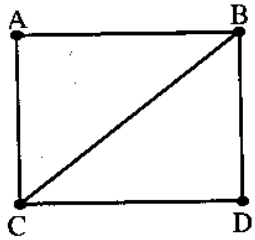
সমাধান চিত্রলেখ G হল তিনটি বিযুক্ত সংযোগকারী উপচিত্রলেখ G_1, G_2 এবং G_3 ইউনিয়ন (Union) । এই তিনটি উপ চিত্রলেখ হল G এর কানেকটেড কম্পোনেন্টস।

৬.৪ ফাইনাইট গ্রাফ এবং ট্রিভিঅ্যাল গ্রাফ (Finite Graph and Trivial Graph) ঃ

ফাইনাইট গ্রাফ (Finite Graph) ঃ

যদি কোন মাল্টিগ্রাফের সসীম (finite) সংখ্যক শীর্ষবিন্দু (Vertices) থাকে এবং সে মাল্টিগ্রাফের সসীম সংখ্যক বাহু (edges) থাকে, তবে সে মাল্টিগ্রাফকে ফাইনাইট (সসীম) গ্রাফ বলে।

উদাহরণ-৬.১৩।



চিত্র ঃ ৬.১৮

উক্ত গ্রাফে A, B, C, D এ চারটি শীর্ষবিন্দু (Vertices)। অর্থাৎ এখানে শীর্ষবিন্দুর (vertices) সংখ্যা সসীম (finite)। এ গ্রাফে মোট বাহু (edges) সংখ্যা 5টি যা সসীম। এ গ্রাফটিকে যদি মাল্টিগ্রাফে পরিণত করা হয়, তবে তার বাহু সংখ্যা আরো অনেক বাড়ানো যাবে।

অতএব, একটি মাল্টিগ্রাফ finite (সসীম) হতে হলে, একদিকে সে গ্রাফের শীর্ষবিন্দুর (Vertices) সংখ্যা সসীম (Finite) হতে হবে, অপরদিকে তার বাহুর সংখ্যাও অসীম হতে হয়।

ট্রিভিঅ্যাল গ্রাফ (Travial Graph) ঃ যদি কোন ফাইনাইট গ্রাফে কেবলমাত্র একটি শীর্ষবিন্দু (Ventex) থাকে এবং কোন বাহু (edge) থাকে না। সে গ্রাফকে ট্রিভিঅ্যাল (Travial Graph) গ্রাফ বলে। অর্থাৎ একটি ট্রিভিঅ্যাল গ্রাফ হলো একটি বিন্দু (Single point)।

উদাহরণ-৬.১৩ ঃ

A°

চিত্র ঃ ৬.১৯

উপরের চিত্রে বর্ণিত গ্রাফে, একটি মাত্র শীর্ষবিন্দু A আছে। সুতরাং অন্য শীর্ষবিন্দু ছাড়া একটি গ্রাফের কোন বাহু আঁকা যায় না। অতএব A শীর্ষবিন্দু দ্বারা যে গ্রাফ G তৈরি হয়, তাকে বলা হয় ট্রিভিঅ্যাল গ্রাফ।

৬.৫ সাব গ্রাফ, আইসোমরফিক এবং হোমোমরফিক গ্রাফ (Subgraph, Isomorphic graph and Homeomorphic graph) ঃ

সাব গ্রাফ (Sub graph) ঃ

ধরা যাক, একটি গ্রাফ G_1, যার ভার্টেক্স এর সেট V_1 এবং বাহুর সেট E_1। অপর একটি গ্রাফ G_2, যার ভার্টেক্স এর সেট V_2 এবং বাহুর (edge) সেট E_2। $G_2 = (V_2, E_2)$ কে $G_1 = (V_1, E_1)$ এর সাবগ্রাফ (Sub graph) বলা হবে যদি G_2 এর ভার্টেক্সগুলো G_1-এর ভার্টেক্সগুলোর মধ্যে থাকে এবং G_2 এর বাহুগুলো G_1 এর বাহুগুলোর মধ্যে থাকে।

অর্থাৎ G_{12} গ্রাফ, G_1 গ্রাফের সাবগ্রাফ হবে, যদি $V_2 \leq V_1$ এবং $E_2 = E_1$ হয়।

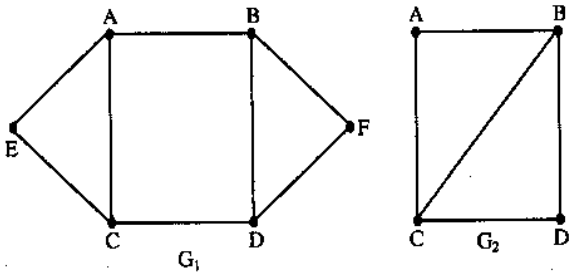
নির্দিষ্টভাবে ঃ

(i) $G_1 (V_1, E_1)$ এর একটি সাব গ্রাফ $G_2 (V_2, E_2)$, এর ভার্টিক্স V_2 দ্বারা প্রভাবিত করে যদি এর বাহু সেট (edge set) E_2, G_1 এর সকল বাহু ধারণ করে, যার প্রান্তবিন্দু ভার্টিক্স G_2 এর মধ্যে থাকে।

(ii) যদি G_1 এর মধ্যে একটি ভার্টিক্স v হয়, তখন G_1 এর সাবগ্রাফ হবে G_1-v যা পাওয়া যাবে G_1 হতে v কে মুছিয়ে ফেলার দাঁড়ায় এবং G_1 এর মধ্যে সকল বাহুকে মুছে ফেলতে হবে যা v ধারণ করে।

(iii) যদি G_1 এর মধ্যে একটি বাহু e হয়, তখন G_1 এর সাবগ্রাফ হবে G_1-e যা পাওয়া যাবে G_1 হতে e বাহুকে মুছে ফেলার দাঁড়ায়।

উদাহরণ-৬.১৪।



চিত্র ঃ ৬.১৯

উপরের চিত্রে G_1 একটি গ্রাফ এবং G_2 আরেকটি গ্রাফ, এখানে G_2 গ্রাফে যে সকল ভার্টেক্স (Vertex) আছে, এর সকল ভার্টেক্স G_1 গ্রাফে আছে। আবার G_2 গ্রাফে যে সকল বাহু আছে, তার সকল বাহু G_1 গ্রাফে আছে।

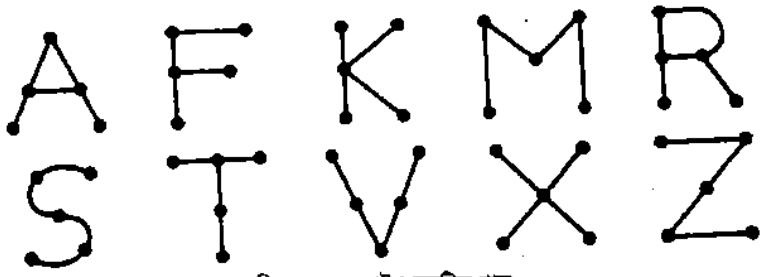
অতএব এখানে G_2 গ্রাফটি G_1 গ্রাফের সাবগ্রাফ (Subgraph)।

আইসোমরফিক গ্রাফ (Isomorphic Graph) ঃ

গ্রাফ $G_1 (V_1, E_1)$ এবং গ্রাফ $G_2(V_2, E_2)$ কে আইসোমরফিক বলা হবে যদি সেখানে একটি অনুরূপ One-to-One (এক-প্রতি-এক) $f : V_1 \rightarrow V_2$ ফাংশন বিদ্যমান থাকে। অর্থাৎ যদি $\{U, V\}$ বাহু, G_1 গ্রাফের একটি বাহু হয় এবং কেবলমাত্র যদি $\{f(U), f(V)\}$ বাহু, G_2 গ্রাফের একটি বাহু হয়। তবে G_1 এবং G_2 কে আইসোমরফিক গ্রাফ বলা হবে।

সাধারণত আমরা আইসোমরফিক (Isomorplhic) গ্রাফের মধ্যকার পার্থক্য করতে পারি না।

আমাদের জানা আছে A আর R হল আই সোমরফিক গ্রাফ কিন্তু অনুরূপ F এবং T, K এবং X এবং M. S. V এবং Z হল আইসোমরফিক গ্রাফ।

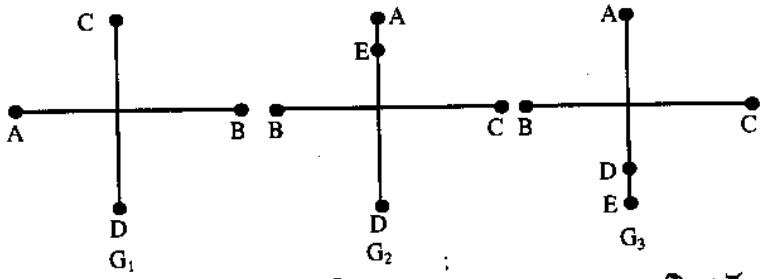


চিত্র ঃ ৬.২০ আইসোসেট্রিক গ্রাফ

হোমোমরফিক গ্রাফ (Homomorphic graphs) ঃ

যে কোন গ্রাফ G দেওয়া আছে; অতিরিক্ত ভার্টিক্স যুক্ত G এর একটি বাহুকে ভাগ করে আমরা একটি নতুন গ্রাফ পেতে পারি। দুটি গ্রাফ G_1 এবং G_2 কে হোমোমরফিক (Homomorphic) বলা হবে যদি তারা একই গ্রাফ থেকে পাওয়া যায়। অথবা আইসোমরফিক গ্রাফ (Isomorphic graph) দ্বারা এই পদ্ধতিতে পাওয়া যায়।

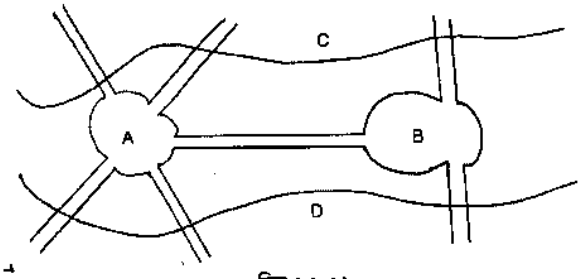
উদাহরণ-৬.১৫।



উপরের বর্ণিত চিত্রে G_1, G_2 ও G_3 নামের ৩টি গ্রাফ আঁকা হয়েছে। G_1 গ্রাফের সাথে একটি ভার্টেক্স সংযুক্ত করে G_2 এবং G_3 গ্রাফ তৈরি করা যায়। এখানে G_2 এবং G_3 পরস্পর হোমোমরফিক গ্রাফ।

কনিগ্‌সবার্গ এর ব্রীজ (Bridge of Konigsberg) ঃ

অষ্টাদশে শতাব্দীতে কনিগ্‌সবার্গ শহরের মধ্যে একটি নদী ছিল। সে নদীর দুই পাড়েই শহর গড়ে উঠেছে। সে নদী'র মধ্যে পাশাপাশি দু'টি ছোট দ্বীপ ছিল। শহরের রাজা মহাশয় দু'পাড়ের শহর এবং দ্বীপ দু'টিকে সংযোগ করার নির্দেশ দিলেন। রাজার নির্দেশমতে ব্রীজ দেওয়া হল। ব্রীজগুলোর চিত্র দেখানো হল–



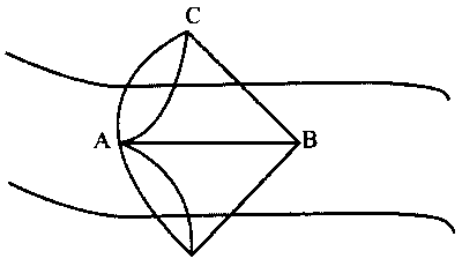
চিত্র ঃ ৬.২১

মোট 7 টি ব্রীজ দিয়ে শহর এবং দ্বীপের মধ্যে সংযোগ দেয়া হলো। উপরের চিত্রে C এবং D হলো মূল শহর, A এবং B হলো দ্বীপ। রাজা হাঁটাহাঁটি করতে গিয়ে, এক সময় তার মাথায় এলো যে, কোন ব্রীজের উপর দিয়ে দু'বার না গিয়ে পায়ে হেঁটে 7টি ব্রীজ পার হওয়া যায় কিনা। তিনি চেষ্টা করে ব্যর্থ হলেন।

কনিগ্‌সবার্গের জনৈক ব্যক্তি, সুইস গণিতজ্ঞ লিওনার্দ অয়লার (Leonard Euler) এর কাছে পত্র লেখেন। অয়লার ১৭৩৬ সনে প্রমাণ করেন যে, বর্ণিত শর্ত অনুসরণ করে 7টি ব্রীজ পরিভ্রমণ করা সম্ভব নয়। ব্রীজের সমস্যার সমাধান হবে না, তা গ্রাফ থিয়োরীর সাহায্যে প্রমাণ করেন।

অয়লারের ব্রীজ মডেল (Euler's Model of Bridge) ঃ

অয়লার ব্রীজের মডেল অনুসরণ করে, নিম্নরূপ মাল্টিগ্রাফ আঁকা হল-

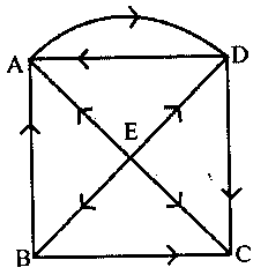


চিত্র ঃ ৬.২২

অয়লারের উপপাদ্য ঃ গবেষণা করে অয়লার প্রমাণ করেছেন যে, কোন মাল্টিগ্রাফ যদি দু'টির চেয়ে বেশি বেজোড় ভার্টেক্স (স্তর বা ডিগ্রী) থাকে, তবে সে মাল্টিগ্রাফ আড়াআড়ি (Traversal) হবে না। কর্নিগস্‌বার্গের ব্রীজের মডেলে ও দু'টির বেশি বেজোড় ভার্টেক্স আছে।

উদাহরণ-৬.১৬।

উপরের গ্রাফে → চিহ্ন দিয়ে দেখানো হয়েছে যে, গ্রাফের পথ কোন দিকে গিয়েছে। প্রথমে ভার্টেক্স B থেকে যাত্রা শুরু।



চিত্র ঃ ৬.২৩

অর্থাৎ

$B \to A \to E \to B \to C \to E \to D \to A$

তারপর আবার

$E \to D \to A \to D \to C$। অর্থাৎ কোন বাহু দিয়ে কখন ও দু'বার ভ্রমণ করা সম্ভবনীয়। অতএব, উপরের গ্রাফটি অয়লারের Traversal (আড়াআড়ি) শুরু এবং শেষ একই ভার্টেক্স হয়।

অনুশীলনী-৬

▸▸ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি ঃ

১। কে সর্বপ্রথম চিত্রলেখ (Graph) এর সম্পর্কে ধারণা প্রবর্তন করেন?

২। কত শতকে লিওনার্ড ইউলার চিত্রলেখ (Graph) সম্পর্কে ধারণা প্রবর্তন করেন?

৩। চিত্রলেখ (Graph) সর্বপ্রথম কোন ক্ষেত্রে ব্যবহার করা হয়?

৪। চিত্রলেখ (Graph) কী কী নিয়ে গঠিত হয়? [বাকাশিবো-২০১১]

৫। চিত্রলেখ (Graph) প্রধানত কত প্রকার?

৬। Adjacend Nodes কাকে বলে?

৭। Complete গ্রাফ কাকে বলে? [বাকাশিবো- ২০০৯R, ০৯]

৮। Complete গ্রাফ এর বাহুর সংখ্যা বের করার সূত্রটি লিখ।

৯। Isolated Vertex কাকে বলে?

১০। প্যানডেন্ট বলতে কী বুঝায়?

১১। Distance Diameter কাকে বলে? [বাকাশিবো-২০০৮, ১৩]

১২। Travial Grap বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো- ২০১০R]

১৩। "ডিরেক্টেড গ্রাফ বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো- ২০০৭, ০৯]

১৪। Loop (লুপ) বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০০৭, ১২]

▸▸ সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি ঃ

১৫। চিত্রলেখ (Graph) বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০১২, ২০১৪R]

১৬। উদাহরণসহ গ্রাফের বৈশিষ্ট্যসমূহ লেখ। [বাকাশিবো-২০০৪]

১৭। চিত্রলেখ (Graph) এর দুটি প্রয়োগক্ষেত্র দেখাও।

১৮। চিত্রলেখ (Graph) প্রধানত কত প্রকার ও কী কী?

১৯। চিত্রলেখ (Graph) কী কী বিষয় নিয়ে গঠিত?

২০। শীর্ষমাত্রা (Degree of vertex) কী? [বাকাশিবো-২০০৩, ০৩R, ০৫, ১০, ১১, ১১R, ১৩, ২০১৪R]

২১। কানেকটিভিটি বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০০২, ০৭, ০৯R, ০৯, ১৩]

২২। মাল্টি গ্রাফ বলতে কী বুঝা? চিত্রের সাহায্যে বুঝিয়ে লিখ। [বাকাশিবো-২০০২, ০৪, ০৫, ০৬, ০৯, ১১, ১৩R]

২৩। গ্রাফ ও মাল্টি গ্রাফের মধ্যে পার্থক্য লিখ। [বাকাশিবো - ২০০৩, ০৭, ২৩]

২৪। Graph (গ্রাফ) এর ক্ষেত্রে Cut points এবং Bridge কাকে বলে? [বাকাশিবো-২০০৫, ০৯R, ১০R, ১০, ১১]

২৫। Complete Graph কাকে বলে?

২৬। ট্রি গ্রাফ কাকে বলে?

২৭। ওয়েটেড গ্রাফ কাকে বলে?

২৮। Distance এবং Diameter কী? [বাকাশিবো-২০০৮]

২৯। Graph (গ্রাফ) এর আইসোমরফিক (Isomorphic) বলতে কী বুঝ? [বাকাশিবো-২০০২]

৩০। Isomorphic এবং Homeomorphic graph এর মধ্যকার পার্থক্য লিখ। [বাকাশিবো-২০০৫, ১০R]

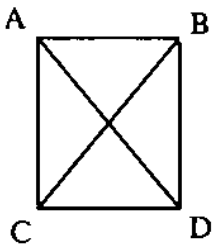
৩১। Subgraph কাকে বলে? [বাকাশিবো-২০১১R]

৩২। Isolated Vertex কাকে বলে?

৩৩। ফাইনাইট গ্রাফ বলতে কী বুঝায় উদাহরণসহ সংক্ষিপ্ত বর্ণনা কর।

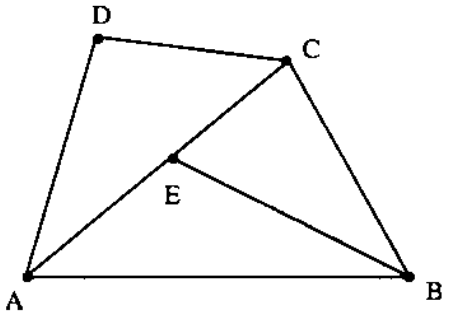
৩৪। Isomorphic গ্রাফ চিত্রসহ বর্ণনা কর? [বাকাশিবো-২০০৭, ০৮]

৩৫। নিচের চিত্র হতে প্রমাণ কর Edge সংখ্যা = 2x বাহুর সংখ্যা। [বাকাশিবো-২০১১R]

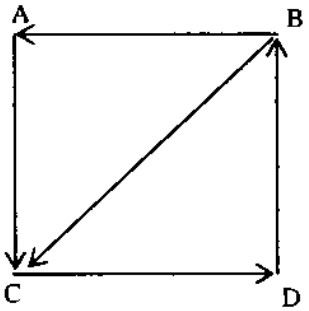


৩৬। নিচের চিত্রে গ্রাফটির সকল লোডের Degree of Vertex নির্ণয় কর। দেখাও যে, বাহু সংখ্যা = sum of Degree of vertex/2

[বাকাশিবো-২০০৯]

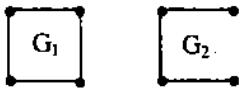


৩৭। [বাকাশিবো-২০১৩]



চিত্রে প্রদর্শিত ধারযুক্ত চিত্রের প্রতি ভার্টেক্স এর Degree of Vertex নির্ণয় কর।

৩৮। নিচের চিত্রের G_1 গ্রাফটি G_2 গ্রাফের সাব গ্রাফ কিনা যুক্তি দাও। [বাকাশিবো-২০০৯]



▶▶ রচনামূলক প্রশ্নাবলি ঃ

৩৯। চিত্রলেখ (Graph) সম্পর্কে বিস্তারিত বর্ণনা দাও।

৪০। উদাহরণসহ degree of Vertex এর বর্ণনা কর। [বাকাশিবো-২০০২, ০৮]

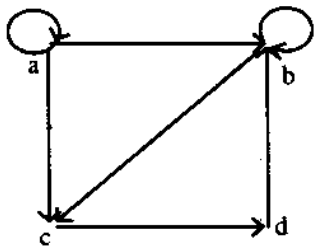
৪১। কানেকটিভিটি বলতে কী বুঝায়? ব্যাখ্যা কর।

৪২। ফাইনাইট চিত্র লেখ ও ট্রিভিঅ্যাল চিত্রলেখ সম্পর্কে যা জান লিখ।

৪৩। Homomorphic graph কী? উদাহরণসহ বর্ণনা কর। [বাকাশিবো-২০০৩, ২০০৪]

৪৪। নিচে প্রদর্শিত ধার (edges) যুক্ত চিত্র লেখ G এ প্রতি ভার্টিক্স এর শীর্ষমাত্রা (degree of Vertex) নির্ণয় কর।

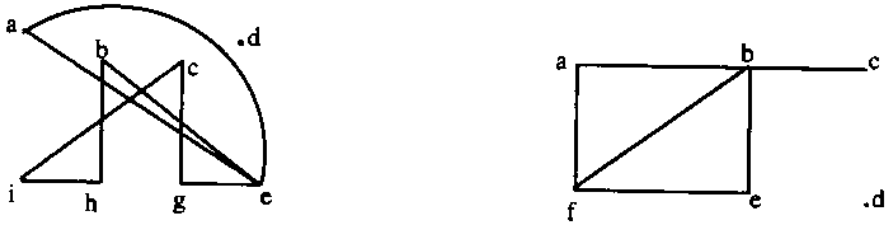
[বাকাশিবো-২০০৬, ০৫, ১২]



৪৫। সাবগ্রাফ আইসোমরফিক এবং হোমোমরফিক গ্রাফ সম্পর্কে যা জান লিখ।

▶▶ সমস্যাবলি ঃ

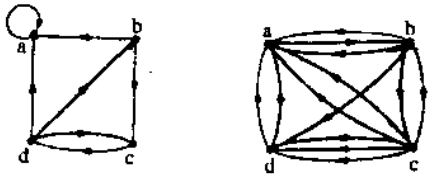
১। চিত্র নং ৬.২৪ এর 1 এবং 2 এ প্রদর্শিত চিত্রলেখ এর ভার্টিকস সংখ্যার ধার বা পার্শ্ব সংখ্যা এবং প্রতিটির শীর্ষমাত্রা নির্ণয় কর।



চিত্র ঃ ৬.২৪ চিত্রলেখ

২। প্রতি 5 মাত্রা বিশিষ্ট 15 ভার্টিকস পূর্ণ সরল চিত্রলেখ হতে পারে কী?

৩। চিত্র নং ৬.২৫ এ প্রদর্শিত চিত্রলেখ এর শীর্ষ সংখ্যা এবং ধার নির্ণয় কর এবং প্রদত্ত নির্দেশিত মাল্টিগ্রাফ এর জন্য প্রতি ভার্টিকস এর ইন-ডিগ্রি (In degree) এবং আউট-ডিগ্রি (Out degree) নির্ধারণ কর।



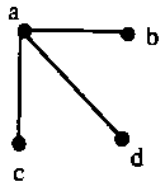
চিত্র ঃ ৬.২৫ মাল্টিগ্রাফ

৪। নিচের চিত্রলেখ সমূহের কতটি ভার্টিকস এবং কতটি ধার (Edges) আছে?
(a) K_n (b) C_n (c) W_n (d) K_{mn} (e) Q_n

৫। নিম্নলিখিত মাত্রা বিশিষ্ট 5 ভার্টিকস দিয়ে সরল চিত্রলেখ গঠন করা যাবে? যদি যায় তবে এরূপ চিত্রলেখ অংকন কর।

৬। কমপক্ষে একটি ভার্টিকস K_3 এর কতটি উপ চিত্রলেখ হবে?

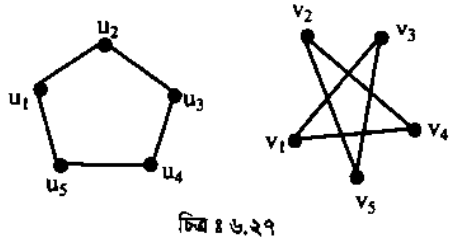
৭। নিচের চিত্রলেখ থেকে গঠিত সকল উপচিত্রলেখ আঁক?



চিত্র ঃ ৬.২৬

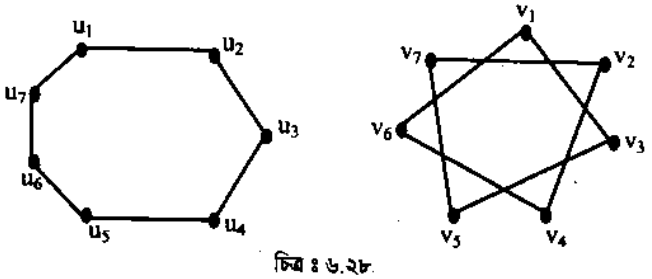
নিচের প্রদত্ত (৮ - ১১) জোড় গ্রাফগুলো আইসোমরফিক কিনা? উল্লেখ কর।

৮।



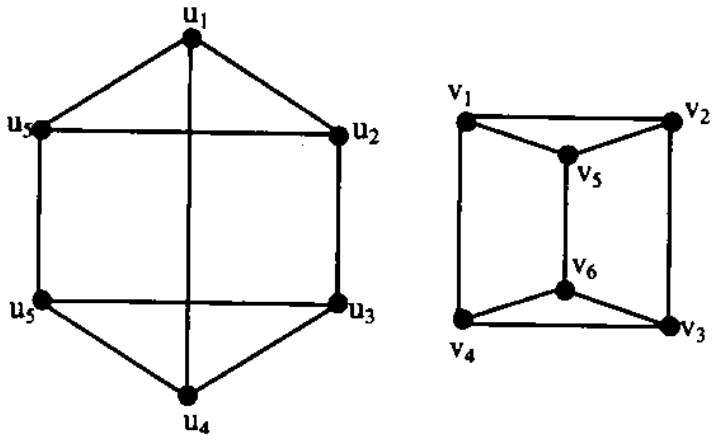
চিত্র ঃ ৬.২৭

৯।



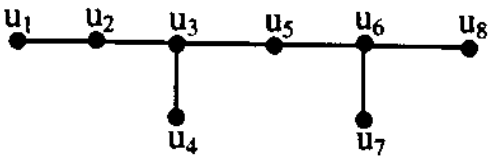
চিত্র ঃ ৬.২৮

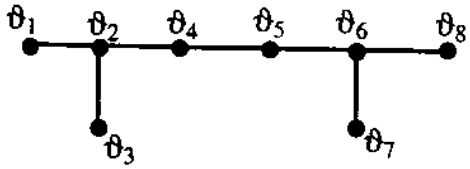
১০।



চিত্র ঃ ৬.২৯

১১।

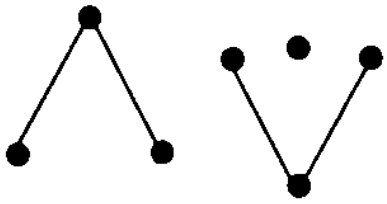




চিত্র ঃ ৬.৩০

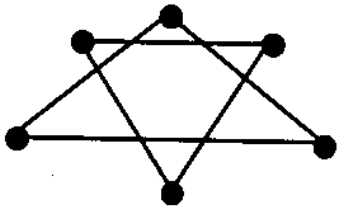
নিচের প্রশ্নমালা (১২-১৩) এর চিত্রলেখদ্বয় কানেকটেড কী?

১২।



চিত্র ঃ ৬.৩১

১৩।



চিত্র ঃ ৬.৩২

অনুশীলনী-৬ এর সমাধান

▸▸ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

১। লিওনার্ড ইউলার সর্বপ্রথম চিত্রলেখ সম্পর্কে ধারণা প্রবর্তন করেন।

২। ১৮ শতকে লিওনার্ড ইউলার চিত্রলেখ সম্পর্কে ধারণা প্রবর্তন করেন।

৩। বিখ্যাত কিংসবার্গ ব্রিজ এর সমস্যাবলি সমাধান কল্পে চিত্রলেখ প্রবর্তন করেন।

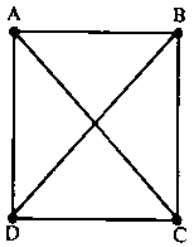
৪। চিত্রলেখ ভার্টিকস এবং এজ (Verter and edge) নিয়ে গঠিত।

৫। চিত্রলেখ প্রধানত ৫ প্রকার।

৬। মনে করি, G = [V, E] একটি গ্রাফ e = [u, v] একটি বাহু। এখানে u এবং v বাহুটির প্রান্তবিন্দু। এরূপ পাশাপাশি অবস্থিত কোন নোডকে পার্শ্ববর্তী নোড বা প্রতিবেশি নোড (Adjacent nodes or Neighbors) বলে।

৭। চিত্রে G একটি গ্রাফ। G এর মধ্যকার দু'টি নোডকে একটি সাধারণ রেখা দ্বারা যুক্ত করা হয়। অর্থাৎ এ গ্রাফের 4টি নোড আছে ও 4টি বাহু আছে। প্রত্যেকটি নোডই কোন না কোন বাহুর সাথে যুক্ত।

সুতরাং কোন গ্রাফকে একটি কমপ্লিট (Complete) গ্রাফ বলা হবে। যদি প্রত্যেকটি প্রতিবেশি নোড (Adjacent node) একটি অপরটির সাথে যুক্ত থাকে।



চিত্র ঃ ১.১

৮। একটি কমপ্লিট (Complete) গ্রাফে যদি n সংখ্যক নোড থাকে, তবে মোট বাহু সংখ্যা হবে $= \frac{n(n-1)}{2}$

৯। এক ভার্টেক্সের (শীর্ষের) ডিগ্রি (মাত্রা) যদি শূন্য হয় তাকে আইসোলেটেড ভার্টেক্স (Isolated Vertex) বলে।

১০। একটি ভার্ট্রেক্সকে প্যানডেন্ট বলা হবে যদি ভার্ট্রেক্সের শীর্ষমাত্রা 1 হয়।

১১। ধরা যাক, G একটি কানেক্টেড গ্রাফ। u এবং v যথাক্রমে G এর দু'টি ভার্ট্রেক্স। u এবং v এর দূরত্ব (Distance) লেখা হয় d(u,v)। d(u,v)। এর অর্থ হলো u v এর মধ্যকার সবচেয়ে ছোট পথ।

G এর মধ্যকার দু'টি ভার্ট্রেক্সের (শীর্ষের) সবচেয়ে বেশি দূরত্ব বুঝাতে diam(G) লেখা হয়। একে ডায়ামিটার বা ব্যাস বলা হয়।

১২। যদি কোন ফাইনাইট গ্রাফে কেবলমাত্র একটি শীর্ষবিন্দু (Vertex) থাকে এবং কোন বাহু (edge) থাকে না। সে গ্রাফকে ট্রিভিয়্যাল গ্রাফ (Travial Graph) বলে। অর্থাৎ একটি ট্রিভিঅ্যাল গ্রাফ হলো একটি বিন্দু (Single point)

১৩। একটি ডিরেকটেড গ্রাফ (V. E) ভার্টিকস V এর একটি সেট এবং ধার (Edges) E যা উপাদান V এর ক্রমজোড় নিয়ে গঠিত।

১৪। কোন বাহু যদি, যে নোড থেকে মুরু হয় আবার সে নোডে শেষ হয় তবে সে বাহুকে লুপ (loop) বলে।

▸▸ সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

১৫। চিত্রলেখ হল ডিসক্রীট স্ট্রাকচার। ভার্টিকস এবং এজ নিয়ে গঠিত যা ভার্টিকসগুলোকে সংযুক্ত করে।

১৬। গ্রাফের বৈশিষ্ট্যসমূহ নিম্নরূপ ঃ

অনেক আধুনিক প্রয়োগ ক্ষেত্রেই গ্রাফ বা চিত্রলেখ একটি পুরাতন বিষয়। আঠার শতকে বিখ্যাত সুইস গণিতবিদ লিওনার্ড ইউলার (Leonhard Euler) সর্বপ্রথম এর ধারণা প্রবর্তন করেন। তিনি বিখ্যাত কিংসবার্গ ব্রিজ (Konigsberg bridge) এর সমস্যাবলি সমাধান কল্পে এই গ্রাফ ব্যবহার করেন।

গ্রাফ নানা ক্ষেত্রের সমস্যাবলি সমাধান কল্পে ব্যবহৃত হয় দৃষ্টান্তস্বরূপ, একটি আবর্তনি (Circuit) প্লেনার আবর্তনি বোর্ডে ব্যবহার করা যাবে কিনা তা নির্ধারণে গ্রাফ ব্যবহার করা হয়। দুটি রাসায়নিক যৌগের মধ্যে পার্থক্য নির্ধারণে যার একই আণবিক গঠন কিন্তু ভিন্ন গাঠনিক সংকেত, তা চিত্রলেখ প্রয়োগ করে বুঝানো হয়। কম্পিউটার নেটওয়ার্কে (Computer network) চিত্রলেখ ব্যবহারের দ্বারা দুটি কম্পিউটারের মধ্যে যোগাযোগ সংযুক্ত নির্ণীত হয়। দুটি শহরের মধ্যে সর্বনিম্ন দূরত্বের পথ শনাক্তকরণে চিত্রলেখ গুরুত্বপূর্ণ অবদান রাখে।

চিত্রলেখ (Graph) হল ডিসক্রীট স্ট্রাকচার, ভার্টিকস (Vertices) এবং বাহু (Edge) নিয়ে গঠিত যা ভার্টিকসগুলোকে সংযুক্ত করে।

১৭। ১। একটি আবর্তনি সরল আবর্তনি বোর্ডে ব্যবহার করা যাবে কী না।

২। দুটি রাসায়নিক যৌগ যার আণবিক সংকেত একই কিন্তু গাঠনিক সংকেত ভিন্ন পার্থক্য নির্ধারণে।

১৮। চিত্রলেখ প্রধানত পাঁচ প্রকার। যথা ঃ

১। সরল চিত্রলেখ (Simple Graph)

২। বহুমুখী চিত্রলেখ (Multi Graph)

৩। সিউডো চিত্রলেখ (Pseudo Graph)

৪। ডিরেকটেড চিত্রলেখ (Directed Graph)

৫। ডিরেকটেড বহুমুখী চিত্রলেখ (Directed Multi Graph)

১৯। চিত্রলেখ দুটি বিষয় নিয়ে গঠিত। যথা–

১। একটি সেট, V = V (G) যার উপাদানগুলোকে ভার্টিকস, পয়েন্ট অথবা G এর নোড বলে।

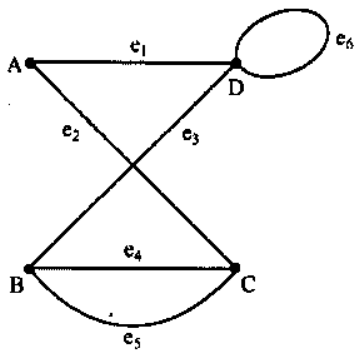
২। একটি সেট, E = E(G), স্বতন্ত্র ভার্টিকস এর ক্রমহীন জোড় থাকে G এর ধার (Edge) বলা হয়।

২০। একটি গ্রাফ G-এ শীর্ষমাত্রা v (লেখা হয় deg (v)) হল G এর মধ্যকার ধার (Edge) সংখ্যার সমান যা v ধারণ করে অর্থাৎ যা v তে পতিত হয়।

২১। একটি গ্রাফ G, সংযুক্ত যা কানেকটেড হয় যদি যে কোন দুটি ভার্টিকস্ এর মধ্যে একটি পাথ থাকে।

অর্থাৎ, একটি অনির্দেশিত চিত্রলেখকে কানেকটেড বলা হবে যদি গ্রাফের প্রতি জোড়া স্বতন্ত্র ভার্টিকস এর মধ্যে একটি পথে থাকে।

২২।



চিত্র ঃ ১.২

উপরের diagram টি বিবেচনা করি।

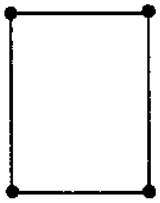
বাহু e_4 এবং e_4 কে বলা হয় multiple edges যেহেতু তারা একই প্রান্তবিন্দুতে সংযুক্ত এবং e_6 বাহুকে বলা হয় একটি loop (লুপ), যেহেতু এর প্রান্ত বিন্দুদ্বয় একই শীর্ষে (Vertices) সংযুক্ত। এইরূপ diagram-কে multigraph (মাল্টিগ্রাফ) বলা হয়। প্রথাগতভাবে গ্রাফের সংজ্ঞা multiple eges কিংবা loop এর উপর নির্ভর করে।

২৩। **গ্রাফ (Graph) ঃ** একটি গ্রাফ G এর নিম্নবর্ণিত দু'টি বিষয় থাকবে ঃ

১। একটি সেট V থাকবে। V সেটের উপাদান হবে নোড।

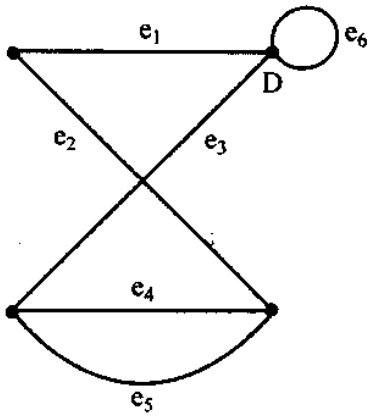
২। একটি সেট E থাকবে। E সেটের উপাদান হবে বাহু। বাহুকে e দ্বারা প্রকাশ করা হয়। e এর মান e = [u, v], যেখানে [u, v] একটি আনঅর্ডারড পেয়ার। যেখানে u একটি নোড এবং v একটি নোড।

চিত্রে G একটি গ্রাফ। কেননা G এর মধ্যকার দু'টিকে একটি সাধারণ রেখা দ্বারা যুক্ত করা হয়।



চিত্র ঃ ১.৩

মাল্টিগ্রাফ (Multigraph) ঃ Multiple edges কিংবা loop বিশিষ্ট গ্রাফকে multigraph বলে।



চিত্র ঃ ১.৪

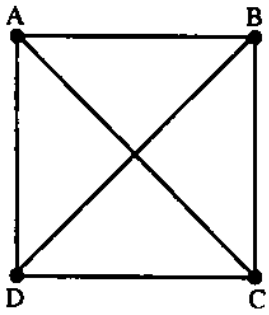
উপরিউক্ত graphটি বিবেচনা করি। বাহু বা edge e_4 এবং e_5 কে বলা হয় multiple edge, যেহেতু তারা একই প্রান্তবিন্দুতে সংযুক্ত এবং বাহু e_6 কে বলা হয় লুপ loop, যেহেতু এর প্রান্ত বিন্দুদ্বয় একই শীর্ষে (vertices) সংযুক্ত। এরূপ diagram কে multigraph বলা হয়।

উপরিউক্ত গ্রাফে 4টি নোড আছে। নোডগুলো A, B, C, D। এ গ্রাফে বাহু আছে 6টি। বাহুগুলো হলো e_1 = [A, D] ,e_2 = [A, C], e_3 = [B, D], e_4 = [B, C], e_5 = [B, C], e_6 = [D, D]

২৪। **কাট পয়েন্ট (Cut point) ঃ** মনে করি, G হল একটি connected graph। যদি G গ্রাফের কোন V ভার্টেক্সে V কে বাদ দেয়া হয় এবং এতে যদি G গ্রাফ disconnected (বিচ্ছিন্ন) হয়ে দু'টি আলাদা গ্রাফে পরিণত হয়ে যায়, তবে V কে G গ্রাফের একটি কাট পয়েন্ট (Cut point) বলে।

ব্রীজ (Bridge) ঃ কোন গ্রাফ G। এ G গ্রাফের একটি বাহু e। যদি G গ্রাফ থেকে e বাহু বাদ দেয়া হয় বা মুছে ফেলা হয় এবং যদি এতে G গ্রাফটি disconnected (বিচ্ছিন্ন) হয়ে দু'টি গ্রাফে পরিণত হয়ে যায়, তবে e বাহুকে G গ্রাফের ব্রীজ বলা হয়।

২৫। কোন গ্রাফকে একটি কমপ্লিট (complete) গ্রাফ বলা হবে, যদি প্রত্যেকটি প্রতিবেশী নোড (Adjectent node) একটি অপরটির সাথে যুক্ত থাকে।



চিত্র ঃ ১.৫

উপরের চিত্রে 4টি নোড এবং 6টি বাহু (Edge) আছে। প্রত্যেকটি পার্শ্ববর্তী নোড পরস্পরের সাথে যুক্ত হয়েছে। এ চিত্রকে একটি কমপ্লিট (Complete) গ্রাফ বলে। কোন কমপ্লিট গ্রাফে যদি n সংখ্যক নোড থাকে, হবে মোট বাহু (Edge) সংখ্যা হবে $= \frac{n(n-1)}{2}$।

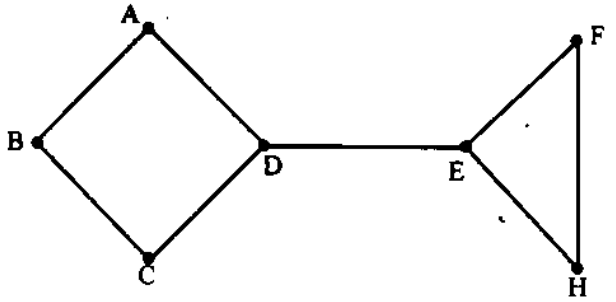
২৬। কোন গ্রাফের ভার্টেক্স সংখ্যার চেয়ে বাহুর সংখ্যা হয় এবং যদি একটা ভার্টেক্স থেকে অন্য কোন ভার্টেক্সে কবলমাত্র একটি পথে যাওয়া যায়, তবে সে গ্রাফকে ট্রি (Tree) Graph বলে।

২৭। সাধারণত গ্রাফের বাহুগুলোর ওয়েট 1 একক। যদি কোন গ্রাফের বাহুগুলোর ওয়েট নির্দিষ্ট করে দেয়া হয় তবে সে গ্রাফকে ওয়েটেড গ্রাফ বলে।

২৮। ধরা যাক, G একটি কানেক্টেড গ্রাফ। u এবং v যথাক্রমে G এর দুটি ভার্টেক্স। u এবং v এর দূরত্ব (Distance) লেখা হয় d(u,v)। d(u,v) এর অর্থ হলো u এবং v এর মধ্যকার সবচেয়ে ছোট পথ (path)।

G এর মধ্যকার দুটি ভার্টেক্সের (শীর্ষের) সবচেয়ে বেশি দূরত্ব বুঝাতে diam (G) লেখা হয়। একে ডায়ামিটার বা ব্যাস বলা হয়।

উদাহরণ ঃ



চিত্র ঃ ১.৬

উপরের চিত্রে d(A, B) = 1, d(B, D) = 2, d(B, E) = 3, d(B, F) = d(B H) = 4

এখানে diam (G) = 4 অর্থাৎ G গ্রাফের সর্বোচ্চ লম্বা পথ হলো 4। এটাই হচ্ছে G গ্রাফের ডায়ামিটার বা ব্যাস।

২৯। গ্রাফ $G_1(V_1, E_1)$ এবং গ্রাফ $G_2(V_2, E_2)$ কে আইসোমরফিক বলা হবে যদি সেখানে একটি অনুরূপ one-to-one (এক প্রতি এক) $f: v_1 - v_2$ ফাংশন বিদ্যমান থাকে। অর্থাৎ যদি {u, v} বাহু, G_1 গ্রাফের একটি বাহু হয় এবং কেবলমাত্র যদি $\{f(u), f(v)\}$ বাহু, G_2 গ্রাফের একটি বাহু হয়। তবে G_1 এবং G_2 কে আইসোমরফিক গ্রাফ বলা হবে।

৩০। **আইসোমরফিক গ্রাফ ঃ** গ্রাফ $G_1(V_1, E_1)$ এবং গ্রাফ $G_2(V_2, E_2)$ কে আইসোমরফিক (Isomorphic Graph) বলা হবে যদি সেখানে একটি অনুরূপ one-to-one (এক-প্রতি-এক) $f: V_1 \varnothing V_2$ ফাংশন বিদ্যমান থাকে। অর্থাৎ যদি {u, v} বাহু, G_1 গ্রাফের একটি বাহু হয় এবং কেবলমাত্র যদি $\{f(u), f(v)\}$ বাহু G_2 গ্রাফের একটি বাহু হয়, তবে G_1 এবং G_2 কে আইসোমরফিক গ্রাফ বলা হবে।

হোমোমরফিক গ্রাফ ঃ যে কোন গ্রাফ G দেওয়া আছে; অতিরিক্ত ভার্টিক্স যুক্ত G এর একটি বাহুকে ভাগ করে আমরা একটি নতুন গ্রাফ পেতে পারি। দুইটি গ্রাফ G_1 এবং G_2 কে হোমোমরফিক (Home omorplhic) গ্রাফ বলা হবে যদি তারা একই গ্রাফ থেকে পাওয়া যায়। অথবা আইসোমরফিক গ্রাফ (Isomorplhic graph) দ্বারা এই পদ্ধতিতে পাওয়া যায়।

৩১। **সাব গ্রাফ ঃ** ধরা যাক, একটি গ্রাফ G_1, যার ভার্টেক্স এর সেট V_1 এবং বাহুর সেট E_1। অপর একটি গ্রাফ G_2, যার ভার্টেক্স এর সেট V_2 এবং বাহুর (edge) সেট E_2। $G_2 = (V_2, E_2)$ কে $G_1 = (V_1, E_1)$ এর সাবগ্রাফ (sub graph) বলা হবে যদি G এর ভার্টেক্সগুলো G_1 এর ভার্টেক্সগুলোর মধ্যে থাকে এবং G_2 এর বাহুগুলো G_1 এর বাহুগুলোর মধ্যে থাকে।

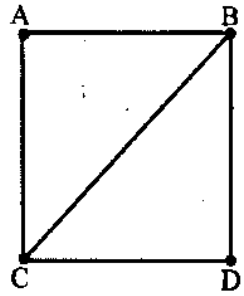
অর্থাৎ G_2 গ্রাফ, G_1 গ্রাফের সাব গ্রাফ হবে, যদি $V_2 \leq V_1$ এবং $E_2 \leq E_1$ হয়।

৩২। একটি ভার্টেক্সের ডিগ্রি যদি শূন্য হয় ঐ ভার্টেক্সকে Isolated Vertex বলে।

৩৩। **ফাইনাইট গ্রাফ (Finite Graph) ঃ**

যদি কোন মাল্টিগ্রাফের সসীম (finite) সংখ্যক শীর্ষবিন্দু (‘ ‘ices) থাকে এবং সে মাল্টিগ্রাফের সসীম সংখ্যক বাহু (edges থাকে, তবে সে মাল্টিগ্রাফকে ফাইনাইট (সসীম) গ্রাফ বলে

উদাহরণ ঃ



চিত্র ঃ ১.৭

উক্ত গ্রাফে A, B, C, D এ চারটি শীর্ষবিন্দু (Vertices)। অর্থাৎ এখানে শীর্ষবিন্দুর (vertices) সংখ্যা সসীম (finite)। এ গ্রাফে মোট বাহু (edges) সংখ্যা 5টি যা সসীম। এ গ্রাফটিকে যদি মাল্টিগ্রাফে পরিণত করা হয়, তবে তার বাহু সংখ্যা আরো অনেক বাড়ানো যাবে।

অতএব, একটি মাল্টিগ্রাফ finite (সসীম) হতে হলে, একদিকে সে গ্রাফের শীর্ষবিন্দুর (Vertices) সংখ্যা সসীম (Finite) হতে হবে। অপারদিকে তার বাহুর সংখ্যাও অসীম হতে হয়।

ট্রিভিঅ্যাল গ্রাফ (Travial Graph) ঃ যদি কোন ফাইনাইট গ্রাফে কেবলমাত্র একটি শীর্ষবিন্দু (Ventex) থাকে এবং কোন বাহু (edge) না থাকে । সে গ্রাফকে ট্রিভিঅ্যাল (Travial Graph) গ্রাফ বলে। অর্থাৎ একটি ট্রিভিঅ্যাল গ্রাফ হলো একটি বিন্দু (Single point)।

উদহারণ ঃ

A°

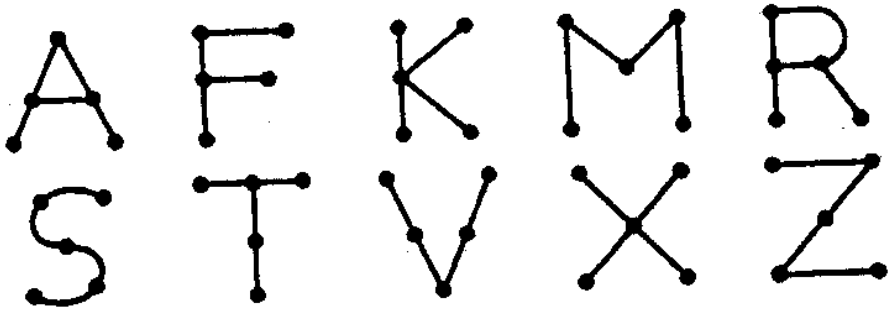
উপরের চিত্রে বর্ণিত গ্রাফে, একটি মাত্র শীর্ষবিন্দু A আছে। সুতরাং অন্য শীর্ষবিন্দু ছাড়া একটি গ্রাফের কোন বাহু আঁকা যায় না। অতএব A শীর্ষবিন্দু দ্বারা যে গ্রাফ G তৈরি হয়, তাকে বলা হয় ট্রিভিঅ্যাল গ্রাফ।

৩৪। আইসোমরফিক গ্রাফ (Isomorphic Graph) ঃ

গ্রাফ $G_1 (V_1, E_1)$ এবং গ্রাফ $G_2(V_2, E_2)$ কে আইসোমরফিক বলা হবে যদি সেখানে একটি অনুরূপ One-to-One (এক-প্রতি-এক) $f : V_1 \rightarrow V_2$ ফাংশন বিদ্যমান থাকে। অর্থাৎ যদি {U, V} বাহু, G_1 গ্রাফের একটি বাহু হয় এবং কেবলমাত্র যদি $\{f(U), f(V)\}$ বাহু, G_2 গ্রাফের একটি বাহু হয়। তবে G_1 এবং G_2 কে আইসোমরফিক গ্রাফ বলা হবে।

সাধারণত আমরা আইসোমরফিক (Isomorplhic) গ্রাফের মধ্যকার পার্থক্য করতে পারি না।

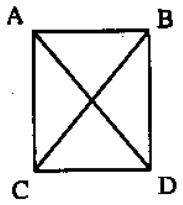
আমাদের জানা আছে A আর R হল আই সোমরফিক গ্রাফ কিন্তু অনুরূপ F এবং T, K এবং X এবং M, S, V এবং Z হল আইসোমরফিক গ্রাফ।



চিত্র ঃ ৬.২০ আইসোসেট্রিক গ্রাফ

৩৫। চিত্র হতে দেখা যায়

Edge (A) = 3
Edge (B) = 3
Edge (C) = 3
Edge (D) = 3



Total Edge = 12

বাহুর সংখ্যা = (AB, AD, AC, BC এবং CD) = 6 টি

∴ Edge সংখ্যা = $12 = 2 \times 6 = 2x$ বাহুর সংখ্যা **(প্রমাণিত)**

৩৬। উপরের চিত্র থেকে পাই,

Deg (A) = 3
Deg (B) = 3
Deg (C) = 3
Deg (D) = 2
Deg (E) = 3

বাহু সংখ্যা = (AB, AE, AD, BE, BC, CD, CE) = 7 টি

∴ বাহুর সংখ্যা = $\frac{14}{2} = 7$

$= \frac{\text{sum of degree of vertex}}{2}$

৩৭। গ্রাফের In-degree গুলো ঃ

$\deg^-(A) = 1$
$\deg^-(B) = 1$
$\deg^-(C) = 2$
$\deg^-(D) = 2$

গ্রাফের Out-degree গুলো ঃ

$\deg^+(A) = 1$
$\deg^+(B) = 2$
$\deg^+(C) = 1$
$\deg^+(D) = 2$

৩৮। G_1 গ্রাফটি G_2 গ্রাফের সাব গ্রাফ নয়। কারণ G_1 এবং G_2 এর শীর্ষ সমান এবং G_1 এর বাহু 4টি কিন্তু G_2 এর বাহু 3টি। সুতরাং G_1, G_2 এর সাব গ্রাফ হতে পারেনা।

▶▶ রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ঃ

৩৯। অনেক আধুনিক প্রয়োগ ক্ষেত্রেই গ্রাফ বা চিত্রলেখ একটি পুরাতন বিষয়। আঠার শতকে বিখ্যাত সুইস গণিতবিদ লিওনার্ড ইউলার (Leonhard Euler) সর্বপ্রথম এর ধারণা প্রবর্তন করেন। তিনি বিখ্যাত কিংসবার্গ ব্রিজ (Konigsberg bridge) এর সমস্যাবলি সমাধান কল্পে এই গ্রাফ ব্যবহার করেন। চিত্রলেখ নানা ক্ষেত্রের সমস্যাবলি সমাধান কল্পে ব্যবহৃত হয় দৃষ্টান্ত স্বরূপ, একটি আবর্তনি (Circuit) প্লেনার আবর্তনি বোর্ডে ব্যবহার করা যাবে কিনা তা নির্ধারণে গ্রাফ ব্যবহার করা হয়। দুটি রাসায়নিক যৌগের মধ্যে পার্থক্য নির্ধারণে যার একই আণবিক গঠন কিন্তু ভিন্ন গাঠনিক সংকেত, চিত্রলেখ প্রয়োগ করা হয়। কম্পিউটার নেটওয়ার্কে (Computer network) চিত্রলেখ ব্যবহারের দ্বারা দুটি কম্পিউটারের মধ্যে যোগাযোগ সংযুক্ত নির্ণীত হয়। দুটি শহরের মধ্যে সর্বনিম্ন দূরত্বের পথ শনাক্তকরণে চিত্রলেখ গুরুত্বপূর্ণ অবদান রাখে। এছাড়াও নানাবিধ সমস্যা সমাধান কল্পে চিত্রলেখ ব্যবহার করা হয়।

চিত্রলেখ (Graph) হল ডিসক্রীট স্ট্রাকচার, ভার্টিকস (Vertices) এবং বাহু (Edge) নিয়ে গঠিত যা ভার্টিকসগুলোকে সংযুক্ত করে।

৪০। G গ্রাফে শীর্ষবিন্দু V এর মাত্রাকে লেখা হয় deg(v), যা G এর বাহু (edges) গুলোর সংখ্যার সমান। যাহা V এর মধ্যে অন্তর্ভুক্ত। G এর শীর্ষগুলির মাত্রা গণনায় প্রত্যেক বাহুকে দুইবার গণনা করা হয়েছে।

উপপাদ্য ঃ একটি গ্রাফ G এর ভার্টেক্সগুলোর (শীর্ষগুলির) স্তরের (মাত্রার) যোগফল, ঐ গ্রাফের বাহুগুলোর (edges) যোগফলের দ্বিগুণের সমান।

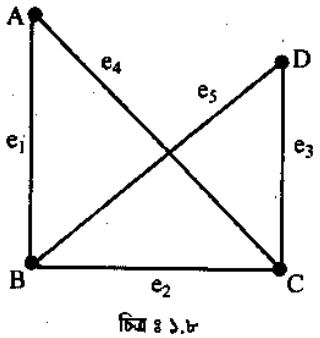
উদাহরণ ঃ

চিত্র লেখচিত্রটির মধ্যে আমরা পাই,

$\deg(A) = 2$
$\deg(B) = 3$
$\deg(C) = 3$
$\deg(D) = 2$

এখানে মাত্রাগুলির সমষ্টি $= 2 + 3 + 3 + 2 = 10$

এখানে বাহু 5টি যাহা বাহুগুলোর যোগফলের দ্বিগুণের সমান।



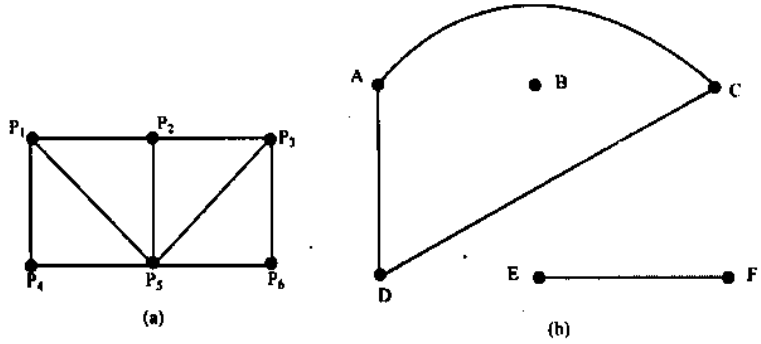
চিত্র ঃ ১.৮

একটি ভার্টেক্সকে (শীর্ষ) জোড় বা বিজোড় বলা হবে, যদি এর ডিগ্রির (মাত্রা) সংখ্যা জোড় বা বিজোড় হয়।

এখানে A এবং D হচ্ছে জোড় ভার্টেক্স (শীর্ষ) আর B এবং C হচ্ছে বিজোড় ভার্টেক্স (শীর্ষ)

"এক ভার্টেক্সের (শীর্ষের) ডিগ্রি (মাত্রা) যদি শূন্য হয় তাকে আইসোলেটেড ভার্টেক্স (Isolated Vertex) বলে।"

৪১। একটি গ্রাফ G, সংযুক্ত বা কানেকটেড হয় যদি যে কোন এর দুটি ভার্টিকস এর মধ্যে একটি পাথ (Path) থাকে। (a) চিত্র ৬.৭ কানেকটেড চিত্রলেখ এবং চিত্র ৬.৭ (b) কানেকটেড নয় কারণ ভার্টিকস D এবং E এর মধ্যে কোন পাথ (Path) নেই। একটি অনির্দেশিত চিত্রলেখকে কানেকটেড বলা হবে যদি গ্রাফের প্রতিজোড়া স্বতন্ত্র ভার্টিকস এর মধ্যে একটি পাথ থাকে।



চিত্র ঃ ১.৯

ধরা যাক, G হল একটি পাথ। G এর একটি উপ চিত্রলেখ H-কে G এর কানেকটেড কম্পোনেন্ট বলা হবে যদি H, G এর অধিক বৃহৎ উপ চিত্রলেখ ধারণ না করে। চিত্র নং ৬.৭ (b) তিনটি সংযুক্ত কম্পোনেন্টস আছে, উপ চিত্রলেখ ভার্টিকস সেট {A, C, D}, {E, F} এবং {B} দ্বারা প্রভাবিত হয়।

চিত্র নং ৬.৭ (b)-এ ভার্টিকস B কে আইসোলেটেড ভার্টিকস বলা হয়, যেহেতু B কোন ধার (edge) বিশিষ্ট নয় অথবা অন্য কথায় deg (B) = 0।

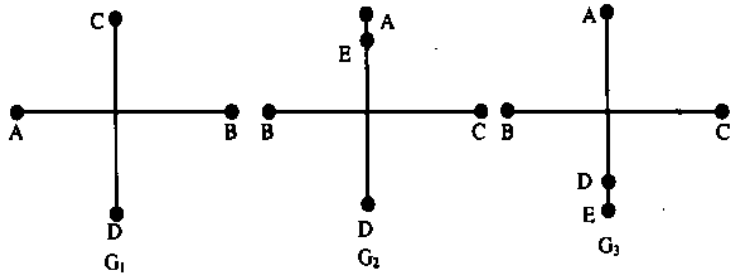
অতএব B নিজেই চিত্রলেখ এ একটি কানেকটেড কম্পোনেন্ট গঠন করে।

৪২। একটি মাল্টিপল গ্রাফ (Multiple graph) কে ফাইনাইট (Finite) বলা হবে যদি এর সসীম সংখ্যক শীর্ষদেশ এবং সসীম সংখ্যক ধার (Edges) থাকে। লক্ষ্যণীয় যে, সসীম সংখ্যক শীর্ষদেশ (vertices) বিশিষ্ট চিত্রলেখ এর আপনাআপনিই সসীম সংখ্যক ধার (Edges) থাকে এবং অবশ্যই সসীম হবে।

একটি শীর্ষ এবং একটি ধার (Edges) অর্থাৎ একটি এক বিন্দু (Single Point) বিশিষ্ট সসীম চিত্রলেখ কে ট্রিভিঅ্যাল চিত্রলেখ (Trivial Graph) বলা হয়।

৪৩। যে কোন গ্রাফ G দেওয়া আছে, অতিরিক্ত ভার্টেক্সযুক্ত G এর একটি বাহুকে ভাগ করে আমরা একটি নতুন গ্রাফ পেতে পারি। দুইটি গ্রাফ G_1 এবং G_2 কে হোমোমরফিক (Homeomorphic) বলা হবে যদি তারা একই গ্রাফ থেকে পাওয়া যায়। অথবা আইসোমরফিক গ্রাফ (Isomorphic graph) দ্বারা এই পদ্ধতিতে পাওয়া যায়,

উদাহরণ ঃ

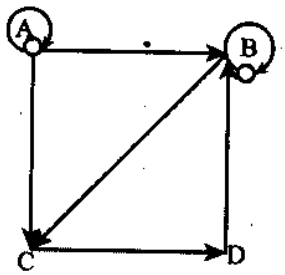


চিত্র ঃ ১.১০

উপরের বর্ণিত চিত্রে G_1, G_2 ও G_3 নামের ৩টি গ্রাফ আঁকা হয়েছে। G_1 গ্রাফের সাথে একটি ভার্টেক্স সংযুক্ত করে G_2 এবং G_3 গ্রাফ তৈরি করা যায়। এখানে G_2 এবং G_3 পরস্পর হোমোমরফিক গ্রাফ।

৪৪।

$\therefore$ deg (A) = 4
deg (B) = 5
deg (C) = 3
deg (D) = 2



চিত্র ঃ ১.১১

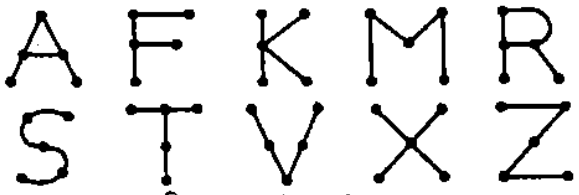
৪৫। **সাব গ্রাফ (Sub Graph) ঃ** ধরা যাক, একটি গ্রাফ, G = G (V, E)
একটি গ্রাফ H = H (V′, E′) কে G এর উপ চিত্রলেখ (Sub graph) বলা হবে যদি H এর শীর্ষ (Vertices) এবং ধার (Edges) G এর শীর্ষ (Vertices) এবং ধার (Edges)-এর সাথে সংযুক্ত হয়।
অর্থাৎ, যদি V′ $\prod$V এবং E′ $\prod$ E.
নির্দিষ্টভাবে

(i) একটি উপ চিত্রলেখ G(V, E) এর H (V′, E′) এর ভার্টিকস্ V′ দ্বারা প্রভাবিতকে উপচিত্রলেখ বলা হবে যদি এর ধার সেট (edge seat) E′, G এর সকল ধার (Edge) ধারণ করে, যার প্রান্তবিন্দু (End Point) ভার্টিকস H এ থাকে।

(ii) যদি G এ একটি ভার্টিকস্ ϑ হয়, তখন G – ϑ হল G এর উপ চিত্রলেখ G থেকে ϑ অপসারণের মাধ্যমে অর্জিত হয় এবং G থেকে সকল ধার (Edges) মুছে যা ϑ ধারণ করে।

(iii) যদি G এ e একটি ধার (Edge) হয়, তখন G – e হল G এর উপ-চিত্রলেখ, G থেকে ধার e রহিত করে প্রাপ্ত হয়।

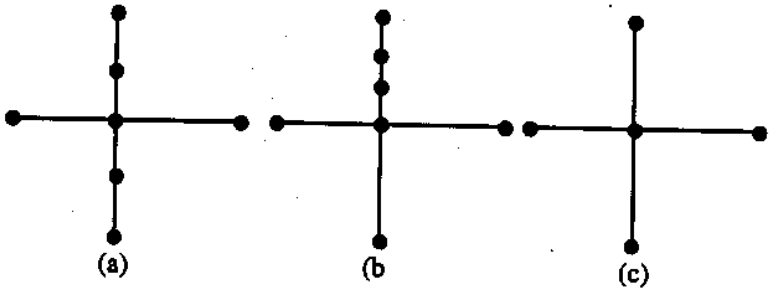
আইসোমরফিক চিত্রলেখ (Isomorphic Graphs) ঃ চিত্রলেখ G (V, E) এবং G* (V*, E*) কে আইসোমরফিক বলা হবে যদি সেখানে এক-প্রতি-এক (one to one) সাদৃশ্যতা $f : v - v^*$ এরূপ যে {u, ϑ} একটি ধার G হয় যদি এবং কেবল যদি {f(u), $f(\vartheta)$}, G* একটি ধার হয়। সাধারণত আইসোমরফিক গ্রাফ এর মধ্যকার পার্থক্য সূচিত করতে পারি না (চিত্র ৬.৮)। আমাদের জানা আছে, A অর R হল আই সোমরফিক গ্রাফ কিন্তু অনুরূপ F এবং T, K এবং X এবং M, S, V এবং Z হল আইসোমরফিক গ্রাফ।



চিত্র ঃ ১.১২ আইসোমেট্রিক গ্রাফ

হোমোমরফিক চিত্রলেখ (Homeomorphic Graphs) ঃ প্রদত্ত যে কোন চিত্রলেখ G, অতিরিক্ত ভার্টিকস যুক্ত G এর ধার (Edge) দ্বারা বিভাজন করে একটি নতুন চিত্রলেখ পাওয়া যায়। দুটি গ্রাফ G এবং G* কে হোমোমরফিক বলা যাবে যদি তারা একই চিত্রলেখ থেকে অথবা এই পদ্ধতির দ্বারা আইসোমরফিক গ্রাফ।

চিত্র নং ৬.৯ (a) এবং চিত্র নং ৬.৯ (৬) আইসোমরফিক চিত্রলেখ নয়, কিন্তু তারা হোমোমরফিক যেহেতু তারা প্রকৃত ভার্টিকস এর সংযোগে গঠিত।



চিত্র ঃ ১.১৩ হোমেওমরফিক চিত্রলেখ

▸▸ সমস্যাবলি ঃ

১। 1-এ

$\vartheta = 6; e = 6$

deg (a) = 2,

deg (b) = 4

deg (c) = 1

deg (d) = 0

deg (e) = 2

deg (f) = 3

c হল প্যানডেন্ট (Pendant) এবং d হল আইসোলেটেড।

2-এ

$\vartheta = 9; e = 12$

deg (a) = 3

deg (b) = 2

deg (c) = 4

deg (d) = 0

deg (e) = 6

deg (f) = 0

deg (g) = 4

deg (h) = 2

deg (i) = 3

এবং d এবং f হল আইসোলেটেড (Isolated)

২। না, কারণ ভার্টিকস এর মাত্রা কখনো বেজোড় সংখ্যা হতে পারে না।

৩। 1 এর জন্য

$\vartheta = 4; e = 7;$

ইন-ডিগ্রি ঃ

$\deg^-(a) = 3$

$\deg^-(b) = 1$

$\deg^-(c) = 2$

$\deg^-(d) = 1$

আউট ডিগ্রি ঃ

$\deg^+(a) = 1$

$\deg^+(b) = 2$

$\deg^+(c) = 1$

$\deg^+(d) = 3$

2 এর জন্য

5 ভার্টিকস এবং 13 ধার (Edges)

ইন-ডিগ্রি ঃ

$\deg^-(a) = 6$

$\deg^-(b) = 1$

$\deg^-(c) = 2$

$\deg^-(d) = 4$

$\deg^-(e) = 0$

আউট ডিগ্রি ঃ

$\deg^+(a) = 1$

$\deg^+(b) = 5$

$\deg^+(c) = 5$

$\deg^+(d) = 2$

$\deg^+(e) = 0$

৪। (a) n ভার্টিকস, $n(n-1)/2$ এজস্

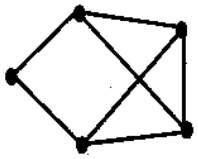
(b) n ভার্টিকস্, n এজস্

(c) n + 1 ভার্টিকস, 2n এজস

(d) m + n ভার্টিকস, mn এজস

(e) 2^n ভার্টিকস, $n\,2^{n-1}$ এজস্

৫। (a) হ্যাঁ



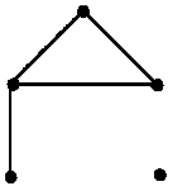
চিত্র ঃ ১.১৪

(b) না, কারণ মাত্রার যোগফল বেজোড় সংখ্যা

(c) না

(d) না, কারণ মাত্রায় যোগফল বেজোড় সংখ্যা

(e) হ্যাঁ

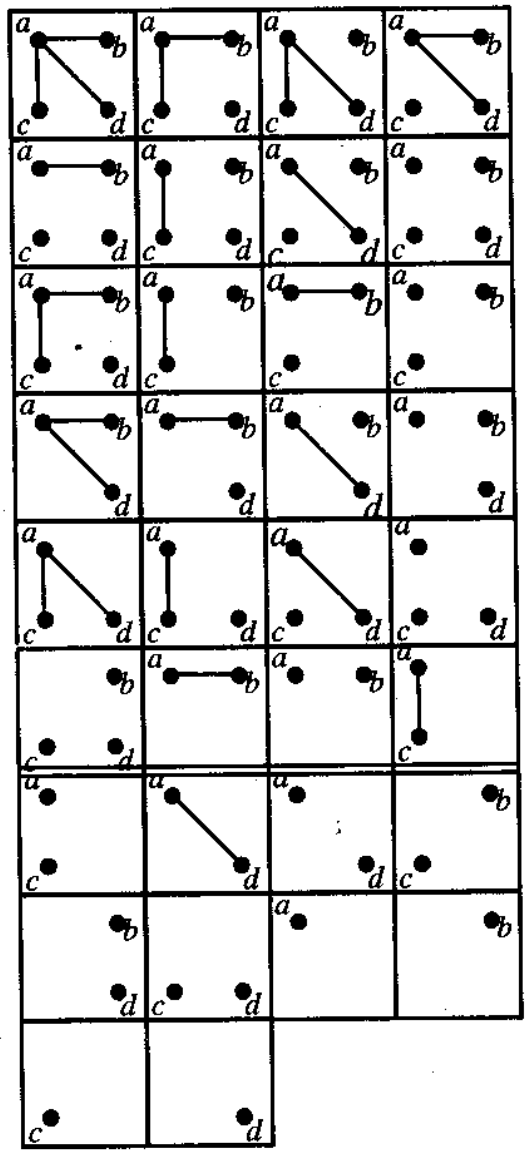


চিত্র ঃ ১.১৫

(f) না, কারণ মাত্রার যোগফল বেজোড় সংখ্যা

৬। 17টি

৭। চিত্র নং ৬.১২ উপ-চিত্রলেখ



চিত্র ঃ ১.১৬

৮। আইসোমরফিক

৯। আইসোমরফিক

১০। আইসোমরফিক

১১। আইসোমরফিক নয়

১২। নয়

১৩। নয়

অধ্যায়-৭

দ্বিমিক ট্রিজ
(Binary Trees)

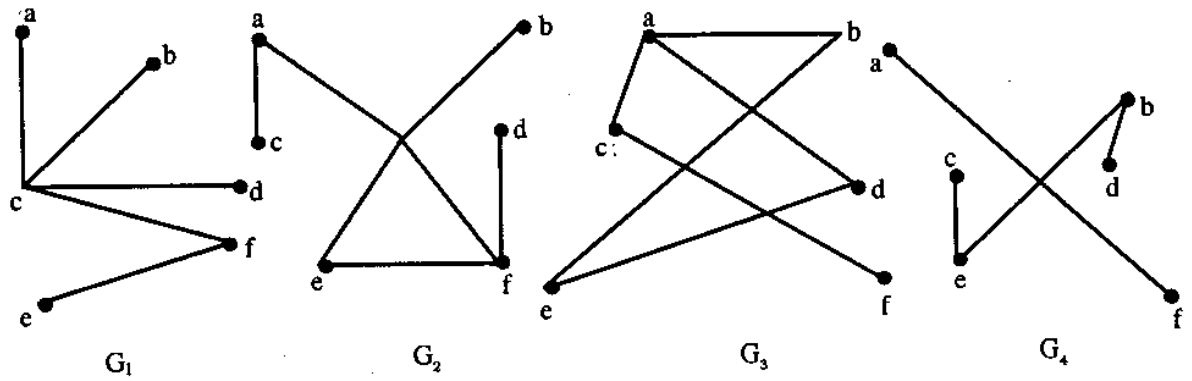
৭.০ বাইনারি ট্রি (Binary Tree) ঃ

একটি সংযুক্ত চিত্র লেখ (A connected graph) কোন সাধারণ আবর্তন (Simple circuit) কে ধারণ করে না, তাকে ট্রি (Tree) বলে।

১৮৫৭ সালের ও বেশ কিছু পূর্বে ইংরেজ গণিতবিদ আর্থার কেলী (Arthur Cayley) নির্দিষ্ট ধরনের রাসায়নিক যৌগ গণনার প্রয়োজনে ট্রি ব্যবহার করেন। সে সময় থেকেই ট্রি বিভিন্ন সমস্যার সমাধান করে আসছে, তার নিজস্ব নিয়মের মাধ্যমে।

কম্পিউটার বিজ্ঞানে ট্রি অত্যন্ত প্রয়োজনীয় একটি বিষয়। কম্পিউটার বিজ্ঞানের কর্মক্ষম এলগরিদম নির্মাণে (Construct Efficient Algorithms) সবচেয়ে কম খরচে বিতরণকৃত (distributed) কম্পিউটার সমূহের মধ্যে টেলিফোন তারের মাধ্যমে নেটওয়ার্ক নির্মাণ করা, ডাটা জমা (Data store) এবং এবং তা স্থানান্তর এর জন্য কর্মক্ষম কোডসমূহ নির্মাণ ইত্যাদি ট্রি এর মাধ্যমে অত্যন্ত সুন্দর সহজ ও নির্ভুলভাবে সম্পন্ন করা যায়।

আমরা ট্রি এর সংজ্ঞায় উল্লেখ করছি যে, এটি সংযুক্ত চিত্রলেখ এবং এটি কোন সাধারণ আবর্তনকে ধারণ করে না। বিষয়টি একটি চিত্রের মাধ্যমে খুব সহজেই বোঝা যেতে পারে। যদি প্রশ্ন করা হয় যে, ৭.০ নং চিত্রে কোণগুলো ট্রিজ (Trees).



চিত্র ঃ ৭.০

চিত্রের G_1 ও G_2 হচ্ছে ট্রিজ যেহেতু G_1 ও G_2 প্রত্যেকেই ট্রিজ এর সংজ্ঞা মতে সংযুক্ত চিত্র লেখ এবং কোন সাধারণ আবর্তনকে ধারণ করে না। G_3 ট্রি নয়, কারণ e, b, a, b, e হচ্ছে চিত্রলেখ এর সাধারণ আবর্তন এবং G_4 ও ট্রি নয়, কারণ এর কোন সংযুক্তই নেই।

ট্রিজ কে মূলত দু'টি অংশে বিভক্ত করা যায়। যথা-

১। মূলীয় ট্রিজ (Rooted Trees) ও

২। দ্বিমিক ট্রিজ (Binary Trees)

আমরা বাইনারি ট্রিজ নিয়েই এই অধ্যায়ে বিস্তারিত জানব-

৭.১ বাইনারি ট্রি এর সংজ্ঞা (Defination of Binary Trees) ঃ

বাইনারি ট্রি (Binary) হল গণিত এবং কম্পিউটার বিজ্ঞানের মৌলিক কাঠামো (fundamental structure)। মূলীয় ট্রি (Rooted Trees) এর কতগুলো পরিভাষা হল - এজ (Edge), পথ (Path), ব্রাঞ্চ (Branch), লিফ (Leaf), ডেপথ্ (Depth) এবং লেভেল সংখ্যা (Level Number) প্রভৃতি বাইনারি ট্রি এর জন্য ব্যবহৃত হয়।

একটি বাইনারি ট্রি T হলো একটি সসীম সেটের উপাদান (Finit Set) যার সদস্য হলো কতগুলো নোড (Node)। একেক নোড থেকে একটি বা দু'টি নোড উৎপন্ন হয়। এরূপ ট্রিকে বাইনারি ট্রি বলা হয়।

সুতরাং বলা যায়--

(i) T হল খালি বা নাল ট্রি (null tree) অথবা খালি ট্রি (empty tree) অর্থাৎ T সেটে কোন নোড (node) নাই।

(ii) T সেট যদি খালি সেট না হয়, তবে এর একটি আলাদা নোড R আছে, যাকে T এর রুট (Root) বা মূল বলা হয়।

ধরা যাক, T একটি ট্রি। R হল T এর রুট বা মূল। T_1, T_2 হলো T এর দু'টি সাবট্রি (Subtree) । T_1 এবং T_2 নিচ্ছেদ। এরপর যদি বলা হয় যে, রুট বা মূল R নেই, তবে সাবট্রি T_1 এবং T_2 আলাদা ২টি ট্রি হয়ে যাবে। আর যদি রুট বা মূল R থাকে তবে আমরা T_1 কে বলব রুট R এর বাম সাকসেসর (Left successor) এবং T_2 কে বলব R এর ডান সাকসেসর (Right successor)

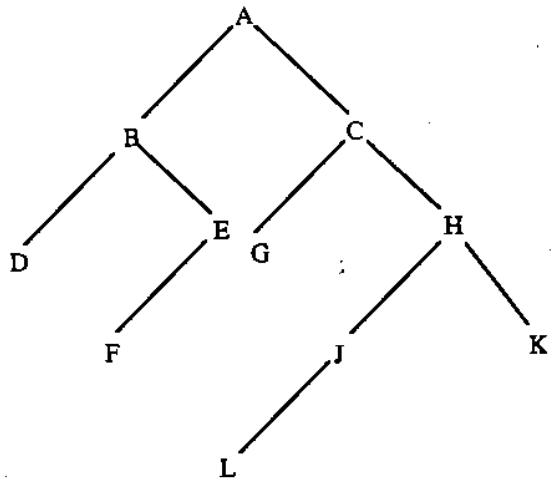
এভাবে T_1 এবং T_2 তে ও দু'টি করে সাকসেসর (successor) থাকতে পারে। অর্থাৎ T_1 এবং T_2 এর অধীনে সাবট্রি থাকতে পারে। এ সাবট্রিকেই আমরা নোড N বলে থাকি।

যে সাবট্রির আর কোন সাকসেসর (Successor) থাকে না, তাকে টারমিনাল (terminal) নোড বলে।

সুতরাং T এর মধ্যে প্রত্যেক নোড N এর সাকসেসর 0 বা 1 অথবা 2 থাকে।

চিত্রের সাহায্যে বাইনারি ট্রি ঃ

সাধারণত একটি বাইনারি ট্রি T কে উপস্থাপন করা হয় সমতলে একটি ডায়াগ্রাম (Diagram) এর সাহায্যে যাকে বাইনারি ট্রি চিত্র (picture of a Binary Tree) বলা হয়। নিম্নের বাইনারি ট্রি এর চিত্রটি দেখ--



চিত্র; ৭.১

বর্ণিত ৭.২ নম্বর চিত্রটিকে ধরি ট্রি T

(i) T তে ১১টি নোড আছে। যাদেরকে I ব্যতীত A হতে L অক্ষরগুলি দাঁড়া প্রকাশ করা হয়েছে।

(ii) চিত্রটি উপরে যে Node A আছে, তাহলো ট্রি T এর রুট বা মূল।

(iii) B হচ্ছে A নোডের বাম সাকসেসর (Left Successor) এবং C হচ্ছে A নোডের ডান সাকসেসর (Right Successor)।

(iv) A মূল বা রুটটির বাম সাবট্রিতে নোড B, D, E, F গঠিত হয়েছে এবং A মূলটির ডান সাবট্রিতে নোড C, G, H, J, K, এবং L গঠিত হয়েছে।

(v) D, E হচ্ছে B নোডের যথাক্রমে বাম সাকসেসর ও ডান সাকসেসর।

(vi) F হচ্ছে E নোডের বাম সাকসেসর।

(vii) G, H হচ্ছে C নোডের যথাক্রমে বাম ও ডান সাকসেসর।

(viii) J, K হচ্ছে H নোডের যথাক্রমে বাম ও ডান সাকসেসর।

(ix) L হচ্ছে J নোডের বাম সাকসেসর।

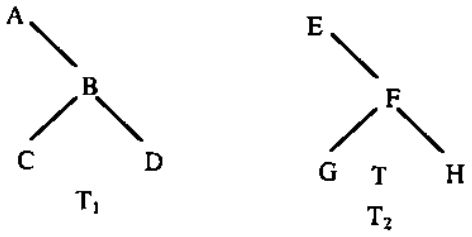
(x) চিত্রে D, F, G, L, K হচ্ছে টার্মিনাল নোড (Terminal node) কারণ এ নোডগুলোর কোন সাকসেসর নেই।

(xi) E এবং J নোডের একটি করে সাকসেসর আছে।

সদৃশ/সমরূপ বাইনারি ট্রি (Similar Binary Tree) ঃ

দু'টি বাইনারি ট্রিকে সদৃশ বাইনারি ট্রি বা Similar Binary Tree বলা হবে যদি, সে দু'টির গঠন বা আকৃতি একই রকম হয় এবং ট্রি দু'টি একটিকে অপরটির কপি (copies) বলা হবে যদি তারা সমরূপ/সদৃশ্য হয় এবং যদি তাদের একই নোড থাকে।

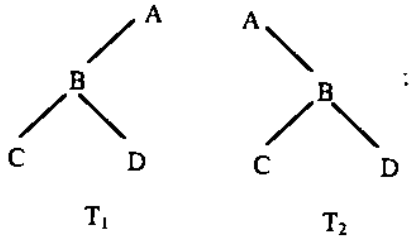
উদাহরণ-৭.১।



চিত্র ঃ ৭.২

উপরের চিত্রে দু'টি ট্রি T_1 এবং T_2 দেয়া হলো। উক্ত ট্রি দু'টি সমরূপ ট্রিজ (Similar Binary Trees) কারণ তাদের গঠন একই। কিন্তু নোডের নাম ভিন্ন হওয়ায় T_1 এবং T_2 একটি অপরটির কপি নয়। যদি T_2 ট্রি এর নোডের নাম E, F, G, H এর পরিবর্তে যথাক্রমে A, B, C এবং D বসানো হয় তবে ট্রি T_1, T_2 এর কপি হবে।

উদাহরণ-৭.২।



চিত্র ঃ ৭.৩

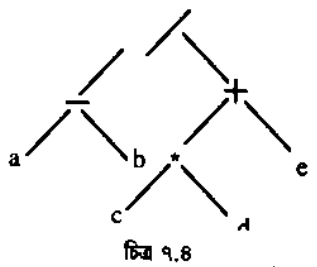
উপরের চিত্রে T_1 এবং T_2 ট্রি লক্ষ কর। চিত্রে T_1 এবং T_2 এর গঠন ভিন্ন, যদিও এদের নোডের নাম একই। ট্রি T_1 এর রুট নোড A এবং বাম সাকসেসর (Left successor) হচ্ছে B। অপরদিকে T_2 ট্রিতে রুট নোড A এর ডান সাকসেসর (Right Successor) হচ্ছে- B। সুতরাং T_1 এবং T_2 সমরূপ ট্রি (Similar Trees) নয়।

বাইনারি ট্রিতে এলজ্যাবরার এক্সপ্রেশন (Algebraic Expressions) ঃ

ধরি,

এক্সপ্রেশন E = (a-b)/((c *d) + e) ।

E এক্সপ্রেশনকে দু'ভাগে ভাগ করা যায়। প্রথম ভাগ = (a - b) এবং দ্বিতীয় ভাগ = ((c * d) + e)। এর পর দ্বিতীয় ভাগকে আবার (c * d) এবং e এ দু'ভাগে ভাগ করা যায়।



চিত্র ৭.৪

উপরিউক্ত চিত্রে এক্সপ্রেশন E কে বাইনারি ট্রি হিসাবে দেখানো হয়েছে। কারণ এর টার্মিনাল নোডে প্যারামিটার আছে। রুটসহ অন্যান্য নোডে /, –, +, * ইত্যাদি অপারেটরগুলো দেয়া হয়েছে।

৭.২ সম্পূর্ণ এবং বর্ধিত বাইনারি ট্রি (Complete and Extended Binary Trees) ঃ

বাইনারি ট্রিকে 2 টি বিশেষ প্রকারে ভাগ করা হয়েছে-

(i) সম্পূর্ণ বাইনারি ট্রি (Complete Binary Trees)

(ii) বর্ধিত বাইনারি ট্রি (Extended Binary Trees) বা 2-trees.

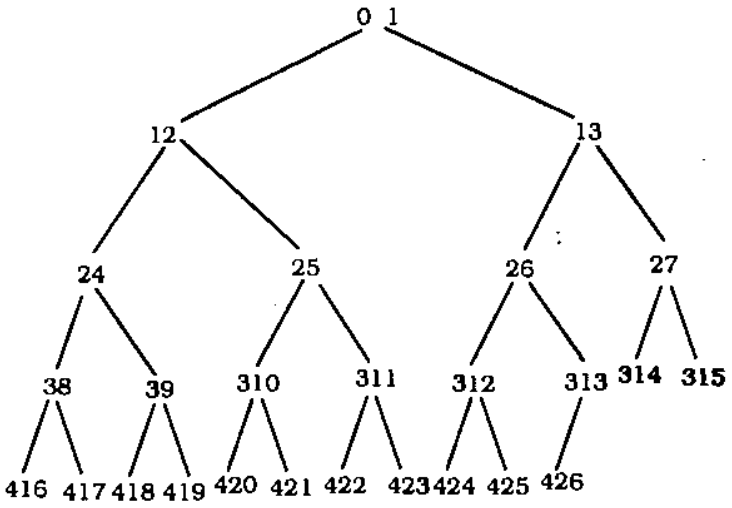
(i) সম্পূর্ণ বাইনারি ট্রি (Complete Binary Tree) ঃ

ধরা যাক, একটি বাইনারি ট্রি T। Tএর প্রত্যেক নোডে ২ টি চিলড্রেন (children) বা সন্তান আছে। T এর r-তম লেভেলে সর্বাধিক 2^r সংখ্যক নোড থাকবে।

ট্রি T কে Complete Tree বা সম্পূর্ণ ট্রি বলা হবে, যদি এর সর্বশেষ Level ছাড়া অন্য সব level এ প্রয়োজনীয় সংখ্যক সর্বাধিক নোড থাকে এবং এর শেষ level এর সকল নোড যতটা সম্ভব বামে রাখতে হবে।

সুতরাং প্রকৃত n নোড যুক্ত T_n কে একটি কমপ্লিট ট্রি বলা হবে, যার নোড সংখ্যা n ।

উদাহরণ-৭.৩। দেখাও যে, নিম্নের চিত্রে T_{26} একটি কমপ্লিট (Complete) ট্রি।



চিত্র ঃ ৭.৫ কম্প্লিট ট্রি T_{26}

পূর্ব পৃষ্ঠার T_{26} কে বিশ্লেষণ করলে নিম্ন বর্ণিত তথ্যাদি পাওয়া যায় -

১। উপরের ট্রি এর সংখ্যাগুলো এমনভাবে দেয়া আছে, সংখ্যার প্রথম অংক Level প্রকাশ করে এবং বাকি অংকগুলো মান প্রকাশ করে। ধরি 424 এর অর্থ, এ নোডের Level হল 4 এবং মান হল 21 ।

২। এ ট্রিতে O Level, 1 Level, 2 Level এবং 3-Level এর প্রত্যেক নোড পূর্ণ। 4-Level এ সবগুলো পূর্ণ নয়। 5-Level-এ নোড খালি আছে। অর্থাৎ সর্বশেষ Level এর নোড পূর্ণ নয়। এবং 4-Level-এর নোডগুলোকে যথা সম্ভব বাম দিকে লেখা হয়েছে।

৩। ট্রি T_{26} এর সর্বসাকুল্যে নোড সংখ্যা 26। এটি একটি কমপ্লিট ট্রি।

উপরে বর্ণিত ট্রিতে আরো কিছু বিষয় লক্ষ করা যায়–

(a) কোন প্যারেন্ট (Parent node) নোডের যে মান, তার প্রথম চাইল্ড (Child) বা সন্তানের মান তার দ্বিগুণ এবং দ্বিতীয় Child বা সন্তানের মান প্রথম Child এর 1 বেশি। অর্থাৎ প্যারেন্ট নোডের মান যদি K হয়, তবে প্রথম Child এর মান = 2K আর তার পরের child এর মান (2x k + 1)

(b) এ ট্রিতে Level আছে 0, 1, 2, 3, 4। সর্বশেষ Level হচ্ছে 4। ট্রি T_{26} এর 4 নম্বর Level এ মোট নোড সংখ্যা = $2^4 = 16$, 16 কিন্তু আমরা দিয়েছি 11 টি।

(c) এ ট্রিতে মোট নোড সংখ্যা $= 2^{r+1} - 1$ [r = level সংখ্যা)]

$= 2^{4+1} - 1$

$= 2^5 - 1$

$= 32 - 1$

$= 31$ টি নোড

কিন্তু আমরা এ ট্রিতে নোড দিয়েছি ২৬ টি।

(d) N নোড যুক্ত একটি কমপ্লিট ট্রি T_n এর depth বা গভীরতা $d_n = \log_2 n+1$

উদাহরণ-৭.৪। একটি কমপ্লিট ট্রি যার 26টি নোড আছে, নোড 9 এর **Child** (সন্তান) এবং **Parents** (পিতা) বের কর।

সমাধান আমরা জানি, k নোড এর সিলডেন $= 2 \times k$ এবং $2 \times k + 1$

এবং প্যারেন্টস্ $= k/2$

অতএব, নোড 9-এর Children (সন্তানগুলো) $= 2 \times 9 = 18$ এবং $2 \times 9 + 1 = 19$

∴ নোড 9-এর Childrenগুলো 18 এবং 19

আবার নোড 9 এর প্যারেন্টস্ $= \frac{9}{2} = 4$ [পূর্ণ সংখ্যা]

উদাহরণ-৭.৫। যদি পূর্ণ ট্রি এর নোড, n = 1000000 হয় তবে এর ডেপথ (Depth) বা গভীরতা বের কর।

সমাধান

আমরা জানি, পূর্ণ ট্রি এর ক্ষেত্রে

depth-এ গভীরতা, $d_n = \log_2 n + 1$

$= \log_2 1000000 + 1$

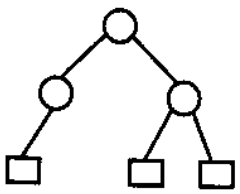
$= 21$

(ii) বর্ধিত বাইনারি ট্রি (Extended Binary Trees) ঃ

কোন বাইনারি ট্রি T কে 2-trees অথবা Extended binary tree বা বর্ধিত বাইনারি ট্রি বলা হবে যদি সে ট্রি এর প্রত্যেক নোডে 2 টা Children থাকে অথবা কোন children থাকে না। অর্থাৎ প্রত্যেকটি নোড N এর সাথে হয় 2 অথবা 0 Children থাকবে।

এরূপ ক্ষেত্রে, যে নোডের দুটি children থাকে সে Node কে বলা হয় Internal nodes (অন্তঃস্থ নোড) এবং যে নোডের 0 টি children থাকে তাকে বলা হয় External nodes (বহিঃস্থ নোড)। সাধারণত internal নোডকে একটি বৃত্তাকৃতি চিহ্ন (0) দিয়ে প্রকাশ করা হয় এবং External নোডকে একটি বর্গাকৃতি চিহ্ন (□) দিয়ে প্রকাশ করা হয়।

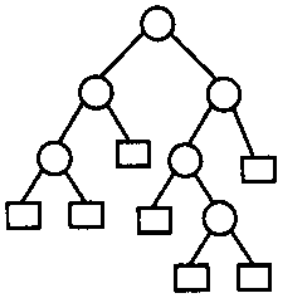
উদাহরণ-৭.৬। নিম্নের চিত্রে বর্ণিত ট্রি টি Extended Binary Tree (বর্ধিত বাইনারি ট্রি) কিনা, নির্ণয় কর।



চিত্র ঃ ৭.৬

সমাধান উপরে বর্ণিত ট্রি টি Extended Binary Tree (বর্ধিত বাইনারি ট্রি) নয়। কারণ উক্ত ট্রিতে এমন একটি নোড আছে যার একটি মাত্র অগ্রজ বা Parents আছে।

উদাহরণ-৭.৭। নিম্নের চিত্রে বর্ণিত ট্রি টি Extended Binary tree (বর্ধিত বাইনারি ট্রি) কিনা, নির্ণয় কর।



চিত্র ঃ ৭.৭

সমাধান উপরের চিত্রটি একটি Extended Binary Tree (বর্ধিত বাইনারি ট্রি)। কারণ এ ট্রি এর প্রত্যেকটা নোডের হয় 2-children আছে অথবা কোন children নেই (0-children)। উক্ত extended Binary Tree এর External নোড (বহিঃস্থ নোড) কে (□) চিহ্ন দিয়ে এবং Internal Node (অন্তঃস্থ নোড) কে (O) চিহ্ন দিয়ে প্রকাশ করা হয়েছে।

অতএব উপরে বর্ণিত ট্রি টি একটি Extended Binary Tree (বর্ধিত বাইনারি ট্রি)।

৭.৩ ট্রি-এর বৈশিষ্ট্য (Properties of trees) ঃ

একটি ট্রি নিম্নলিখিত বৈশিষ্ট্যসমূহ মেনে চলে -

(i) একটি রুট (Root) নোড থাকবে, যার লেভেল 0 (শূন্য)।

(ii) ট্রি এর লেভেল সংখ্যা যত হবে, ট্রি এর depth (ডেপথ বা গভীরতা) তার চেয়ে এক বেশি হবে। অর্থাৎ যদি কোন ট্রি এর সর্বশেষ Level L হয়, তবে depth, d = L + 1.

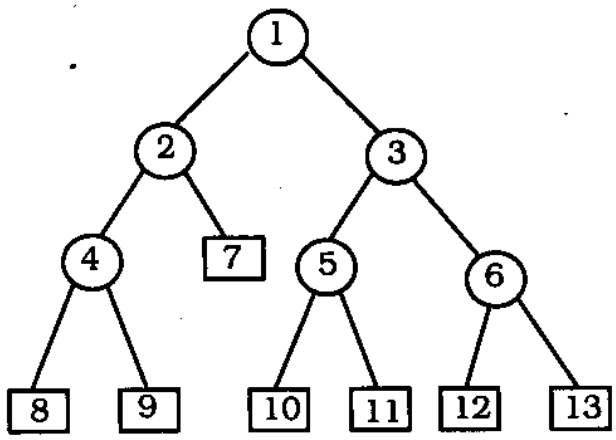
(iii) কোন প্যারেন্ট নোড এর হয় ২টি Children থাকবে, অথবা কোন children থাকবে না এবং 1 টি childrenও থাকতে পারে।

(iv) যে ট্রি এর n সংখ্যক নোড আছে, সে ট্রি এর বাহু (edge) সংখ্যা হবে (n - 1)

(v) যদি কোন ট্রি এর Internal node সংখ্যা i হয়, তাহলে internal node $i = \frac{n-1}{2}$ (n= মোট নোড সংখ্যা)

উদাহরণ-৭.৮। একটি Extended binary tree (বর্ধিত বাইনারি ট্রি) এর ছবি আঁক এবং দেখাও যে Internal node এর সংখ্যা $i = \frac{n-1}{2}$ [বাকাশিবো-২০১২, ১৩, ২০১৪R]

সমাধান



চিত্র ঃ ৭.৮

এটি একটি Extended Binary tree (বর্ধিত বাইনারি ট্রি)। এর মোট Node সংখ্যা 13টি। এ ট্রি এর Internal node মোট 6 টি। 1, 2, 3, 4, 5, 6 নম্বর দেওয়া নোডগুলো ইন্টারনাল নোড।

সুতরাং আমরা জানি,

$i = \frac{n-1}{2}$ ($\therefore$ n = 13 মোট নোডসংখ্যা)

$= \frac{13-1}{2} = \frac{12}{2}$

= 6 **(প্রমাণিত)**

উদাহরণ-৭.৯। ধরা যাক যে, কেহ চেইন লেটার (Chain letter) শুরু করল। প্রতি জন যে লেটার প্রাপ্ত হয় তাকে অন্য চার জনের নিকট উক্ত পত্রটি পাঠাতে অনুরোধ করা হলো। কেহ কেহ এরূপ করল কিন্তু অন্যান্যরা তা করল না। যদি কেহই একের অধিক পত্র বা লেটার প্রাপ্ত না হয় এবং যদি এই চেইন লেটার যারা পড়ে 100 জনে সমাপ্তি ঘটে কিন্তু পাঠায় না তবে প্রথমজনসহ কতজনে এই পত্রটি দেখাসহ পাঠায়?

সমাধান চেইন লেটার 4 অ্যারে ট্রিজ এর মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়। অন্তঃস্থ ভার্টিকস (Internal Vertices) বিনিময়কারী লোক যারা লেটার প্রেরণ করে এবং লিভস (Leaves) হল ঐ সব লোক যারা পাঠায় না। যেহেতু 100 জন লোক লেটার প্রেরণ করে না, লিভ (Leaves) সংখ্যা মূলীয় ট্রিতে হয়।

l = 100

অতএব, পত্র প্রাপ্ত লোকের সংখ্যা,

n = (4. 100 – 1) /(4 – 1)

= 133

internal nodes বা অন্তঃস্থ ভার্টিকস্

= 133 – 100 = 33

অতএব, 33 জন লোক পত্র পাঠায়।

(iv) সর্বাধিক m^h লিভস্ (leaves) বিশিষ্ট m অ্যারে ট্রিজের উচ্চতা h.

যদি m অ্যারে ট্রি এর h উচ্চতায় লিভস l থাকে।

তখন, $h \geq [\log_m l]$

যদি m-অ্যারে ট্রি পূর্ণ ও সাম্যতা বিশিষ্ট হয়।

তখন, $h = [\log_m l]$

৭.৪ বাইনারি সার্চ ট্রি এর পদ্ধতি (Method of Binary Search Tree) ঃ

কম্পিউটার বিজ্ঞানে ডাটা Structure এর অতীব গুরুত্বপূর্ণ হল বাইনারি সার্চ ট্রি। যখন আইটেম (Item) গুলো সম্পূর্ণ ক্রমানুযায়ী থাকে তখন Average running time.

$f(n) = 0 (\log_2 n)$ রেখে উক্ত তালিকা থেকে দক্ষতার সাথে নির্দিষ্ট আইটেম শনাক্তকরণই হল বাইনারি সার্চ ট্রি এর প্রাথমিক লক্ষ্য। (যেখানে n হল ভিন্ন ভিন্ন ডাটা আইটেম সংখ্যা)। তাছাড়া বাইনারি সার্চ ট্রি আমাদেরকে সহজে উপাদানকে Insert (সংযোজন) করতে এবং Delete (মুছে ফেলতে) করতে সমর্থন করে।

সুতরাং আমরা বলতে পারি, Binary Search Tree নিম্নলিখিত ২টি গঠনে কাজ করে -

(i) Sorted Linear array (ii) Linked List

(i) Sorted Linear Array ঃ একটি উপাদানে Average running time $f(n) = 0 \log_2 n$ হওয়ায় Sorted linear Array থেকে খুব সহজে নির্দিষ্ট আইটেম (Item) সনাক্ত করে খুঁজে বের করে। যেহেতু উপাদানের গড় মান 0(n) পরিবর্তনশীল রাশির সাথে জড়িত, তাই এটি Insert (সংযোজন) ও Delete (মুছিয়ে ফেলা) করা কঠিন।

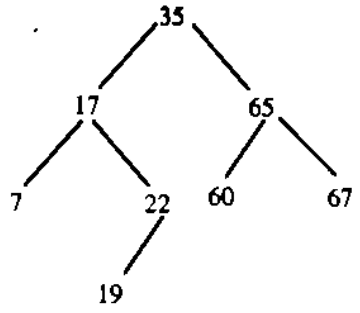
(ii) Linked List ঃ এখানে যে কেহ সহজভাবে উপাদানকে Insert (সন্নিবেশ) ও Delete (মুছিয়ে ফেলতে) করতে পারে। কিন্তু যেহেতু running time f(n) = 0 (n) তাই এতে উপাদান Insert (সংযোজন) ও Delete (বিয়োজন) করাকঠিন।

বাইনারি সার্চ ট্রি এর সংজ্ঞা : (Definition of a binary Search Tree) : ধরি T হল বাইনারি সার্চ ট্রি। যদি T এর প্রত্যেকটি node N নিম্নবর্ণিত বৈশিষ্ট্য মেনে চলে। তবে T কে বাইনারি সার্চ ট্রি বলা হয়।

(i) যদি N নোডের মান; N নোডের বাম সাবট্রি মান অপেক্ষা বৃহত্তর হয়। অর্থাৎ $N > M$

(ii) এবং যদি N নোডের মান; N নোডের ডান সাবট্রির সকল মানের চেয়ে ছোট হয়। অর্থাৎ $N < M$

উদাহরণ-৭.১০। একটি সংখ্যা ১৯ খুঁজতে হবে। নিম্নবর্ণিত বাইনারি সার্চ ট্রি থেকে কীভাবে খুঁজতে হবে, বুঝিয়ে দাও।



চিত্র ৭.৯

সমাধান : প্রথমে রুটে যেতে হবে। এখানে রুট 35। 17 সংখ্যাটি 35 এর চেয়ে ছোট। অতএব 17, 35 নোডের বাম সাবট্রিতে থাকবে। এবার 17 সংখ্যার নোডের ডান Child (ডান) কে পরীক্ষা করা হল। 22, 17 এর চেয়ে বড়, মানে এর ডান সাবট্রি-তে থাকবে। এভাবে আরেক ধাপ গেলে 19 পাওয়া যা

বাইনারি সার্চ টি এর এলগরিদম :

এলগরিদম-৭.১

একটি বাইনারি সার্চ ট্রি T দেওয়া আছে এবং একটি ডাটা ITEM দেয়া আছে। এবার ট্রি T থেকে ITEM খুঁজে বের করতে হবে।

Step-1 : ITEM টি রুট N এর সাথে তুলনা করা যায়।

(a) যদি ITEM < N হয়, তবে বাম সাবট্রি এর দিকে যেতে হবে।

(b) যদি ITEM > N হয় তবে ডান সাবট্রি এর দিকে যেতে হবে।

Step-2 : নিম্নবর্ণিত শর্ত পূরণ না হওয়া পর্যন্ত Step-1 এর কাজ চালিয়ে যেতে হবে।

(a) এমন একটি নোড পাওয়া যাবে, যেটি ITEM=N। সেক্ষেত্রে সার্চের কাজ সফল হবে।

(b) যদি ITEM=N কখনও পাওয়া না যায়, তাহলে ITEM টি ট্রি T তে নেই।

Step-3 : সমাপ্ত।

বাইনারি সার্চে ট্রিতে আইটেম সংযোজন করা (Inserting in a Binary Search Tree) :

এলগরিদম-৭.২ : একটি বাইনারি সার্চ ট্রি T দেয়া আছে। এতে একটি ITEM কে Insert (সংযোজন) করতে হবে।

Procedure : INSERTION (T: বাইনারি সার্চ টি, x = ITEM, N = বাইনারি সার্চ ট্রি T এর রুট (নোড)। T তে কোন Node এর বাম ও ডান সাবট্রি বর্তমান না থাকলে তাহলে তার মান Null.

Step-1 : While $N \neq$ Null [নোড N Null না হওয়া পর্যন্ত Loop চলবে]

Step-2 : T এর রুট N এর সাথে ITEM x কে তুলনা করতে হবে -

(a) x যদি N এর চেয়ে ছোট হয় তাহলে N এর বাম সাবট্রি এর সাথে তুলনা করতে হবে।

(b) x যদি N এর চেয়ে বড় হয় তাহলে N এর ডান সাবট্রি এর সাথে তুলনা করতে হবে।

Step-3 : নিম্নবর্ণিত শর্তপূরণ না হওয়া পর্যন্ত Step-2 এর কাজ চলবে-

(i) (Null নোড পাওয়া গেল) While loop সমাপ্ত হবে।

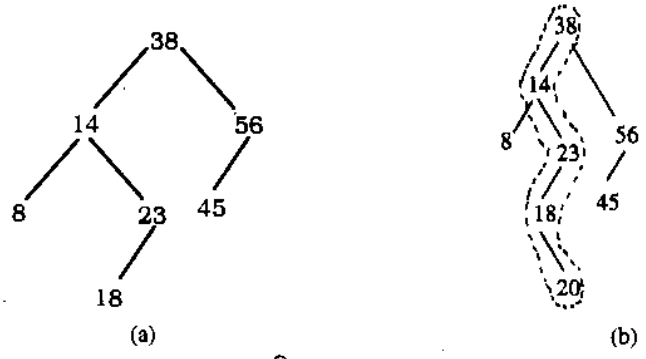
(ii) Null নোড এর বাম/ডান (উপযুক্তস্থানে) এ Itemটি Insert করতে হবে।

Step-4 : সমাপ্ত

উচ্চতর গাণিতিক যুক্তিবিদ্যা—৩৬

উদাহরণ-৭.১১। উদাহরণ এর সাহায্যে বাইনারি সার্চ ট্রিতে একটি নতুন আইটেম ইনসার্ট করার নিয়ম দেখাও -

সমাধান



চিত্র ঃ ৭.১০

উপরুক্ত চিত্র ৭.১০(a) একটি বাইনারি সার্চ ট্রি।

একটি আইটেম = 20 দেওয়া হল। এখন এ ২০ কে বাইনারি সার্চ ট্রিতে Insert (সংযোজন)– করতে হবে।

20 কে বাইনারি সার্চ ট্রিতে Insert করতে যে সমস্ত ধাপ অতিক্রম করতে হবে তা নিম্নে দেওয়া হল -

(১) চিত্র (a) তে রুট N = 38 কিন্তু আমাদের ITEM=20 যেহে 20<38 তাহলে 38 এর বাম child এ আমরা দেখাবো - যেখানে আছে 14 । এবার আমাদের নোড N = 14

(2) ITEM = 20 কে 14 এর সাথে তুলনা করতে হবে।

যেহেতু 20> 14 তাহলে 14 এর ডান child-এ আমরা দেখবো-

যেখানে আছে 23 । এবার আমাদের নোড N = 23.

(3) N = 23, ITEM = 20

যেহেতু 20<23, তাহলে 23 এর বাম child এ আমরা দেখবো যেখানে আছে 18। এবার আমাদের নোড N = 18.

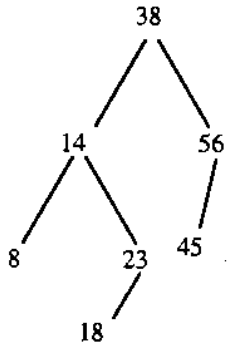
(4) যেহেতু 20 > 18, তাহলে 18 এর ডান child এ দেখবো। কিন্তু ডানে কোন সাবট্রি বা child না থাকায় নোড N = Null.

(5) যেহেতু আমরা ডানে NULL নোড পেয়ে গেছি। সুতরাং এ নোড N এ ITEM = 20 Insert করতে হবে।

চিত্র =৭.১০ (b) চিত্রে Item=20 Insert হয়েছে।

উদাহরণ-৭.১২। বাইনারি ট্রি T, চিত্র নং ৭.১১ হল বাইনারি সার্চ ট্রি। এক্ষেত্রে 23 কে যদি 35 এবং 40 তে পরিবর্তিত ব হয় তবে উহা বাইনারি সার্চ ট্রি হবে কী? যুক্তি উপস্থাপন কর। [বাকাশিবো ২০০

সমাধান



চিত্র ঃ ৭.১১ বাইনারি ট্রি

চিত্র ৭.১১ তে binary Tree T একটি binary Search tree অর্থাৎ T এর মধ্যে প্রত্যেক নোড N এর মান, এর বাম সাবট্রি মান অপেক্ষা বৃহত্তর এবং এর ডান সাবট্রির যে কোন সংখ্যা অপেক্ষায় ক্ষুদ্রতর।

প্রদত্ত চিত্রে যদি 23 নোডটিকে 35 দ্বারা পরিবর্তন করা হয় তখন T হবে (উপরিউক্ত ট্রি) একটি বাইনারি সার্চ ট্রি কারণ 35 < 38। অর্থাৎ 23 যেহেতু নোড 38 চেয়ে ছোট। সেহেতু 23 থাকবে 38 এর বাম সাবট্রিতে। আর 35, 38 এর চেয়ে ছোট। তাই 23 এর পরিবর্তে 35 বসালেও উপরিউক্ত ট্রি একটি বাইনারি সার্চট্রি থাকবে।

কিন্তু যদি 23 নোটটি 40 দ্বারা পরিবর্তন করা হয় তখন উপরিউক্ত বাইনারি ট্রি আর বাইনারী সার্চ ট্রি হবে না। কারণ 40 > 38

অর্থাৎ 40 নোড 38 এর চেয়ে বড়। সেহেতু 40 কখনোই নোড 38 এর বামে 23 এর পরিবর্তে বসবে না। আর বসালেও ট্রি আর বাইনারি সার্চট্রি থাকবে না।

বাইনারি সার্চ ট্রি থেকে একটি আইটেমকে Delete করা (Deleting in a Binary Search Tree) ঃ

এলগরিদম-৭.৩ ঃ

একটি বাইনারী মার্চ ট্রি T ও একটি ITEM দেওয়া আছে। P(N) হল N এর প্যারেন্ট এবং S(N) হল N এর চাইল্ড। এলগরিদম T হতে ITEM কে মুছে ফেলা হয়েছে।

ধাপ-১ ঃ যে নোডে Data ITEM টি আছে, তা বের করি এবং একে প্যারেন্ট নোড হিসেব গ্রহণ করি (যদি Data ITEM টি না পাওয়া যায়, তবে এটি সমাপ্ত করি।

ধাপ-২ ঃ এখন N এর চাইল্ড S(N) হিসেব করি। এর তিনটি শর্ত রয়েছে।

(a) N এর কোন চাইল্ড নেই। এক্ষেত্রে N কে মুছে ফেলতে হবেএবং P(N) এর কোন পয়েন্টার থাকবেনা।

(b) N এর একটি চাইল্ড M আছে। এক্ষেত্রে N মুছে যাবে এবং এর পরিবর্তে M বসবে।

(c) N এর দুটি চাইল্ড আছে।

(i) এর ক্রমিক উত্তরাধিকারী s(N) খুজে বের করি। s(N) এর কোন বাম সন্তান নেই।

(ii) (a) ও (b) ব্যবহার করে T হতে s(N) মুছে ফেলি।

(iii) s(N) দ্বারা N কে প্রতিস্থাপন করি।

ধাপ-৩। সমাপ্ত।

৭.৫ ট্রাভার্সিং বাইনারি ট্রি এর পদ্ধতি (Method of Traversing Binary Trees) ঃ

ট্রাভার্স কথার অর্থ হলো একটার পর একটা ডেটা চেক করে যাওয়া। R মূল বিশিষ্ট একটি বাইনারি ট্রি কে তিনটি প্রমাণ (standard) উপায়ে traversing-এর প্রক্রিয়া সম্পন্ন করা হয়। এ তিনটি এলগরিদম (Algorithms) কে প্রি-অর্ডার (Preorder), ইন অর্ডার (Inorder) এবং পোস্ট অর্ডার (Post order) বলা হয়। যেমন ঃ

প্রি-অর্ডার (Pre-Order) ঃ

(a) প্রথমে মূল রুট (Root) R কে প্রক্রিয়াকরণ করা হয়।

(b) এর পর রুট R-এর বাম সাবট্রিতে ট্রাভার্স করা হয়।

(c) এর পর রুট R এর ডান সাবট্রিতে ট্রাভার্স করা হয়।

ইন-অর্ডার (In Order) ঃ

(a) প্রথমে রুট R এর বাম সাবট্রিতে ট্রাভার্স করা হয়।

(b) এর পর রুট R কে প্রক্রিয়াকরণ করা হয়।

(c) এর পর রুট Rএর ডান সাবট্রিতে ট্রাভার্স করা হয়।

পোস্ট অর্ডার (Post Order) ঃ

(a) প্রথমে রুট R এর বাম সাবট্রিতে ট্রাভার্স করা হয়।

(b) এর পর রুট R এর ডান সাবট্রিতে ট্রাভার্স করা হয়।

(c) সর্বশেষ রুট R টেস্ট করা হয়।

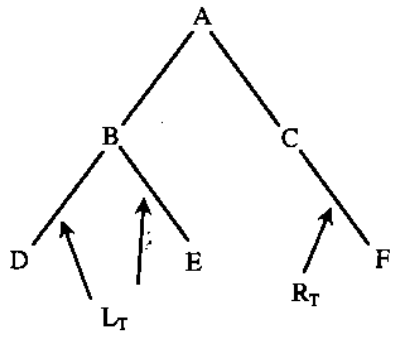
লক্ষ করলে দেখা যায় যে, প্রতিটি এলগরিদম তিনটি একই ধাপ ধারণ করে। এবং সর্বদা R এর ডান সাবট্রি এর পূর্বেই বাম সাবট্রি ট্রাভার্স করা হয়। লগারিদমগুলোর মধ্যে মূল পার্থক্য হচ্ছে সবসময় যাতে রুট R প্রক্রিয়াকরণ হয়। "Pre" এলগরিদম এর ভিতরে সাবট্রির ট্রাভার্সিং হওয়ার পূর্বেই R মূলটির প্রক্রিয়াকরণ (Process) আরম্ভ হয়। "In" এলগরিদম এর ভিতরে সাবট্রি গুলির ট্রাভার্সিং হওয়ার সময় R মূলটির প্রক্রিয়াকরণ আরম্ভ হয়। এবং "Post" এলগরিদমের ভিতরে সাবট্রিগুলির ট্রাভার্সিং (Traversing) হওয়ার পরে R মূলটির প্রক্রিয়াকরণ আরম্ভ হয়।

এই তিনটি এলগরিদমকে কোন কোন সময় বলা হয় যথাক্রমে Node-Left-Righ(NLR) Traversal

Left-node-Right (LNR) Traversal এবং

Left-Right-node(LRN) traversal.

উদাহরণ-৭.১৩।



চিত্র ঃ ৭.১২

সমাধান ঃ চিত্রে একটি বাইনারি ট্রি বিবেচনা করি। এখানে মূলটি A যার বাম সাবট্রি L_T তে আছে B, D এবং E নোডগুলি এবং ডান সাবট্রি R_T তে আছে C এবং F নোড।

(a) T এর Pre-order Traversal এ শুরুতে A প্রসেস হবে, তার পর L_T ট্রাভার্সিং হবে। এরপর R_T ট্রাভার্সিং হবে।

তথাপি L_T এর Preorder traversal পেতে B মূলটিতে শুরু তারপর D এবং E এবং

R_T এর Preorder traversal পেতে C মূলটিতে শুরু এবং তারপর F।

সুতরাং ট্রি T এর Pre-order traversal হবে ABDECF

(b) T এর Inorder Traversal এ প্রথমে L_T ট্রাভার্স হবে, তারপর রুট A Process হবে এবং শেষে R_T ট্রাভার্স হবে।

সুতরাং L_T এর Inorder traversal পেতে শুরু হবে D, B এবং E এবং R_T এর inorder traversal পেতে শুরু হবে C তারপর F.

সুতরাং T এর Inorder traversal হবে DBEACF.

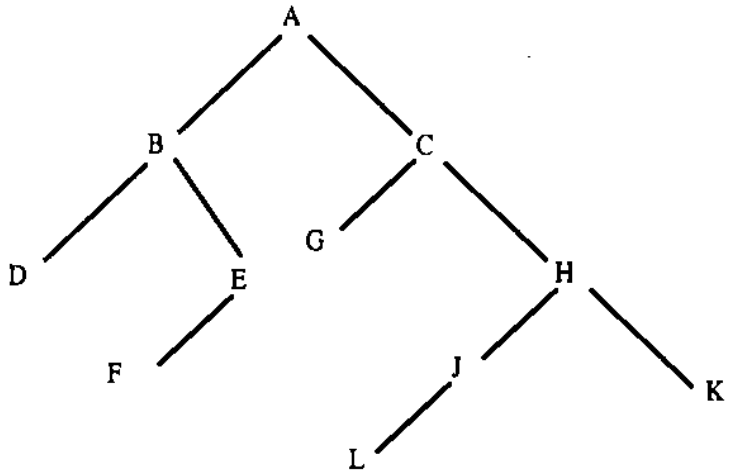
(C) T এর Post-order traversal এ প্রথমে L_T ট্রাভার্স হবে, এরপর R_T ট্রাভার্স হবে এবং শেষে রুট A প্রসেস হবে।

L_T এর Postorder traversal পেতে শুরু হবে D, E এবং B।

R_T এর Postorder traversal পেতে শুরু হবে F এবং C।

সুতরাং T এর Postorder traversal হবে DEBFCA

উদাহরণ-৭.১৪ । নিচের Binary treeটির Preorder, Inorder এবং Postorder লিখ। [বাকাশিবো-২০০৫]



চিত্র ঃ ৭.১৩

সমাধান ঃ উপরিউক্ত চিত্র একটি বাইনারি ট্রি T, এখানে মূল (Root) হল A যার বাম সাবট্রি তে আছে B, D, E, F নোডগুলি এবং ডান সাবট্রিতে আছে C, G, H, J, L, K.

T এর Pre-order traversal হবে A. B. D. E. F. C. G. H. J. L. K

T এর Inorder traversal হবে D. B. F. E. A. G. C. L. J. H. K

T এর Postorder traversal হবে D. F. E. B. G. L. J. K. H. C. A

```
procedure preorder (T : ordered rooted tree)
r : = root of T
list r
for each child c of r from left to right
begin
T (c)  : = subtree with c as its root
preorder ((T (c))
end
```

এলগরিদম ঃ ৭.৪ প্রি-অর্ডার ট্র্যাভার্স

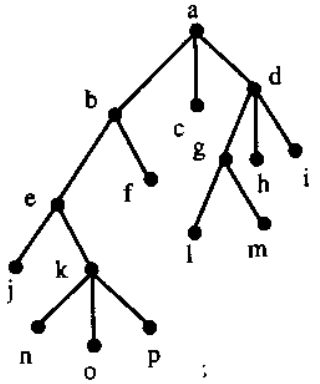
```
Inorder Traversal.
procedure  inorder (T : ordered rooted tree)
r : = root of T
of r is a leaf then list r
else
begin
l : = first child of r from left to right
T ((l) : = subtree with/as its root
inorder (T (l)
list r
for each child c of r except for l from left to right
T ((c) : = subtree with c as its root
inorder (T (c)
end
```

এলগরিদম ঃ ৭.৫ ইন অর্ডার ট্র্যাভার্স

Postorder Traversal.
procedure postorder (*T* : ordered rooted tree)
r : = root of *T*
for each child c of r from left to right
begin
T ((c) : = subtree with c as its root
postorder *(T (c)*
end
list *r*

এলগরিদম ঃ ৭.৬ পোষ্ট অর্ডার ট্র্যাভার্স

উদাহরণ-৭.১৫। নিচের চিত্রের মূলীয় ট্রি T এর শীর্ষ (Vertices) পরিদর্শনে একটি প্রি-অর্ডার ট্র্যাভার্স কোন কোন ক্রম অতিক্রান্ত করে?



চিত্র ঃ ৭.১৪ অর্ডারের মূলীয় বৃক্ষ

চিত্রে একটি প্রি-অর্ডার ট্র্যাভার্সের বিভিন্ন ধাপ দেখান হল।

ট্র্যাভার্স T, প্রি-অর্ডারে মূল a থেকে উপ-ট্রি b, c এবং d আবার b থেকে উপ-ট্রি এর ভার্টিকস্ e এবং f । d থেকে g, h, i উপ-ট্রি e, প্রি-অর্ডার অনুযায়ী j এবং k ভার্টিকস অনুসরণ করে। উপ-ট্রি g প্রি অর্ডার অনুসারে l এবং m অনুসরণ করে। এছাড়া উপ-ট্রি K, প্রি অর্ডার অনুযায়ী ভার্টিকস n, o, p অনুসরণ করে।

এভাবে প্রি-অর্ডার ট্র্যাভার্সাল T. হয় a. b. e. j. k. n. o. p. f. c. d. g. l. m. h. i.

উদাহরণ-৭.১৬। একটি বাইনারী ট্রি T হতে 9 টি নোড আছে। এর Preorder ও Inorder ট্রাভার্সাল নিম্নরূপ ঃ

Preorder :	G	B	Q	A	C	P	D	E	R
Inorder :	Q	B	C	A	G	P	E	D	R

সমাধান ঃ

Preorder :	G	B	Q	A	C	P	D	E	R
Inorder :	Q	B	C	A	G	P	E	D	R

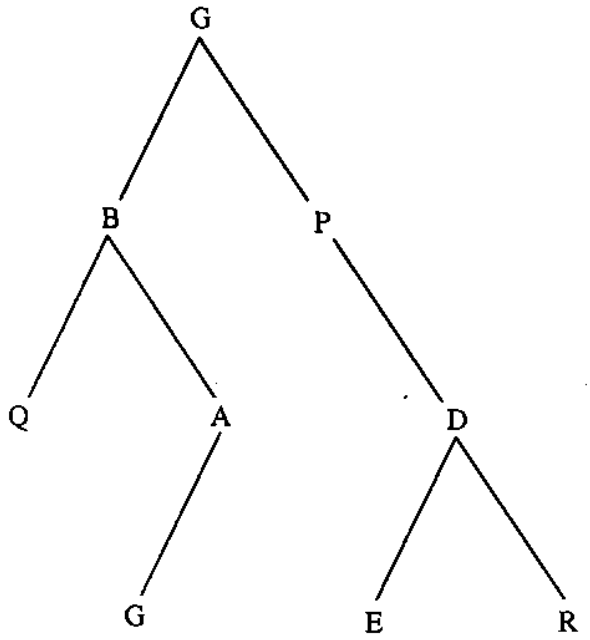
প্রদত্ত Preorder ও Inorder ব্যবহার করে মূল থেকে R পর্যন্ত একটি ট্রি T অঙ্কন করতে নিচের বিষয়গুলো অনুসরণ করতে হবে।

(ক) Preorder এর প্রথম নোডটিকে root হিসেবে বিবেচনা করে T আকতে হবে। সুতরাং G হবে ট্রি T এর মূল বা root.

(খ) G এর বাস চাইল্ড পাবার জন্য প্রথমে T এর Inorder ব্যবহার করে T_1 নামে একটি বাস সাব ট্রি তৈরি করি, যাতে Q, B, C, A থাকে এবং এগুলা T এর Inorder এ G এর বামে রয়েছে। এখন T_1 এর Preorder এর প্রথম নোড B কে তার মূল ধার G এর বাম চাইল্ড বের করি। কাজেই B, G এর বাম চাইল্ড।

(গ) অনুরূপভাবে, G এর ডান সাব ট্রি T_2 নির্ণয় করি, যার মধ্যে P, E, D, R নোডগুলো থাকে এবং P হল T_2 এর মূল। সুতরাং P, G এর ডান চাইল্ড।

(খ) ও (গ) ব্যবহার করে, আমরা নিচে ট্রি T পাই,



চিত্র ঃ ট্রি T

অনুশীলনী-৭

▸▸ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি ঃ

১। ট্রি (Tree) কী?

২। কখন সর্বপ্রথম ট্রি-এর ব্যবহার শুরু হয়?

৩। কোন গণিতবিদ প্রথম ট্রি-এর ব্যবহার করেন?

৪। আর্থার কেলী প্রথম কোন ক্ষেত্রে ট্রি-এর ব্যবহার শুরু করেন?

৫। ট্রি মূলত কী কী অংশে বিভক্ত করা যায়?

৬। সমরূপীয় (Similar Binary Tree) ট্রি কাকে বলে? [বাকাশিবো ২০০৯R]

৭। Extended (বর্ধিত) Binary Tree কাকে বলে? [বাকাশিবো ২০০৯R, ১৩R]

৮। টারমিনাল নোড (Terminal Node) কী?

৯। বাইনারি সার্চ ট্রি বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো ২০০২]

১০। Internal Nodes (অন্তঃস্থ নোড) কী?

১১। External Noded (বহিঃস্থ নোড) কী?

১২। একটি ট্রি এর rতম লেভেলে কত সংখ্যা নোড থাকবে তার সূত্র কী?

১৩। একটি পূর্ণ ট্রি Tr এর গভীরতা বা depth নির্ণয়ের সূত্র লেখ।

১৪। Null Tree কাকে বলে?

১৫। একটি Complete বাইনারি ট্রিতে লোড 11 এর প্যারেন্ট নোড কত?

১৬। একটি পরিপূর্ণ (Complete) বাইনারী ট্রিতে 8 নং লেবেলের কতটি লোড হবে?

▸▸ সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি ঃ

১৭। দ্বিমিক ট্রি (Binary Tree) বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০০৫, ০৭, ০৮, ০৯, ১০R, ১২, ১৩]

১৮। কে সর্বপ্রথম কোন বিষয়ের উপর ট্রি-এর ব্যবহার শুরু করেন?

১৯। ট্রি-এর প্রয়োগ ক্ষেত্র উল্লেখ কর।

২০। ট্রিজকে মূলত কয়ভাগে বিভক্ত করা যায় ও কী কী?

২১। সমরূপ দ্বিমিক ট্রিজ (Similar Binary Trees) বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০০৯R]

২২। ট্রিজের বৈশিষ্ট্য উল্লেখ কর। [বাকাশিবো-২০০২, ২০০৪, ১৩R]

২৩। Complete Binary Tree বলতে কী বুঝ? উদাহরণসহ লিখ। [বাকাশিবো-২০০৩, ০৬, ০৮, ১০R]

২৪। Extended Binary Tree কাকে বলে? [বাকাশিবো-২০০৯R]

২৫। Complete ও Extended Binary Tree এর মধ্যে পার্থক্য লিখ। [বাকাশিবো-২০০৩R, ২০০৪, ১০, ১১R]

২৬। উদাহরণসহ Tree (ট্রি) এর বৈশিষ্ট্যসমূহ লিখ। [বাকাশিবো-২০০২, ২০০৪]

২৭। E = (a-b)/((c * d) + e) এর বাইনারি এক্সপ্রেশন দেখাও। [বাকাশিবো-২০০৭, ১০R)

২৮। একটি পূর্ণট্রি (Complete Binary Tree) যার 31টি নোড আছে। নোড 10 এর অনুজ এবং অগ্রজ বের কর। [বাকাশিবো-২০০৭, ১০, ১৩R]

২৯। নিচের Binary Treeটির Preorder এবং Inorder traversing লিখ। [বাকাশিবো-২০০৫, ০৯]

৩০। Node (নোড) কাকে বলে?

৩১। ২৬ নোড বিশিষ্ট একটি Complete Binary Tree অংকন কর। [বাকাশিবো-২০০৫, ০৬]

৩২। Binary Tree কে সাধারণত কত ভাগে ভাগ করা যায় ও কী কী?

৩৩। গ্রাফ এবং ট্রি এর মাঝে পার্থক্য লেখ। [বাকাশিবো-২০০৯, ১১, ১৩R]

▸▸ রচনামূলক প্রশ্নাবলি ঃ

৩৪। দ্বিমিক বৃক্ষরাজি (Binary Tree) বলতে কী বুঝায় ব্যাখ্যা কর।

৩৫। দ্বিমিক ট্রি (Binary Tree) কে কিরূপে চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়?

৩৬। সমরূপীয় দ্বিমিক ট্রি (Similar Binary Tree) কাকে বলে ব্যাখ্যা কর।

৩৭। পূর্ণ এবং বর্ধনকৃত দ্বিমিক বৃক্ষরাজি (Complete ও Extended Binary Tree) সম্পর্কে যা জান লিখ।

৩৮। একটি পূর্ণ টি যার 26 টি নোড আছে। নোড 10 এর অনুজ এবং অগ্রজ বের কর। [(চিত্র ৭.৪ পূর্ণ দ্বিমিক বৃক্ষরাজি]

৩৯। বাইনারি ট্রি থেকে 2ট্রিতে পরিবর্তন পদ্ধতির ব্যাখ্যা কর।

৪০। দ্বিমিক সার্চ ট্রি (Binary Search Tree) সম্পর্কে যা জান লিখ। [বাকাশিবো-২০০২]

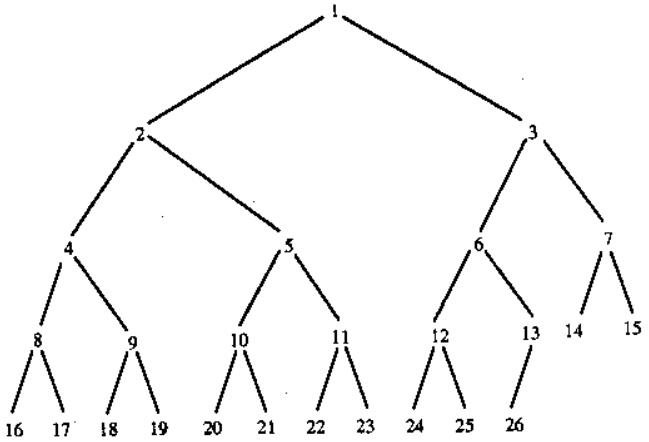
৪১। Traversing Binary Tree (অনুপ্রস্থ প্রিথিক ট্রিজ) সম্পর্কে ব্যাখ্যা কর।
অথবা, Traversing Binary Tree এর Method সমূহ উদাহরণসহ বর্ণনা কর। [বাকাশিবো-২০০৩R, ২০০৪, ০৯R]
অথবা, বাইনারি ট্রি এর ট্রাভার্সিং পদ্ধতিগুলো উদাহরণসহ ব্যাখ্যা কর। [বাকাশিবো-২০০৬, ২০০৭]

৪২। বাইনারি সার্চ ট্রিতে নতুন আইটেম ইনসার্ট করার এলগরিদম উদাহরণের সাহায্যে বর্ণনা কর। [বাকাশিবো-২০০২, ০৫, ০৭]

৪৩। Tree diagram কী? [বাকাশিবো-২০১৪R]

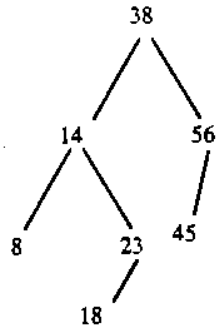
সমস্যাবলি ঃ

১। একটি পূর্ণ ট্রিজ T, যার 26 টি নোড আছে। নোড 12 এর অনুজ এবং অগ্রজ বের কর। [বাকাশিবো-২০১২]



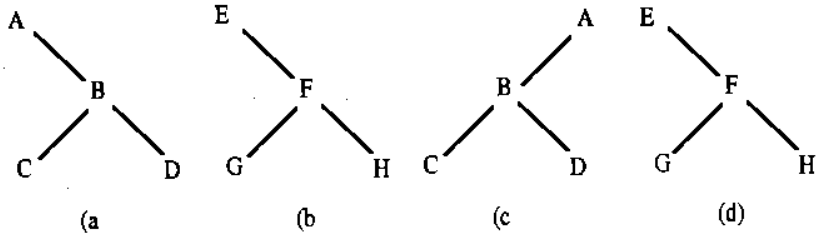
চিত্র ঃ ৭.১৫ পূর্ণ ট্রিজ

২। নিচের চিত্রটি বাইনারি সার্চ টি এক্ষেত্রে 23কে য এবং 40 দিয়ে পরিবর্তিত করা হয়, তবে ঐটি বাইনারি সার্চট্রি হবে কী? যুক্তি উপস্থাপন কর [বাকাশিবো-২০০৭]



চিত্র ঃ ৭.১৬

৩। নিচের চিত্রের চারটি দ্বিমিক ট্রিজের মধ্যে কোনগুলো সমরূপীয় ট্রিজ, কোনগুলো সমছাপ বিশিষ্ট এবং কোন কোনটি সমছাপ নয়?



চিত্র ঃ ৭.১৭ দ্বিমিক ট্রিজ

৪। যদি পূর্ণ ট্রিজ এর নোড, n = 10000000 হয় তবে এর গভীরতা নির্ণয় কর। [উত্তর ঃ 201]

৫। ধরা যাক, যে কেউ একজন চেইন লেটার (Chain letter) শুরু করেন। প্রতিজন যে লেটার প্রাপ্ত হয় তাকে অন্য পাঁচজনের নিকট উক্ত পত্রটি পাঠাতে অনুরোধ করা হলো। কেউ কেউ এরূপ করল, কিন্তু অন্যান্যরা তা করল না। যদি কেউই একাধিক লেটার প্রাপ্ত না হয় এবং যদি এই চেইন লেটার যারা পড়ে, 100 জনে সমাপ্তি ঘটে কিন্তু পাঠায় না। তবে প্রথমজন সহ কতজনে এই পত্রটি দেখেছে এবং কতজনে পাঠায়? [উত্তর ঃ 124, 24]

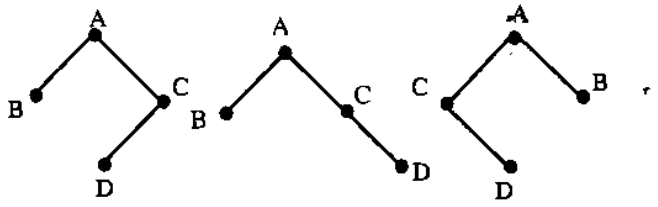
৬। সর্বাধিক m^h লিভস (Leaves) বিশিষ্ট m অ্যারে ট্রিজের উচ্চতা নির্ণয় কর। [**উত্তর ঃ** lon]

৭। Mathematic, physics, Geography, zoology, Meterology, Geology, Psychology, Chemistry, Biology এবং Botany এর শব্দগুলোর বর্ণমালার ক্রম অনুযায়ী বাইনারি সার্চ ট্রি গঠন কর।

৮। ধরা T হল দ্বিমিক বৃক্ষরাজি মেমোরিতে সংরক্ষিত [চিত্র ৭. ( )]। T এর ডায়াগ্রাম অংকন কর।

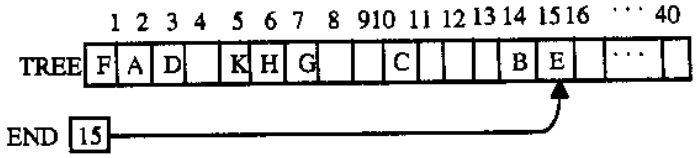
৯। নিচের চিত্রে তিনটি ট্রি T_1, T_2, T_3 দেয়া আছে, চিহ্নিত কর ঃ

(i) রুটেড ট্রি (ii) অর্ডারেড রুটেড ট্রি (iii) বাইনারি ট্রি।



চিত্র ঃ ৭.১৮

১০। চিত্র নং ৭.( )-এ প্রদর্শিত দ্বিমিক চিত্র লেখ T ধারাবাহিক অনুক্রম মেমোরিতে সাজাও।



চিত্র ঃ ৭.১৯ দ্বিমিক ট্রি

১১। একটি পূর্ণ ট্রি যার 31টি নোড আছে। নোড 10 এর অনুজ এবং অগ্রজ বের কর। [বাকাশিবো-২০০৭, ১০R, ১২]

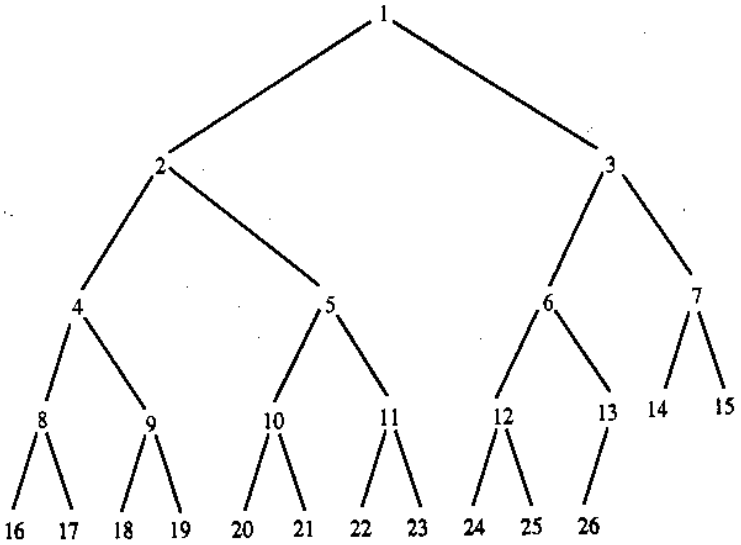
আমরা জানি, K নোডের অগ্রজ $= \frac{K}{2}$ এবং অনুজ $= 2k$ এবং $2k+1$

এখানে $k = 10$

$\therefore$ অনুজদ্বয় $= 2 \times 10 = 20$ এবং $2 \times 10 + 1 = 21$

এবং অগ্রজ $= \frac{10}{2} = 5$

$\therefore$ 10 এর অগ্রজ 5 এবং অনুজদ্বয় 20 ও 21



চিত্র ঃ ৭.১৫ পূর্ণ ট্রিজ

অনুশীলনী-৭ এর সমাধান

▸▸ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

১। ট্রিজ হল একটি সংযুক্ত চিত্র লেখ (A connected Graph) যা কোন সাধারণ আবর্তন (Simple circuit) কে ধারণ করে না।

২। ১৮৫৭ সালে সর্বপ্রথম ট্রি এর ব্যবহার শুরু হয়।

৩। ইংরেজ গণিতবিদ আর্থার কেলী প্রথম ট্রি-এর ব্যবহার করেন।

৪। ইংরেজ গণিতবিদ আর্থার কেলী নির্দিষ্ট ধরনের রাসায়নিক যৌগ গণনার প্রয়োজনে ট্রি এর ব্যবহার শুরু করেন।

৫। ট্রিজকে মূলত দু'টি অংশ বিভক্ত করা যায়-

১। মূলীয় বৃক্ষরাজি (Rooted Trees) এবং

২। দ্বিমিক বৃক্ষরাজি (Binary Trees)।

৬। দ্বিমিক ট্রি T এবং T' কে সমরূপ বলা হবে যদি তাদের একই অবয়ব (Structure) থাকে।

৭। কোন বাইনারি ট্রি T কে 2-trees অথবা Extended binary tree বা বর্ধিত বাইনারি ট্রি বলা হবে যদি সে ট্রি এর প্রত্যেক নোডে 2 টা Children থাকে অথবা কোন children থাকে না। অর্থাৎ প্রত্যেকটি নোড N এর সাথে হয় 2 অথবা 0 Children থাকবে।

৮। যে সাবট্রির আর কোন সাকসেসর (Successor) থাকে না, তাকে টারমিনাল (terminal) নোড বলে।

৯। ধরি T হল বাইনারি সার্চ ট্রি। যদি T এর প্রত্যেকটি node N নিম্নবর্ণিত বৈশিষ্ট্য মেনে চলে। তবে T কে বাইনারি সার্চ ট্রি বলা হয়।

(i) যদি N নোডের মান ; N নোডের বাম সাব ট্রি এর মান অপেক্ষা বৃহত্তর। অর্থাৎ $N > M$ এবং

(ii) যদি N নোডের মান ; N নোডেল ডান সাব ট্রির সকল মানের চেয়ে ছোট। অর্থাৎ $N < M$.

১০। যে নোডের দু'টি children থাকে সে Node কে বলা হয় Internal nodes (অন্তঃস্থ নোড)।

১১। যে নোডের 0 টি children থাকে তাকে বলা হয় External nodes (বহিঃস্থ নোড)।

১২। $2^{r+1} - 1$ [r = level সংখ্যা)]

১৩। depth বা গভীরতা $d_n = \log_2 n+1$

১৪। Null Tree একটি বাইনারি ট্রি T যদি ফাকা সেট হয়, তবে তাকে Null Tree বলা হয়।

১৫। একটি পরিপূর্ণ বাইনারি ট্রিতে নোড 11 এর প্যারেন্ট নোড হবে $\frac{11}{2} = 5$.

১৬। একটি Complete বাইনারি ট্রিতে 8নং লেবেলের নোড সংখ্যা হবে $28 = 256$ টি।

▸▸ সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ঃ

১৭। একটি সংযুক্ত চিত্রলেখ (A connected graph) বা কোন সাধারণ আবর্তন (Simple circuit) ধারণ করে না তাকে দ্বিমিক ট্রিজ (Binary Trees) বলা হয়। কম্পিউটার বিজ্ঞানে ট্রি একটি অতি প্রয়োজনীয় বিষয়।

১৮। ইংরেজ গণিতবিদ আর্থার কেলী (Arthur Cayley) সর্বপ্রথম নির্দিষ্ট ধরনের রাসায়নিক যৌগ গণনার প্রয়োজনে ট্রি ব্যবহার করেন।

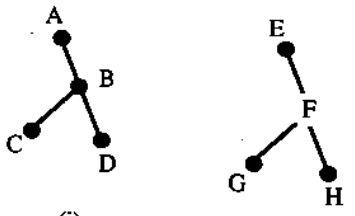
১৯। কম্পিউটার বিজ্ঞানের কর্মক্ষম এলগরিদম নির্মাণে (Construct Efficient Algorithms), সবচেয়ে কম খরচে বিতরণকৃত (Distributed) কম্পিউটার সমূহের মধ্যে টেলিফোন তারের মাধ্যমে নেটওয়ার্ক নির্মাণ করা, ডেটা জমান (Data store) এবং স্থানান্তর (Transmitting) এর জন্য কর্মক্ষম কোড নির্মাণ ইত্যাদি ট্রিজের মাধ্যমে অত্যন্ত সুন্দর, সহজ ও নির্ভুলভাবে সম্পন্ন করা যায়।

২০। ট্রিজকে মূলত দুভাগে বিভক্ত করা যায়। যথা–

১। মূলীয় বৃক্ষরাজি (Rooted Trees) এবং

২। দ্বিমিক বৃক্ষরাজি (Binary Trees) ।

২১। দুটি দ্বিমিক ট্রিজ T এবং T′ কে সমরূপ বলা হবে যদি তাদের গঠন একই হয়। অন্য কথায় যদি তাদের একই আকৃতি থাকে। যেমন ঃ



(i) (ii)

উপরের চিত্রের (i) এবং (ii) নং ট্রিজদ্বয় সমরূপ 'ট্রিজ'।

একটি ট্রি নিম্নলিখিত বৈশিষ্ট্য সমূহ মেনে চলে

(a) একটি রুট (Root) নোড থাকবে, যার লেভেল 0 (শূন্য)।

(b) ট্রি এর লেভেল সংখ্যা যত হবে, ট্রি এর depth (গভীরতা) তার চেয়ে এক বেশি হবে। অর্থাৎ যদি কোন ট্রি এর সবশেষ Level L হয়, তবে depth, d = L + 1

(c) কোন প্যারেন্ট নোড এর ২টি children থাকবে, অথবা কোন children থাকবে না এবং 1টি child ও থাকতে পারে।

(d) যে ট্রি এর n সংখ্যক নোড আছে, সে ট্রি এর বাহু (edge) সংখ্যা হবে (n – 1)

(e) যদি কোন ট্রি এর Internal node সংখ্যা i হয়, তাহলে internal nodes, $i = \frac{n-1}{2}$ (n = মোট নোড সংখ্যা)

ধরা যাক, একটি বাইনারি ট্রি T, T এর প্রত্যেক নোডে 2টি children আছে। T এর rতম লেভেলে সর্বাধিক 2^r সংখ্যক নোড থাকবে।

ট্রি T কে complete বা সম্পূর্ণ বা পূর্ণ ট্রি বলা হবে, যদি এর সর্বশেষ level ছাড়া অন্য সব level এ প্রয়োজনীয় সংখ্যক সর্বাধিক নোড থাকে এবং এর শেষ level এর সকল নোড যতটা সম্ভব বামে থাকবে।

সুতরাং প্রকৃত n নোড যুক্ত T_n কে একটি কমপ্লিট ট্রি বলা হবে, যার নোড সংখ্যা n

২৪। কোন বাইনারি ট্রি কে 2-trees অথবা Extended binary tree বা বর্ধিত বাইনারি ট্রি বলা হবে যদি সে ট্রি এর প্রত্যেক নোডে 2টা children থাকে অথবা কোন child থাকে না। অর্থাৎ প্রত্যেকটি নোড N এর সাথে হয় 2 অথবা 0 children থাকবে।

২৫। ট্রি T কে complete Tree বা পূর্ণ ট্রি বলা হবে যদি এর সর্বশেষ level ছাড়া অন্য সব level এ প্রয়োজনীয় সংখ্যক সর্বাধিক নোড থাকে এবং এর শেষ level এর সকল নোড যতটা সম্ভব বামে থাকে।

কোন বাইনারি ট্রি কে Extended binary tree বা বর্ধিত বাইনারি ট্রি বলা হবে যদি সে ট্রি এর প্রত্যেক নোডে 2টা children থাকে অথবা কোন child থাকে না।

২৬। একটি ট্রি নিম্নলিখিত বৈশিষ্ট্য সমূহ মেনে চলে

(a) একটি রুট (Root) নোড থাকবে, যার লেভেল 0 (শূন্য)।

(b) ট্রি এর লেভেল সংখ্যা যত হবে, ট্রি এর depth (গভীরতা) তার চেয়ে এক বেশি হবে। অর্থাৎ যদি কোন ট্রি এর সবশেষ Level L হয়, তবে depth, d = L + 1

(c) কোন প্যারেন্ট নোড এর ২টি children থাকবে, অথবা কোন children থাকবে না এবং 1টি child ও থাকতে পারে।

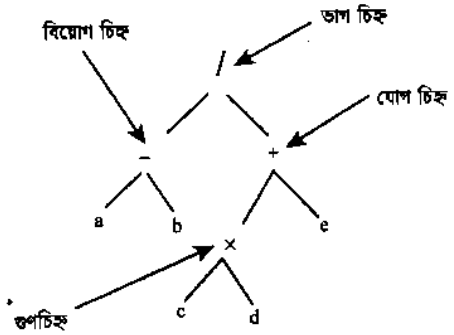
(d) যে ট্রি এর n সংখ্যক নোড আছে, সে ট্রি এর বাহু (edge) সংখ্যা হবে (n – 1)

(e) যদি কোন ট্রি এর Internal node সংখ্যা i হয়, তাহলে internal nodes, $i = \frac{n-1}{2}$ (n = মোট নোড সংখ্যা)

২৭। দেয়া আছে,

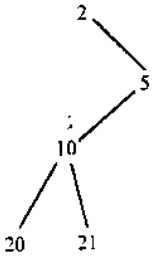
এক্সপ্রেশন E = (a + b) / ((c × d) + e)

E এক্সপ্রেশনকে দু'ভাগে ভাগ করা যায়। প্রথম ভাগ = (a + b) এবং দ্বিতীয় ভাগ = (c × d) + e) এর পর দ্বিতীয় ভাগকে আবার (c × d) এবং e দু'ভাগে ভাগ করা যায়।



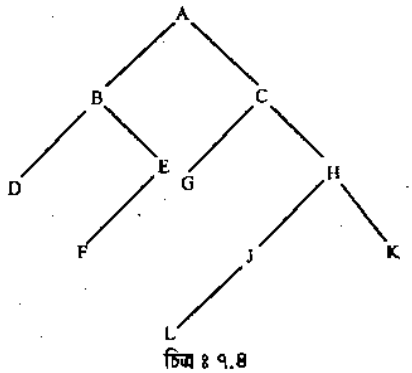
চিত্র ঃ ৭.২

২৮।



চিত্র ঃ ৭.৩

২৯।



চিত্র ঃ ৭.৪

উপরিউক্ত চিত্র একটি বাইনারি ট্রি T। এখানে মূল (Root) হল A যার বাম সাবট্রিতে আছে B, D, E, F নোডগুলো এবং ডান সাবট্রিতে আছে C, G, H, J, L, K

T এর Pre order traversing হবে = ABDEFCGHJLK

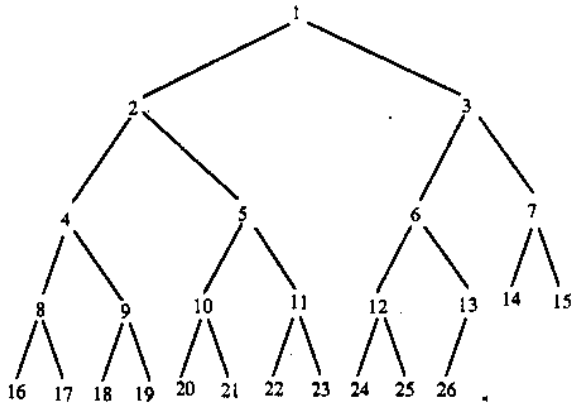
T এর Inorder traversing হবে = DBFEAGCLJHK

৩০। ধরা যাক, T একটি ট্রি, R হল T এর রু, বা মূল। T_1, T_2 হলো T এর দু'টি সাবট্রি। T_1 এবং T_2 নিচ্ছেদ। এরপর যদি বলা হয় যে, রুট বা মূল R নেই।

তবে সাবট্রি T_1 এবং T_2 আলাদা 2টি ট্রি হয়ে যাবে। আর যদি রুট বা মূল R থাকে তবে আমরা T_1 কে বলব রুট R এর বাম সাকসেসর (left successor) এবং T_2 কে বলব R এর ডান সাকসেসর (Right successor)।

এভাবে T_1 এবং T_2 তে ও দু'টি করে সাকসেসর থাকতে পারে। অর্থাৎ T_1 এবং T_2 এর অধীনে সাবট্রিতে থাকতে পারে। এ সাবট্রিকেই আমরা নোড N বলে থাকি।

৩১।



চিত্র ঃ ৭.৫

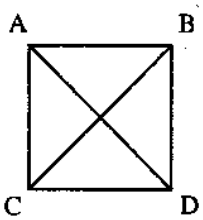
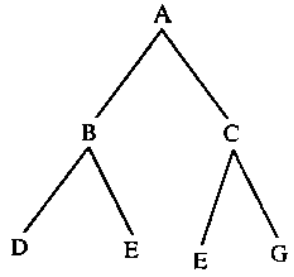
কম্প্লিট বাইনারি ট্রি T_{26}

৩২। বাইনারি ট্রি (Binary Tree) কে 2টি বিশেষ প্রকারে ভাগ করা হয়েছে-

(i) সম্পূর্ণ বাইনারি ট্রি (Complete Binary Tree)

(ii) বর্ধিত বাইনারি ট্রি (Extended Binary Tree)।

৩৩। গ্রাফ ও ট্রি এর মধ্যে পার্থক্য নিম্নরূপ ঃ

গ্রাফ	ট্রি
১। গ্রাফ হল একটি ডিক্রিট স্ট্রাকার যা শীর্ষ ও বাহুর দ্বারা গঠিত।	১। ট্রি হল একটি চিত্রলেখ। যা কোন সাধারণ আবর্তনকে ধারণ করেনা।
২। গ্রাফের উপাদান হল ঃ নোড এবং বাহু।	২। ট্রির উপাদান হল-বাহু, পাথ, শাখা পাতা, রুট, গভীরতা ও লেবেল।
৩। আঠার শতকে বিখ্যাত সুইচ গণিতবিদ লিওনার্দো অয়লার সর্বপ্রথম গ্রাফের ধারণা দেন।	৩। ১৮৫৭ সালে ইংরেজ গণিতবিদ আর্থার কেলী প্রথম Tree ব্যবহার করেন।
৪। গ্রাফের মধ্যে Edges, Vertex এবং সেট রিলেশন তৈরি করে	৪। ট্রি এর মধ্যে এক rode অন্য rode অন্য rode এর সাথে সংযুক্ত থাকে।
৫। গ্রাফে Loop থাকতে পারে	৫। ট্রি এর মধ্যে Loop নেই।
৬। এটি জটিল প্রকৃতির	৬। ট্রি তুলনামূলক সহজ প্রকৃতির।
৭। বিভিন্ন ধরনের গ্রাফ তৈরি করা যায়। যথা ঃ (i) মাল্টিগ্রাফ, (ii) সাবগ্রাফ, (iii) আইসোমরফিক, (iv) হোমোজরপিক গ্রাফ।	৭। বিভিন্ন ধরনের ট্রি তৈরি করা যায়। যথা ঃ (i) সাব ট্রি, (ii) পরিপূর্ণ ট্রি, (iii) বর্ধিত টি, (v) বাইনারি ট্রি ও (v) সমরুপীয় ট্রি।
৮। গ্রাফের যাধ্যমে কম দুরত্ব নির্ণয় করা হয়।	৮। ট্রি দ্বারা সাজানো ও সংযোজন করা হয়।
৯। গ্রাফের চিত্র ঃ 	৯। ট্রি এর চিত্র ঃ 

▶ রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ঃ

৩৪। বাইনারি ট্রি (Binary Tree) হল গণিত এবং কম্পিউটার বিজ্ঞানের মৌলিক কাঠামো। মূলীয় ট্রি (Rooted Tree) এর কতকগুলো পরিভাষা হল এজ (Edge), পথ (Path), ব্রাঞ্চ (Branch), লিফ (leaf), ডেপথ (Depth) এবং লেভেল সংখ্যা (level Number) প্রভৃতি বাইনারি ট্রি এর জন্য ব্যবহৃত হয়।

Binary Tree তে ভারটেক্স এর পরিবর্তে নোড (Node) পরিভাষায় ব্যবহৃত হয়।

একটি বাইনারি ট্রি T হলো একটি সসীম সেটের উপাদান (Finit set) যার সদস্য হলো কতগুলো নোড (Node)। একেক নোড থেকে একটি বা দু'টি নোড উৎপন্ন হয়। এরূপ ট্রিকে বাইনারি ট্রি (Binary Tree) বলা হয়।

সুতরাং বলা যায়-

(i) T হল খালি বা নাল ট্রি (Null Tree) অথবা খালি ট্রি (empty Tree)। অর্থাৎ T সেটে কোন নোড (Node) নেই।

(ii) T সেট যদি খালি সেট না হয়, তবে এর একটি আলাদা নোড R আছে, যাকে T এর রুট বা মূল বলা হয়।

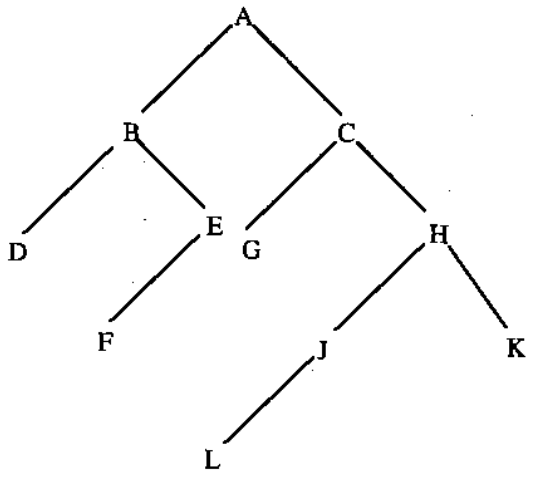
ধরা যাক, T একটি ট্রি। R হল T এর রুট বা মূল। T_1, T_2 হলো T এর দু'টি সাবট্রি (subtree)। T_1, T_2 নিচ্ছেদ। এরপর যদি বলা হয় যে, রুট বা মূল R নেই, তবে সাবট্রি T_1 এবং T_2 আলাদা 2টি ট্রি হয়ে যাবে। আর যদি রুট বা মূল R থাকে তবে আমরা T_1 কে বলব রুট R এর বাম সাকসেসর (left successor) এবং T_2 কে বলব R এর ডান সাকসেসর (Right successor)।

এভাবে T_1 এবং T_2 তেও দু'টি করে সাকসেসর থাকতে পারে। অর্থাৎ T_1 এবং T_2 এর অধীনে সাবট্রি থাকতে পারে। এ সাবট্রিকেই আমরা নোড N বলে থাকি।

সে সাবট্রির আর কোন সাকসেসর (Successor) থাকে না, তাকে টারমিনাল (terminal) নোড বলে।

সুতরাং T এর মধ্যে প্রত্যেক নোড N এর সাকসেসর 0 অথবা 1 অথবা 2 থাকে।

৩৫। সাধারণত একটি বাইনারি ট্রি T কে উপস্থাপন করা হয় সমতলে একটি ডায়াগ্রাম (Diagram) এর সাহায্যে যাকে বাইনারি ট্রি চিত্র (picture of binary Tree) বলা হয়। নিম্নে বাইনারি ট্রি এর চিত্রটি দেখানো হল-



চিত্র ঃ ৭.৬

উপরিউক্ত চিত্রটিকে ধরি ট্রি T-

(i) T তে ১১টি নোড আছে। যাদেরকে I ব্যতীত A হতে L অক্ষরগুলি দ্বারা প্রকাশ করা হয়েছে।

(ii) চিত্রটি উপরে যে Node A আছে, তাহলো ট্রি T এর রুট বা মূল।

(iii) B হচ্ছে A নোডের বাম সাকসেসর (left successor) এবং C হচ্ছে A নোডের ডান সাকসেসর (Right successor)।

(iv) A মূল বা রুটটির বাম সাবট্রিতে নোড B, D, E, F গঠিত হয়েছে এবং A মূলটির ডান সাবট্রিতে নোড C, G, H, J, K এবং L গঠিত হয়েছে।

(v) D, E হচ্ছে B নোডের যথাক্রমে বাম সাকসেসর ও ডান সাকসেসর।

(vi) F হচ্ছে D নোডের বাম সাকসেসর।

(vii) G, H হচ্ছে C নোডের যথাক্রমে বাম ও ডান সাকসেসর।

(viii) J, K হচ্ছে H নোডের যথাক্রমে বাম ও ডান সাকসেসর।

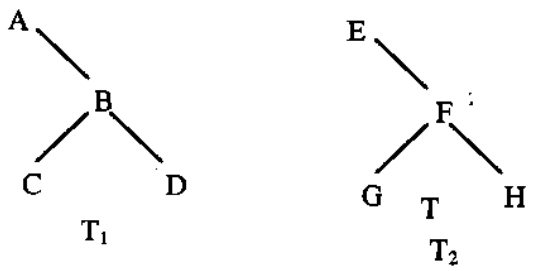
(ix) L হচ্ছে J নোডের বাম সাকসেসর

(x) চিত্রে D, F, G, L, K হচ্ছে টার্মিনাল নোড (terminal node)। কারণ এ নোডগুলোর কোন সাকসেসর নেই।

(xi) E এবং J নোডের একটি করে সাকসেসর আছে।

৩৬। **Similar Binary Tree ঃ** দুটি বাইনারি ট্রিকে সদৃশ বাইনারি ট্রি (Similar Binary) Tree বলা হবে যদি সে দু'টির গঠন বা আকৃতি একই রকম হয় এবং ট্রি দু'টি একটিকে অপরটির কপি (copies) বলা হবে যদি তারা সমরূপ/সদৃশ্য হয় এবং যদি তাদের একই নোড থাকে।

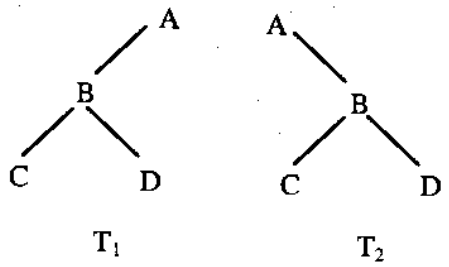
উদাহরণ ঃ



চিত্র ঃ ৭.৭

উপরের চিত্রে দুটি ট্রি T_1 এবং T_2 দেয়া হলো, উক্ত ট্রি দু'টি সমরূপ ট্রিজ। কারণ তাদের গঠন একই। কিন্তু নোডের নাম ভিন্ন হওয়ায় T_1,T_2 একটি অপরটির কপি নয়। যদি T_2 ট্রি এর নোডের নাম E, F, G, H এর পরিবর্তে যথাক্রমে A, B, C এবং D বসানো হয় তবে ট্রি T_1,T_2 এর কপি হবে।

উদাহরণ ঃ



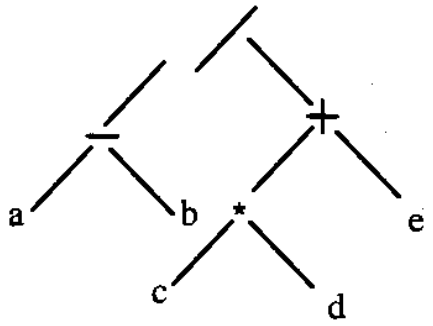
চিত্র ঃ ৭.৮

উপরের চিত্রে T_1 এবং T_2 ট্রি দুটি লক্ষ করি। চিত্রে T_1,T_2 এর গঠন ভিন্ন যদিও এদের নোডের নাম একই। ট্রি T_1 এর রুট নোড A এবং বাম সাকসেসের (Left successor) হচ্ছে B_1। অপরদিকে T_2 ট্রিতে রুট নোড A এর ডান সাকসেসর (Right successor) হচ্ছে B। সুতরাং T_1 এবং T_2 সমরূপ ট্রি নয়।

বাইনারি ট্রিতে এলজ্যাবরার এক্সপ্রেশন (Algebraic Expressions) ঃ

ধরি, এক্সপ্রেশন $E = (a - b)/((c \times d) + e)$

E এক্সপ্রেশনকে দু'ভাগে ভাগ করা যায়। প্রথম ভাগ = $(a - b)$ এবং দ্বিতীয় ভাগ = $((c \times d) + e)$ এর পর দ্বিতীয় ভাগকে আবার $(c \times d)$ এবং e এ দু'ভাগে ভাগ করা যায়।



চিত্র ঃ ৭.৯

উপরিউক্ত চিত্রে এক্সপ্রেশন E কে বাইনারি ট্রি হিসেবে দেখানো হয়েছে। কারণ এর টার্মিনাল নোড এ প্যারামিটার আছে। রুটসহ অন্যান্য নোডে /, –, +, × ইত্যাদি অপারেটরগুলো দেয়া হয়েছে।

৩৭। বাইনারি ট্রিকে 2টি বিশেষ প্রকারে ভাগ করা হয়েছে–

(i) সম্পূর্ণ বাইনারি ট্রি (complete Binary Trees)

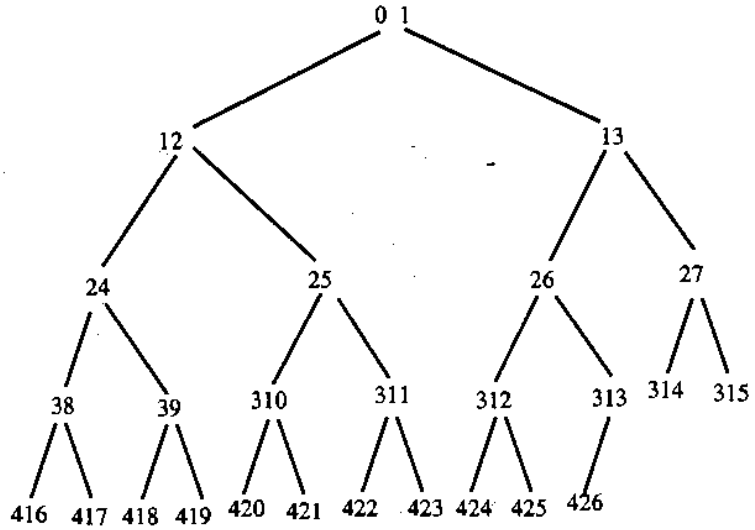
(ii) বর্ধিত বাইনারি ট্রি (Extended Binary Trees)

(i) সম্পূর্ণ বাইনারি ট্রি ঃ ধরা যাক, একটি বাইনারি ট্রি T। T এর প্রত্যেক নোডে 2টি চিলড্রেন (children) বা সন্তান আছে। T এর r 6তম লেভেলে সর্বাধিক 2^r সংখ্যক নোড থাকবে।

ট্রি T কে complete tree বা সম্পূর্ণ ট্রি বলা হবে, যদি এর সর্বশেষ Level ছাড়া অন্য সব Level এ প্রয়োজনীয় সংখ্যক সর্বাধিক নোড থাকে এবং এর শেষ Level এর সকল নোড যতটা সম্ভব বামে থাকে।

সুতরাং প্রকৃত n নোড যুক্ত T_n কে একটি কমপ্লিট ট্রি বলা হবে, যার নোড সংখ্যা n

উদাহরণ ঃ



চিত্র ঃ ৭.১০ কমপ্লিট ট্রি T_{26}

উপরের T_{26} কে বিশ্লেষণ করলে নিম্ন বর্ণিত তথ্যাদি পাওয়া যায়-

১। উপরের ট্রি এর সংখ্যাগুলো এমনভাবে দেয়া আছে, সংখ্যার প্রথম অংক Level প্রকাশ করে এবং বাকি অংকগুলো মান প্রকাশ করে।

ধরি, 424 এর অর্থ এ নোডের Level হল 4 এবং মান হল 21।

২। এ ট্রিতে o Level, 1 Level, 2 Level এবং 3 Level এ প্রত্যেক নোড পূর্ণ 4 Level এ সবগুলো পূর্ণ নয়। 5 Level এ নোড খালি আছে।

অর্থাৎ সর্বশেষ Level এর নোড পূর্ণ নয় এবং 4 Level এর নোডগুলোকে যথা সম্ভব বাম দিকে লেখা হয়েছে।

৩। ট্রি T_{26} এর সর্বসাকুল্যে নোড সংখ্যা 26 এটি একটি কমপ্লিট ট্রি।

উপরে বর্ণিত ট্রিতে আরো কিছু বিষয় লক্ষ করা যায়-

(a) কোন প্যারেন্ট (Parent node) নোডের যে মান, তার প্রথম চাইল্ড (child) বা সন্তানের মান তার দ্বিগুণ এবং দ্বিতীয় child বা সন্তানের মান প্রথম child এর 1 বেশি। অর্থাৎ প্যারেন্ট নোডের মান যদি k হয়, তবে প্রথম child এর মান = 2k আর তার পরের child এর মান (2x k + 1)

(b) এ ট্রিতে Level আছে 0, 1, 2, 3, 4। সর্বশেষ Level হচ্ছে 4। ট্রি T_{26} এর 4 নম্বর Level এ মোট নোড সংখ্যা = 24 = 16, 16 কিন্তু আমরা দিয়েছে 11টি।

(c) এ ট্রিতে মোট নোড সংখ্যা $= 2^{r+1}-1$ [rLevel সংখ্যা]

$= 2^{4+1} - 1$

$= 2^5 - 1$

$= 32 - 1$

$= 31$ টি নোড

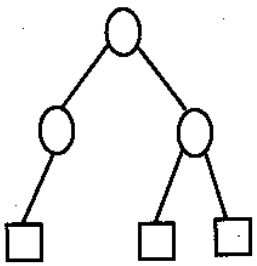
কিন্তু আমরা এ ট্রিতে নোড দিয়েছি 26 টি

(d) N নোড যুক্ত একটি কমপ্লিট ট্রি T_n এর depth বা গভীরতা $d_n = \log_2 (n + 1)$

(ii) বর্ধিত বাইনারি ট্রি ঃ কোন বাইনারি ট্রি T কে 2 trees অথবা Extended binary tree বা বর্ধিত বাইনারি ট্রি বলা হবে যদি সে ট্রি এর প্রত্যেক নোডে 2 টা children থাকে অথবা কোন children থাকে না। অর্থাৎ প্রত্যেকটি নোড N এর সাথে হয় 2 অথবা 0 Children থাকবে।

এরূপ ক্ষেত্রে যে নোডের দুটি Children থাকে সে Node কে বলা হয় Internal nodes এবং যে নোডের 0টি Children থাকে তাকে বলা হয় external nodes। সাধারণত Internal নোডকে একটি বৃত্তাকৃতি চিহ্ন (0) দিয়ে প্রকাশ করা হয় এবং External নোডকে একটি বর্গাকৃতি চিহ্ন (□) দিয়ে প্রকাশ করা হয়।

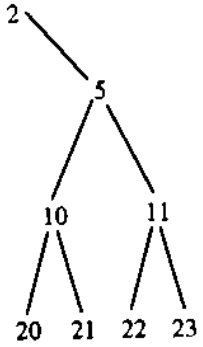
উদাহরণ ঃ নিম্নের চিত্রে বর্ণিত ট্রি টি Externded Binary Tree কিনা, নির্ণয় করি।



চিত্র ঃ ৭.১১

সমাধান ঃ উপরে বর্ণিত ট্রি টি Externded Binary Tree নয়। কারণ উক্ত ট্রিতে এমন একটি নোড আছে যার একটি মাত্র অগ্রজ বা Parents আছে।

৩৮।



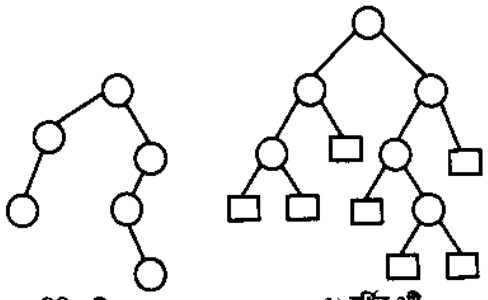
চিত্র ঃ ৭.১২

৩৯। **বর্ধনকৃত দ্বিমিক বৃক্ষরাজি (Extended Binary trees) ঃ** 2 ট্রিজ একটি দ্বিমিক বৃক্ষরাজি, T কে 2 ট্রিজ অথবা বর্ধনকৃত ট্রি (Extended Trees) বলা হবে যদি প্রতি নোড N এর 0 বা 2 অনুজ থাকে। এরূপ ক্ষেত্রে, দুই অনুজ বিশিষ্ট নোডকে অন্তঃস্থ নোড এবং 0 বিশিষ্ট নোডকে বহিঃস্থ নোড বলা হয়। মাঝে মাঝে এদের মধ্যে পার্থক্য সূচিতকরণের জন্য অন্তঃস্থ নোডকে চিত্রে বৃত্ত এবং বহিঃস্থ নোডকে বর্গক্ষেত্র দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

"বর্ধিত দ্বিমিক বৃক্ষরাজি" পরিভাষাটি নিম্নবর্ণিত কার্যাবলি থেকে এসেছে। ধরা যাক, যে কোন দ্বিমিক বৃক্ষ T [চিত্র ৭.৫]। তখন প্রতি খালি উপ-ট্রি নতুন নোড দ্বারা পরিবর্তিত করে T কে 2 ট্রিতে পরিবর্তন করা যাবে। লক্ষ করলে দেখা যায় যে, নতুন ট্রি বাস্তবিক অর্থে একটি 2ট্রি।

এছাড়াও মূল ট্রি, T এর নোডগুলো বর্ধিত দ্বিমিক ট্রিজে অন্তঃস্থ নোড এবং নতুন নোডগুলো বর্ধিত দ্বিমিক টিজে বহিঃস্থ নোড হয়েছে।

নিচের চিত্রে একটি দ্বিমিক ট্রিকে 2 ট্রিতে পরিবর্তন প্রক্রিয়া দেখান হয়েছে।



(a) দ্বিমিক ট্রি T (b) বর্ধিত 2টি

চিত্র ঃ ৭.১৩ বাইনারি ট্রি থেকে 2ট্রিতে পরিবর্তন

৪০। কম্পিউটার বিজ্ঞানে ডাটা Structure এর অতীব গুরুত্বপূর্ণ হল বাইনারি সার্চ ট্রি। যখন আইটেম (ITEM) গুলো সম্পূর্ণ ক্রমানুযায়ী থাকে তখন Average running time, $f(n) = 0(\log^n_2)$ রেখে উক্ত তালিকা থেকে দক্ষতার সাথে নির্দিষ্ট আইটেম শনাক্তকরণই হল বাইনারি সার্চ ট্রি এর প্রাথমিক লক্ষ্য। (যেখানে n হল ভিন্ন ভিন্ন ডাটা আইটেম সংখ্যা)

সুতরাং আমরা বলতে পারি, Binary search Tree নিম্নলিখিত 2টি গঠনে কাজ করে।

(i) Sorted linear array (ii) Linked list

(i) Sorted linear array ঃ একটি উপাদানে Average running time $f(n) = 0 (\log^n_2)$ হওয়ায় Sorted linear array থেকে খুব সহজে নির্দিষ্ট আইটেম (ITEM) শনাক্ত করে খুঁজে খুঁজে বের করে। যেহেতু উপাদানের গড়মান 0(n) পরিবর্তনশীল রাশির সাথে জড়িত। তাই ইহা Insert (সংযোজন) ও Delete (মুছে ফেলা) করা কঠিন।

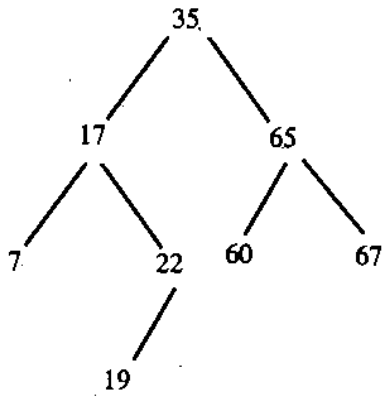
(ii) Linked list ঃ এখানে যে কেহ সহজভাবে উপাদানকে Insert (সংযোজন) ও Delete (মুছিয়ে ফেলতে) করতে পারে। কিন্তু যেহেতু running time $f(n) = 0(n)$। তাই এতে উপাদান Insert (সংযোজন) ও Delete (বিয়োজন) করাও কঠিন।

বাইনারি সার্চ ট্রি এর সংজ্ঞা ঃ ধরি, T হল বাইনারি সার্চ ট্রি। যদি T এর প্রত্যেকটি নোড N নিম্নবর্ণিত বৈশিষ্ট্য মেনে চলে। তবে T কে বাইনারি সার্চ ট্রি বলা হবে।

(i) যদি N নোডের মান, N নোডের বাম সাবট্রির মান অপেক্ষা বৃহত্তর হয়। অর্থাৎ $N > M$ এবং

(ii) যদি N নোডের মান; N নোডের ডান সাবট্রির সকল মানের চেয়ে ছোট হয়। অর্থাৎ $N < M$.

উদাহরণ ঃ নিম্নের বাইনারি ট্রি থেকে 19 খুঁজতে হবে। নিম্নবর্ণিত বাইনারি সার্চট্রি থেকে কিভাবে খুঁজতে হবে, তা নিম্নে বর্ণনা করা যায়-



চিত্র ঃ ৭.১৪ বাইনারি ট্রি

সমাধান ঃ প্রথমে রুটে যেতে হবে। এখানে রুট 35। 17 সংখ্যাটি 35 এর চেয়ে ছোট। অতএব, 17, 35 নোডের বাম সাবট্রিতে থাকবে। এবার 17 সংখ্যার নোডের ডান child কে পরীক্ষা করা হল। 22, 17 এর চেয়ে বড়, মানে এর ডান সাবট্রিতে থাকবে। এভাবে আরেক ধাপ গেলে 19 পাওয়া যাবে

৪১। ট্রাভার্স কথার অর্থ হলো একটার পর একটা ডেটা চেক করে যাওয়া। R মূল বিশিষ্ট একটি বাইনারি ট্রিকে তিনটি প্রমাণ (Standard) উপায়ে traversing এর প্রক্রিয়া সম্পন্ন করা হয়। এই তিনটি এলগরিদম (Algorithm) কে প্রি-অর্ডার (Pre-Order), ইন-অর্ডার (In-Order) এবং পোস্ট-অর্ডার (Post-Order) বলা হয়।

প্রি-অর্ডার (Pre-Order) ঃ

(a) প্রথমে মূল root R কে প্রক্রিয়াকরণ করা হয়।

(b) এরপর রুট R এর বাম সাবট্রিতে ট্রাভার্স করা হয়।

(c) এরপর রুট এর ডান সাবট্রিতে ট্রাভার্স করা হয়।

ইন-অর্ডার (In-Order) ঃ

(a) প্রথমে রুট R এর বাম সাবট্রিতে ট্রাভার্স করা হয়।

(b) এর পর root R কে প্রক্রিয়াকরণ করা হয়।

(c) এরপর root R এর ডান সাবট্রিতে ট্রাভার্স করা হয়।

পোস্ট অর্ডার (Post-Order) ঃ

(a) প্রথম রুট R এর বাম সাবট্রিতে ট্রাভার্স করা হয়।

(b) এর পর রুট R এর ডান সাবট্রিতে ট্রাভার্স করা হয়।

(c) সর্বশেষ রুট R টেস্ট করা হয়।

লক্ষ্য করলে দেখা যায় যে, প্রতিটি এলগরিদম তিনটি একই ধাপ ধারণ করে এবং সর্বদা R এর ডান সাবট্রির পূর্বেই বাম সাবট্রি Traverbe করা হয়।

এলগরিদম গুলোর মধ্যে মূল পার্থক্য হচ্ছে সব সময় যাতে রুট R প্রক্রিয়া করণ করা হয়।

"Pre" এলগরিদম এর ভিতরে সাবট্রির ট্রাভার্সিং হওয়ার পূর্বেই R মূলটির প্রক্রিয়াকরণ (Process) আরম্ভ হয়।

"In" এলগরিদমের ভিতরে সাবট্রিগুলির ট্রাভার্সিং হওয়ার সময় R মূলটির প্রক্রিয়াকরণ আরম্ভ হয় এবং "post" এলগরিদম এর ভিতরে সাবট্রি গুলির ট্রাভার্সিং (Traversing) হওয়ার পরে R মূলটির প্রক্রিয়াকরণ আরম্ভ হয়।

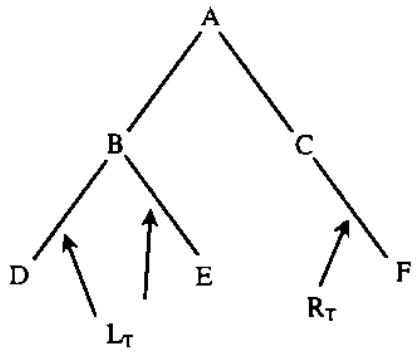
এই তিনটি এলগরিদমকে কোন কোন সময় বলা হয় যথাক্রমে

Node-Left-Right (NLR) Traversal

Left–Node–Right (LNR) Traversal

Left–Right–Node (LRN) Traversal

উদাহরণ ঃ



চিত্র ঃ ৭.১৫

চিত্রে একটি বাইনারি ট্রি বিবেচনা করি। এখানে মূলটি যার বাম সাবট্রি L_T তে আছে B, D এবং E নোডগুলি এবং ডান সাবট্রি R_T তে আছে C এবং F নোড।

(a) T এর Pre-Order Traversal এ শুরুতে A প্রসেস হবে, তারপর L_T টার্ভার্সিং হবে। এরপর R_T টার্ভার্সিং হবে।

তথাপি L_T এর Pre-Order Traversal পেতে B মূলটিতে শুরু। তারপর D এবং E

R_T এর Pre-Order Traversal পেতে C মূলটিতে শুরু এবং তারপর F

সুতরাং T এর Pre-Order traversal হবে ABDECF

(b) T এর Inorder traversal এ প্রথমে LT ট্রাভার্স হবে, তারপর রুট A process হবে এবং শেষে RT ট্রাভার্স হবে।

সুতরাং L_T এর Inorder traversal পেতে শুরু হবে;

D, B এবং E। R_T এর Inorder traversal পেতে শুরু হবে C তারপর F। সুতরাং এর Inorder traversal হবে dBEFACF।

(c) T এর post-order traversal এ প্রথমে L_T ট্রাভার্স হবে।

এরপর R_T ট্রাভার্স হবে এবং শেষে রুট A প্রসেস হবে।

L_T এর post-order traversal পেতে শুরু হবে D, E এবং B

R_T এর post-Order traversal পেতে শুরু হবে F এবং C

সুতরাং T এর Post-Order traversal হবে DEBFCA.

৪২। একটি বাইনারি সার্চ ট্রি T দেয়া আছে এতে একটি ITEM কে Insert (সংযোজন) করতে হবে।

Procedure ঃ INSERTION (T := বাইনারি সার্চ ট্রি, x = ITEM, N = বাইনারি সার্চ ট্রি T এর রুট (নোড), T তে কোন Node এর বাম ও ডান সাবট্রি বর্তমান না থাকলে তাহলে তার মান Null

Step–1 ঃ While N ≠ Null [নোড N null না হওয়া পর্যন্ত loop চলবে]

Step–2 ঃ T এর রুট N এর সাথে ITEM x কে তুলনা করতে হবে ঃ

(a) x যদি N এর চেয়ে ছোট হয় তাহলে N এর বাম সাবট্রি এর সাথে তুলনা করতে হবে।

(b) x যদি N এর চেয়ে বড় হয় তাহলে N এর ডান সাবট্রির সাথে তুলনা করতে হবে।

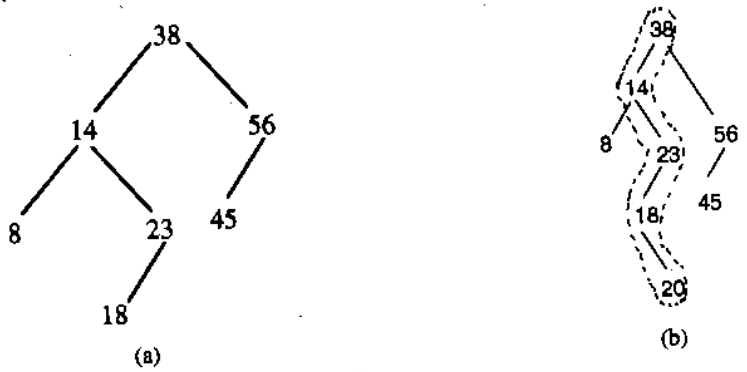
Step–3 ঃ নিম্নবর্ণিত শর্তপূরণ না হওয়া পর্যন্ত Step–2 এর কাজ চলবে-

(i) (Null নোড পাওয়া গেল, While loop সমাপ্ত হবে।

(ii) Null নোড এর বাম/ডান (উপযুক্ত স্থানে) এ ITEM টি Insert করতে হবে।

Step–4 সমাপ্ত

উদাহরণ ঃ উদাহরণ এর সাহায্যে বাইনারি সার্চ ট্রিতে একটি নতুন আইটেম ইনসার্ট (Insert) করার নিয়ম দেখানো হলো-



চিত্র ঃ ৭.১৬

উপরিউক্ত চিত্র একটি বাইনারি সার্চট্রি। একটি ITEM = 20 দেওয়া হল। এখন এই 20 কে বাইনারি সার্চট্রিতে Insert করতে হবে।

20 কে বাইনারি সার্চট্রিতে Insert (সংযোজত) করতে যে সমস্ত ধাপ অতিক্রম করতে হবে তা নিম্নে দেওয়া হল-

১। চিত্র (a) তে রুট N = 38 কিন্তু আমাদের ITEM = 20, যেহেতু 20 < 38 তাহলে 38 এর বাম child এ আমরা দেখবো- যেখানে আছে 14, এবার আমাদের নোড N = 14

২। ITEM = 20 কে 14 এর সাথে তুলনা করতে হবে। যেহেতু 20 > 14 তাহলে 14 এর ডান Child এ আমরা দেখবো- যেখানে আছে 23। এবার আমাদের নোড N = 23

3. N = 23, ITEM = 20
যেহেতু 20 < 23, তাহলে 23 এর বাম Child এ আমরা দেখবো। যেখানে আছে 18

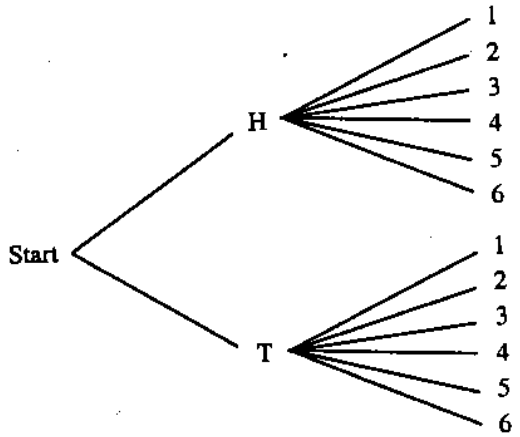
4. যেহেতু 20 > 18, তাহলে 18 এর ডান Child এ দেখবো। কিন্তু ডানে কোন সাবট্রি বা Child না থাকায় নোড N = Null.

5. যেহেতু আমরা ডানে Null নোড পেয়ে গেছি। সুতরাং এ নোড N এ ITEM = 20 Insert (সংযোজন) করাতে পারি।

চিত্র (b) এ ITEM = 20 Insert হয়েছে।

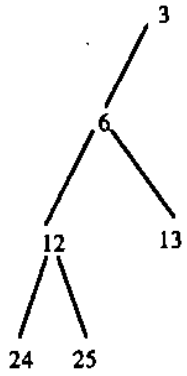
৪৩। **Tree diagram ঃ** একটি Tree diagram একটি ঘটনার সব সম্ভাব্য ফলাফল দেখায়, একটি ঘটনার সব সম্ভাব্য ফলাফল একটি Tree diagram দ্বারা প্রদর্শিত হয়।

উদাহরণ ঃ যদি একটি মুদ্রা ক্ষতিগ্রস্ত হয় এবং সংখ্যা ঘনক্ষেত্র একযোগে ঘূর্ণিত হয়, তাহলে নম্বর ঘনক্ষেত্র নেভিগেশন মুদ্র সংখ্যা 4 মাথা পাবার সম্ভাবন হয় $\frac{1}{12}$।



▶▶ সমস্যাবলি ঃ

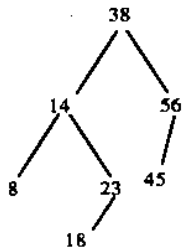
১।



চিত্র ঃ ৭.১৭

২। চিত্রতে বাইনারি ট্রি T একটি binary serch tree, অর্থাৎ T এর মধ্যে প্রত্যেক নোড N এর মান এর বাম সাবট্রি এর মান অপেক্ষা বৃহত্তর এবং এর ডান সাবট্রির যে কোন সংখ্যক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

মনে করি, প্রদত্ত চিত্রের 23 নোটটি 35 দ্বারা পরিবর্তন করা হল। তখন একটি বাইনারি সার্চ ট্রি কারণ 35 < 38। কিন্তু যদি 23 নোডটি 40 দ্বারা পরিবর্তন করা হয় তখন উহা আর বাইনারী সার্চট্রি হবে না কারণ 40 > 38



চিত্র ঃ ৭.১৮

৩। চারটি দ্বিমিক ট্রিজের মধ্যে তিনটি ট্রিজ (a), (c) এবং (d) সমরূপ (Similar)। বিশেষ ক্ষেত্রে (a), (b) এবং (d) সমছাপ হয় যেহেতু তাদের অনুরূপ নোডের একই ডেটা (Data) থাকে। ট্রিজ (c) সমরূপ এবং সমছাপ ও নয় কারণ দ্বিমিক বৃক্ষরাজি অনুযায়ী বাম এবং ডান অনুক্রমিক ঢাল এর মধ্যে যখন কেবল একটি অনুক্রমিক ঢাল নিয়ে পার্থক্য দেখানো যায়।

৪। আমরা জানি, পূর্ণ ট্রি এর ক্ষেত্রে

গভীরতা, $d_n = [\log_2 n + 1]$

$= [\log_2 1000000 + 1]$

$= 201$

৫। চেইন লেটার 4 অ্যারে ট্রিজ এর মাধ্যমে প্রকাশ করা যায়। অন্তঃস্থ ভার্টিকস (Internal Vertices) বিনিময়কারী লোক যারা লেটার প্রেরণ করে এবং লিভস (Leaves) হল ঐ সব লোক যারা পাঠায় না। যেহেতু 100 জন লোক লেটার প্রেরণ করে না, লিভ (Leaves) সংখ্যা মূলীয় ট্রিতে হয়।

$l = 100$

অতএব, পত্র প্রাপ্ত লোকের সংখ্যা,

$n = (5. 100 - 1) /(5 - 1)$

$= 124$

অন্তঃস্থ ভার্টিকস্

$= 124 - 100$

$= 24$

অতএব, 24 জন লোক পত্র পাঠায়।

৬। সর্বাধিক m^h লিভস্ (leaves) বিশিষ্ট m অ্যারে ট্রিজের উচ্চতা h.

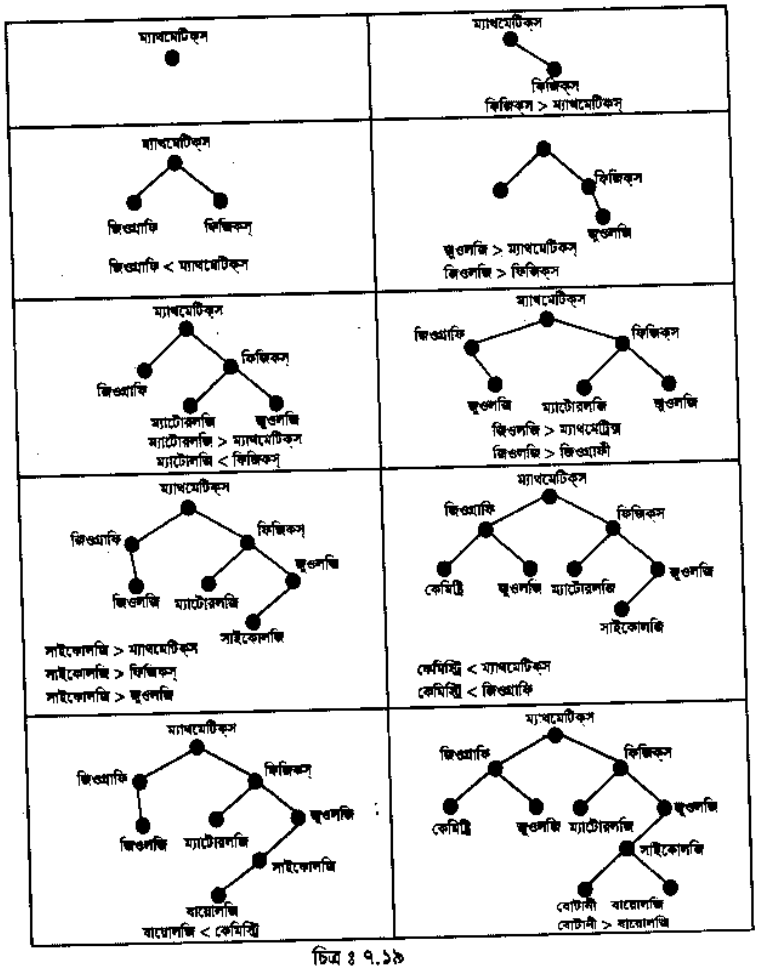
যদি m অ্যারে ট্রি এর h উচ্চতায় লিভস l থাকে।

তখন, $h \geq [\log_m l]$

যদি m-অ্যারে ট্রি পূর্ণ ও সাম্যতা বিশিষ্ট হয়।

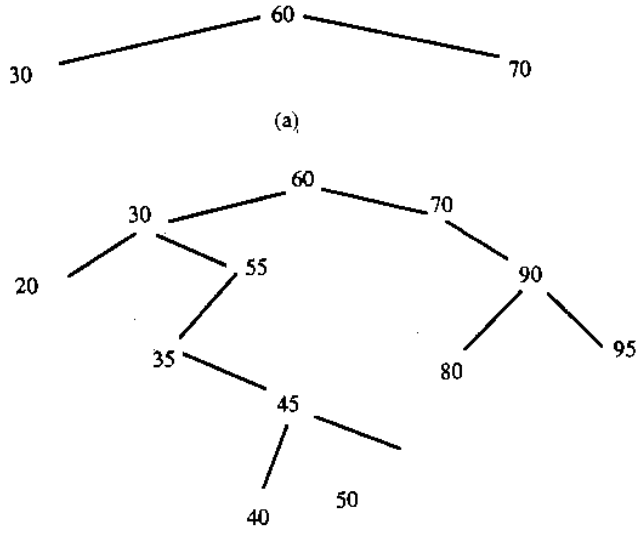
তখন, $h = [\log_m l]$

৭।



চিত্র ঃ ৭.১৯

৮।



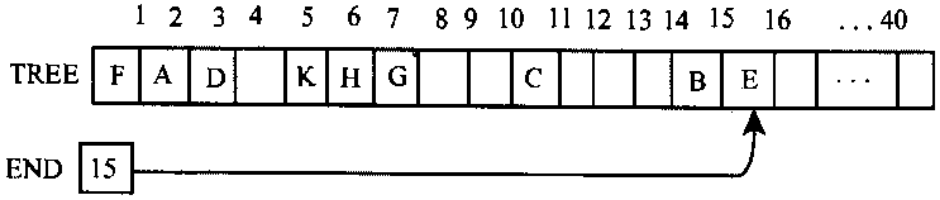
চিত্র ঃ ৭.২০ পূর্ণ ট্রিজ

৯। (a) T_1, T_2, T_3 ট্রিগুলো মূলীয় ট্রি (Rooted Tree).

(b) T_2 এবং T_2 হল ক্রমমূলীয় ট্রি

(c) T_1, T_2 এবং T_3 এই সকল ট্রি এর প্রত্যেকটিই বাইনারী টি

১০। স্মৃতিতে পর্যায়ক্রমিক বর্ণনা



চিত্র ঃ ৭.২১

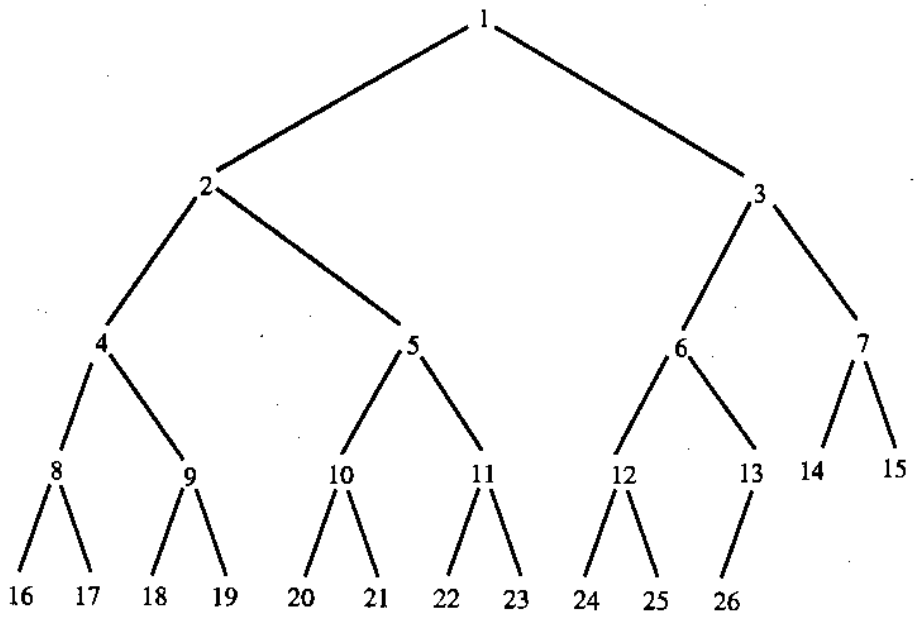
১১। আমরা জানি, K নোডের অগ্রজ $= \frac{K}{2}$ এবং অনুজ $= 2k$ এবং $2k + 1$

এখানে $k = 10$

$\therefore$ অনুজদ্বয় $= 2 \times 10 = 20$ এবং $2 \times 10 + 1 =$

এবং অগ্রজ $= \frac{10}{2} = 5$

$\therefore$ 10 এর অগ্রজ 5 এবং অনুজদ্বয় 20 ও 21



চিত্র ঃ ৭.১৫ পূর্ণ ট্রিজ

সুপার সাজেশনস্

▸▸ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি ঃ

১। ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স কাকে বলে? [বাকাশিবো-২০০৫, ০৭, ০৮, ১০, ১১, ১২, ১৪R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১ নং দ্রষ্টব্য।

২। ডিসক্রিট ম্যাথমেটিক্স এর বিষয়, বস্তুগুলো কী কী? [বাকাশিবো ২০০৩]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২ নং দ্রষ্টব্য।

৩। রিলেশন কাকে বলে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩ নং দ্রষ্টব্য।

৪। দুটি রিলেশন এর উদাহরণ দাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪ নং দ্রষ্টব্য।

৫। ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স এর প্রয়োগ ক্ষেত্রগুলো দেখাও। [বাকাশিবো-২০০৫]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৭ নং দ্রষ্টব্য।

৬। ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স এর মূল লক্ষ্য কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৮ নং দ্রষ্টব্য।

৭। লজিক কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৯ নং দ্রষ্টব্য।

৮। বিবৃতি বা প্রতিজ্ঞা (Proposition) কী? [বাকাশিবো-২০০৩, ০৫, ০৬, ০৭, ০৯, ১০, ১১, ১২]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১০ নং দ্রষ্টব্য।

৯। অসঙ্গত উক্তি বা বিবৃতি (Contradiction) বলতে কী বুঝ? [বাকাশিবো-২০০৩, ১২]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১১ নং দ্রষ্টব্য।

১০। p এবং q দুটি proposition হলে $p \wedge q$ এর সত্য তালিকা তৈরি কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১২ নং দ্রষ্টব্য।

১১। P এবং q দুটি proposition বা বিবৃতি হলে $p \vee q$ এর সত্য তালিকা দেখাও। [বাকাশিবো-২০১৩]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৩ নং দ্রষ্টব্য।

১২। সেট কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৪ নং দ্রষ্টব্য।

১৩। সেটকে কতভাবে ভাগ করা যায় ও কী কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৫ নং দ্রষ্টব্য।

১৪। Intersection এর Vanrdiagram দেখাও। [বাকাশিবো-২০১১R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৭ নং দ্রষ্টব্য।

১৫। দেখাও যে, $p \vee \sim p$ বা $p \vee \neg p$ একটি টটোলজি। [বাকাশিবো-২০১৩, ১৩R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৯ নং দ্রষ্টব্য।

১৬। দেখাও যে, $P \wedge \sim P$ একটি cointradiction বা অসঙ্গতি।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২০ নং দ্রষ্টব্য।

১৭। Venn Diagram (ভেন চিত্র) কী? [বাকাশিবো- ২০০৭, ০৮]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২১ নং দ্রষ্টব্য।

১৮। সেট $A = \{ 4, 5 \}, B = \{ x, y \}$ হলে $A \times B$ = কত? [বাকাশিবো- ২০০৭, ০৮]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২২ নং দ্রষ্টব্য।

১৯। De Morgan's সূত্র দুটি লেখ। [বাকাশিবো- ২০০৯, ১২R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৩ নং দ্রষ্টব্য।

২০। অন্বয় কী? [বাকাশিবো- ২০০৫, ২০১০R, ১২, ১৪R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১ নং দ্রষ্টব্য।

২১। যদি P(a, b) সত্য হয় তবে A. B সেট এর অন্বয়কে কীভাবে লেখা যায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩ নং দ্রষ্টব্য।

২২। A-এবং B সেটের উপাদানের অন্বয় R সংক্ষেপে লিখে প্রকাশ কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪ নং দ্রষ্টব্য।

২৩ ডোমেন কাকে বলে? [বাকাশিবো- ২০০৭]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৫ নং দ্রষ্টব্য।

২৪ বৈশিষ্ট্যানুসারে অন্বয় কত প্রকার ও কী কী? [বাকাশিবো- ২০০৭]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৬ নং দ্রষ্টব্য।

২৫ ফাংশন কাকে বলে? [বাকাশিবো-২০১৩R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৭ নং দ্রষ্টব্য।

২৬ ভেক্টরস্ (Vectors) কী? [বাকাশিবো-২০০৪, ০৮, ১৩]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১ নং দ্রষ্টব্য।

২৭। ম্যাট্রিক্স (Metrices) কী? [বাকাশিবো-২০০৪, ১৩]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২ নং দ্রষ্টব্য।

২৮। ভেক্টরস্ এবং ম্যাট্রিক্স অধুনা কী কী কাজে ব্যবহার করা হয়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৫ নং দ্রষ্টব্য।

২৯। কর্ণ ম্যাট্রিক্স (Digenal matrices) কী বুঝায়। [বাকাশিবো-২০০৬, ২০০৫ (৪র্থ পর্ব)]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৬ নং দ্রষ্টব্য।

৩০। (Inverse matrix) বিপরীত ম্যাট্রিক্স কাকে বলে? [বাকাশিবো-২০০২, ০৩, ০৩R, ০৭, ০৯R, ১০, ১০R]

অথবা, A ও B Matrices দুটি বিপরীত হওয়ার শর্ত লেখ। [বাকাশিবো-২০১১R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৭ নং দ্রষ্টব্য।

৩১। Echelon (বুহ্) ম্যাট্রিক্সের শর্ত দুটি লিখ। [বাকাশিবো-২০০৫, ১৩, ১২, ১৪R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৮ নং দ্রষ্টব্য।

৩২। Row cononical ম্যাট্রিক্সের ধর্ম লিখ।

অথবা, একটি ম্যাট্রিক্সকে Row cononical form কখন বলা যায়? [বাকাশিবো-২০০৫]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৯ নং দ্রষ্টব্য।

৩৩। একক ম্যাট্রিক্স কী? [বাকাশিবো- ২০০৮]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১০ নং দ্রষ্টব্য।

৩৪। Identity matrix এর সংজ্ঞা দাও। [বাকাশিবো- ২০১১, ১১R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১১ নং দ্রষ্টব্য।

৩৫। এলিমেন্টারী রো অপারেশনগুলো উল্লেখ কর। [বাকাশিবো-২০১২, ০৮, (৪র্থ পর্ব), ১৪R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১২ নং দ্রষ্টব্য।

৩৬। A ও B দুটি বিপরীত হওয়ার শর্ত লেখ। [বাকাশিবো-২০১১R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৩ নং দ্রষ্টব্য।

৩৭। $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ হলে AA^{-1} এর মান বের কর। [বাকাশিবো-২০১১R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৪ নং দ্রষ্টব্য।

৩৮। এ্যাবাকাস শব্দটি কোথা থেকে উৎপত্তি হয়েছে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১ নং দ্রষ্টব্য।

৩৯। (Counting গণনা বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো ২০০২, ০৩, ০৫, ০৬, ০৭, ১০R, ১১]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২ নং দ্রষ্টব্য।

৪০। Counting (গণনা) এর দু'টি নীতি কী কী? [বাকাশিবো-২০০৪, ০৮, ০৯R, ১০, ১৩R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩ নং দ্রষ্টব্য।

৪১। গুণন মূলনীতি (Prodect Rule Principle) বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০০৭]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪ নং দ্রষ্টব্য।

৪২। যোজন মূলনীতি (Sum Rule Principle) কী? [বাকাশিবো-২০০৭, ১১R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৫ নং দ্রষ্টব্য।

৪৩। Generalized Pigeonhole principle বিবৃতি কী কর। [বাকাশিবো-২০০২, ০৩, ০৪, ০৫, ১৪R]

অথবা, সাধারণ কপোত বিবরনীতি বিবৃতি কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৬ নং দ্রষ্টব্য।

৪৪। Binomial co-efficient বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো ২০০৩R, ২০০৫, ১১]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৭ নং দ্রষ্টব্য।

৪৫। ${}^{12}C_6$ এ ${}^{6}C_3$ এর মান কত? [বাকাশিবো ২০০৬, ১০]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৮ নং দ্রষ্টব্য।

৪৬। ${}^{n}C_r$ নোটেশনের অর্থ কী? [বাকাশিবো- ০৯R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৯ নং দ্রষ্টব্য।

৪৭। ${}^{n}p_{r}$ নোটেশনের অর্থ কী? [বাকাশিবো-২০০৯R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১০ নং দ্রষ্টব্য।

৪৮। সম্ভাব্যতা কাকে বলে? [বাকাশিবো-২০১০R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১ নং দ্রষ্টব্য।

৪৯। সম্ভাব্যতার (Probability) গাণিতিক সূত্রটি কী? [বাকাশিবো-২০০৩, ০৭, ০৯R, ১২, ১৪R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২ নং দ্রষ্টব্য।

৫০। সম্ভাব্যতার দু'টি উপাদানের নাম লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩ নং দ্রষ্টব্য।

৫১। A ও B দুটি দলের মধ্যে A দলের জয় লাভের সম্ভাব্যতা কতটুকু?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪ নং দ্রষ্টব্য।

৫২। নমুনা ক্ষেত্র (Sample Space) বলতে কী বুঝ? [বাকাশিবো-২০০৭, ১০, ১১]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৫ নং দ্রষ্টব্য।

৫৩। ঘটনা (Event) বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০০৩R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৬ নং দ্রষ্টব্য।

৫৪। নমুনা বিন্দু কাকে বলে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৭ নং দ্রষ্টব্য।

৫৫। যৌগিক ঘটনা (compound Event) কাকে বলে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৮ নং দ্রষ্টব্য।

৫৬। সরল ঘটনা (Simple Event) বলতে কী বুঝ? [বাকাশিবো-২০১১R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৯ নং দ্রষ্টব্য।

৫৭। একটি অসম্ভব ঘটনার উদাহরণ দাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১০ নং দ্রষ্টব্য।

৫৮। Probability Function কী? [বাকাশিবো-২০০৫]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১১ নং দ্রষ্টব্য।

৫৯। সম্ভাবতার গুণনের সূত্রটি লেখ। [বাকাশিবো-২০১৩R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১ নং দ্রষ্টব্য।

৬০। Mutually Exclussive কাকে বলে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৩ নং দ্রষ্টব্য।

৬১। Finit Probability Space বা সীমাবদ্ধ সম্ভাব্যতা ক্ষেত্রে এর সংজ্ঞা দাও। [বাকাশিবো-২০০২]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৪ নং দ্রষ্টব্য।

৬২। একটি ছক্কা ছুড়ে মারলেও না পড়ার সম্ভাবনা কত? [বাকাশিবো-২০০৭]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৫ নং দ্রষ্টব্য।

৬৩। Conditional Probability (শর্তযুক্ত সম্ভাব্যতা) এর উপপাদ্যটি লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৬ নং দ্রষ্টব্য।

৬৪। বাইনোমিয়াল থিয়োরেমটি লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৭ নং দ্রষ্টব্য।

৬৫। একটি ছক্কা নিক্ষেপ করা হলে জোড় সংখ্যাগুলো উপরের পিঠে পাওয়ার সম্ভাব্যতা কতবার? [বাকাশিবো-২০০৬]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৮ নং দ্রষ্টব্য।

৬৬। একটি মুদ্রা দু'বার নিক্ষেপ করা হল, নমুনা ক্ষেত্রটি লেখ। [বাকাশিবো-২০০৮, ১৩R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৯ নং দ্রষ্টব্য।

৬৭। অসম্ভব ঘটনা (Impossible Events) কী? [বাকাশিবো-২০০৭]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২০ নং দ্রষ্টব্য।

৬৮। 52টি তাসের একটি প্যাকেট হতে যে কোন একটি তাস টেনে বের করলে রাজার তাসটি বের হওয়ার সম্ভাবনা কত? [বাকাশিবো-২০০২, ১২, ১৪R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২১ নং দ্রষ্টব্য।

৬৯। তিনটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করলে প্রাপ্ত নমুনা ক্ষেত্রটি লেখ। [বাকাশিবো-২০১২]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২২ নং দ্রষ্টব্য।

৭০। সরল ঘটনা বলতে কী বোঝায়? [বাকাশিবো-২০১২R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৩ নং দ্রষ্টব্য।

৭১। যৌগিক ঘটনা ঃ [বাকাশিবো-২০১২R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৪ নং দ্রষ্টব্য।

৭২। অসম্ভব ঘটনা কী? [বাকাশিবো-২০০৭]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৫ নং দ্রষ্টব্য।

৭৩। একটি ছক্কা নিক্ষেপ করলে মৌলিক সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাবনা কত?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৬ নং দ্রষ্টব্য।

৭৪। কে সর্বপ্রথম চিত্রলেখ (Graph) এর সম্পর্কে ধারণা প্রবর্তন করেন?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১ নং দ্রষ্টব্য।

৭৫। চিত্রলেখ (Graph) কী কী নিয়ে গঠিত হয়? [বাকাশিবো-২০১১]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪ নং দ্রষ্টব্য।

৭৬। চিত্রলেখ (Graph) প্রধানত কত প্রকার?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৫ নং দ্রষ্টব্য।

৭৭। Adjacend Nodes কাকে বলে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৬ নং দ্রষ্টব্য।

৭৮। Complete গ্রাফ কাকে বলে? [বাকাশিবো- ২০০৯R, ০৯]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৭ নং দ্রষ্টব্য।

৭৯। Complete গ্রাফ এর বাহুর সংখ্যা বের করার সূত্রটি লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৮ নং দ্রষ্টব্য।

৮০। Isolated Vertex কাকে বলে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৯ নং দ্রষ্টব্য।

৮১। প্যানডেন্ট বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১০ নং দ্রষ্টব্য।

৮২। Distance Diameter কাকে বলে? [বাকাশিবো-২০০৮, ১৩]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১১ নং দ্রষ্টব্য।

৮৩। Travial Graph বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো- ২০১০R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১২ নং দ্রষ্টব্য।

৮৪। "ডিরেক্টেড গ্রাফ বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো- ২০০৭, ০৯]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৩ নং দ্রষ্টব্য।

৮৫। Loop (লুপ) বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০০৭, ১২]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৪ নং দ্রষ্টব্য।

৮৬। ট্রি (Tree) কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১ নং দ্রষ্টব্য।

৮৭। কখন সর্বপ্রথম ট্রি-এর ব্যবহার শুরু হয়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২ নং দ্রষ্টব্য।

৮৮। কোন গণিতবিদ প্রথম ট্রি-এর ব্যবহার করেন?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩ নং দ্রষ্টব্য।

৮৯। আর্থার কেলী প্রথম কোন ক্ষেত্রে ট্রি-এর ব্যবহার শুরু করেন?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪ নং দ্রষ্টব্য।

৯০। সমরূপীয় (Similar Binary Tree) ট্রি কাকে বলে? [বাকাশিবো ২০০৯R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৬ নং দ্রষ্টব্য।

৯১। Extended (বর্ধিত) Binary Tree কাকে বলে? [বাকাশিবো ২০০৯R, ১৩R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৭ নং দ্রষ্টব্য।

৯২। টারমিনাল নোড (Terminal Node) কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৮ নং দ্রষ্টব্য।

৯৩। বাইনারি সার্চ ট্রি বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো ২০০২]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৯ নং দ্রষ্টব্য।

৯৪ Internal Nodes (অন্তঃস্থ নোড) কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১০ নং দ্রষ্টব্য।

৯৫। External Noded (বহিঃস্থ নোড) কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১১ নং দ্রষ্টব্য।

৯৬। একটি ট্রি এর rতম লেভেলে কত সংখ্যা নোড থাকবে তার সূত্র কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১২ নং দ্রষ্টব্য।

৯৭। একটি পূর্ণ ট্রি Tr এর গভীরতা বা depth নির্ণয়ের সূত্র লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৩ নং দ্রষ্টব্য।

৯৮। Null Tree কাকে বলে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৪ নং দ্রষ্টব্য।

▶▶ সংক্ষিপ্ত প্রশ্নাবলি ঃ

১। যৌগিক বিবৃতি (কম্পাউন্ড প্রপোজিশন) বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০০৪, ০৭, ০৮, ০৯R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৪ নং দ্রষ্টব্য।

২। তিনটি বেসিক লজিক্যাল অপারেশন এর নাম লিখ। [বাকাশিবো-২০০৫, ০৭]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৫ নং দ্রষ্টব্য।

৩। যোজন (Conjunction) বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৬ নং দ্রষ্টব্য।

৪। বিযোজন (Disjunction) বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৭ নং দ্রষ্টব্য।

৫। নেগেশন বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৮ নং দ্রষ্টব্য।

৬। শূন্য সেট (Null set) বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৯ নং দ্রষ্টব্য।

৭। Union of Set S বা সংযোগ সেট কাকে বলে? উদাহরণসহ চিত্র দিয়ে বুঝিয়ে লিখ। [বাকাশিবো-২০০৬]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩০ নং দ্রষ্টব্য।

৮। Intersection of Sets বা ছেদ সেট কাকে বলে? উদাহরণসহ চিত্র দ্বারা বুঝিয়ে লিখ। [বাকাশিবো-২০০৬]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩১ নং দ্রষ্টব্য।

৯। অন্তর বা বিয়োগ বা Difference সেট কাকে বলে? উদাহরণসহ চিত্র দ্বারা বুঝিয়ে লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩২ নং দ্রষ্টব্য।

১০। ডিসজয়েন্ট (Disjoint) বা বিযুক্ত সেট কী? উদাহরণ সহ বুঝিয়ে লিখ। [বাকাশিবো-২০০২,০৪, ০৫,০৬,০৭,০৯,১০R,১১]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৩ নং দ্রষ্টব্য।

১১। পূরক সেট বা Complement Set কাকে বলে? উদাহরণসহ বুঝিয়ে লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৪ নং দ্রষ্টব্য।

১২। Power Set কাকে বলে? বুঝিয়ে লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৫ নং দ্রষ্টব্য।

১৩। টটোলজি (Tautology) কাকে বলে? বুঝিয়ে লিখ। [বাকাশিবো-২০০৯, ১৩]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৬ নং দ্রষ্টব্য।

১৪। ফাংশন কাকে বলে? উদাহরণ সহ বুঝিয়ে লিখ। [বাকাশিবো-২০১০, ১৩R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৭ নং দ্রষ্টব্য।

১৫। ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ কী? বুঝিয়ে লিখ। [বাকাশিবো-২০০৩, ০৭, ০৯R ১০R, ১১, ১২, ১৩]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৮ নং দ্রষ্টব্য।

১৬। $f(x) = \sqrt{64 - x^2}$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। [বাকাশিবো-২০০৫, ০৬, ১০R, ১২]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৯ নং দ্রষ্টব্য।

১৭। ফাংশনের Range of Image উদাহরণ সহ ব্যাখ্যা দাও। [বাকাশিবো-২০০৫]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪০ নং দ্রষ্টব্য।

১৮। রিকার্সিভ ফাংশন বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০০২, ১৩, ০৭]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪১ নং দ্রষ্টব্য।

১৯। বিপরীত ফাংশন কাকে বলে? [বাকাশিবো- ২০০৮]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪২ নং দ্রষ্টব্য।

২০। Algorithm এর Complexity কত প্রকার ও কী কী? [বাকাশিবো-২০০৩, ০৯R, ১০R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪৩ নং দ্রষ্টব্য।

২১। এক এক ফাংশন কাকে বলে? বা One to one function কাকে বলে? [বাকাশিবো-২০০৮, ১৩, ১৪R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪৪ নং দ্রষ্টব্য।

২২। সর্বগ্রাহী ফাংশন (Onto function) কাকে বলে? [বাকাশিবো-২০০৮, ১৩]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪৫ নং দ্রষ্টব্য।

২৩। এলগরিদম বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০১৩]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪৬ নং দ্রষ্টব্য।

২৪। এলগরিদম কমপ্লেক্সিটি বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০০৪, ০৫, ০৭, ১০R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪৭ নং দ্রষ্টব্য।

২৫। One to One এবং on to Function এর মধ্যে পার্থক্য লিখ। [বাকাশিবো-২০০৫, ০৭, ০৯, ১১, ১১R, ১২R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪৮ নং দ্রষ্টব্য।

২৬। ধরি, A = { 1, 2, 3, 4, 5 } এবং B = { a, b, c, d } এবং ফাংশন f = { (1, b), (2, a), (3, d), (4, a) (5, d) } এর ডোমেন ও রেঞ্জ বের কর। [বাকাশিবো- ০৮, ০৭]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪৯ নং দ্রষ্টব্য।

২৭। দেখাও যে, $PV \neg (p \wedge q)$ বিবৃতি একটি টটোলজি। [বাকাশিবো- ০৮, ০৭]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৫০ নং দ্রষ্টব্য।

২৮। Urion ও Interseetion এর পার্থক্য চিত্রের মাধ্যম বুঝিয়ে দাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৫১ নং দ্রষ্টব্য।

২৯। অন্বয় (Relation) বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০০৫, ২০০৬, ১১]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৮ নং দ্রষ্টব্য।

৩০। অন্বয়ের বৈশিষ্ট্য উল্লেখ কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১১ নং দ্রষ্টব্য।

৩১। অন্বয় (Relation) কত প্রকার ও কী কী? [বাকাশিবো-২০০৭, ২০১৪R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১২ নং দ্রষ্টব্য।

৩২। Diagraph এ Relation কে কীভাবে উপস্থাপন করা হয়, দেখাও। [বাকাশিবো-২০০৩]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৩ নং দ্রষ্টব্য।

৩৩। সেটের কার্তেসীয় গুণজ বা গুণন কাকে বলে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৪ নং দ্রষ্টব্য।

৩৪। Relation (অন্বয়) এর ডোমেন এবং রেঞ্জ কাকে বলে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৫ নং দ্রষ্টব্য।

৩৫। Reflexive (প্রতিফলিত) রিলেশন কাকে বলে? [বাকাশিবো-২০০৩, ২০০৬, ২০০৭, ২০১৪R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৬ নং দ্রষ্টব্য।

৩৬। Inverse Relation (বিপরীত অন্বয়) বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০০৪, ১১, ১৩]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৭ নং দ্রষ্টব্য।

৩৭। Symmetric Relation (প্রতিসাম্য অন্বয়) কাকে বলে? [বাকাশিবো- ২০০৮, ২০০৭]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৮ নং দ্রষ্টব্য।

৩৮। Anti Symmetric Relation (অপ্রতিসাম্য অন্বয়) কাকে বলে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৯ নং দ্রষ্টব্য।

৩৯। Transitive Relation (ক্রমন্বয়ী অন্বয়) কাকে বলে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২০ নং দ্রষ্টব্য।

৪০। Equivalence Relation (সমতুল্য অন্বয়) কাকে বলে? [বাকাশিবো-২০০৩]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২১ নং দ্রষ্টব্য।

৪১। Ordered Relation (ক্রম অন্বয়) কাকে বলে? [বাকাশিবো-২০০৩]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২২ নং দ্রষ্টব্য।

৪২। Function Relation (ফাংশন অন্বয়) কাকে বলে? [বাকাশিবো-২০০৩]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৩ নং দ্রষ্টব্য।

৪৩। $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ফাংশনে ডোমেন নির্ণয় কর এবং $f(-3)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ এর মাঝে কোনগুলোর মান নির্ণয় করা যায়। [বাকাশিবো-২০০৩]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৪ নং দ্রষ্টব্য।

৪৪। রো (Row) ভেক্টরস্ বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৫ নং দ্রষ্টব্য।

৪৫। জিরো ভেক্টরস্ বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০০৭]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৬ নং দ্রষ্টব্য।

৪৬। অভেদ মেট্রিক্স বা Identity matrix এর সংজ্ঞা দাও। [বাকাশিবো-২০১১R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৭ নং দ্রষ্টব্য।

৪৭। আয়তাকার ম্যাট্রিক্স বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৮ নং দ্রষ্টব্য।

৪৮। ম্যাট্রিক্স ক্রম বা পর্যায় (Order) বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০০৮]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৯ নং দ্রষ্টব্য।

৪৯। ম্যাট্রিক্সের সমতা (Equality of matrices) বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০১০R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২০ নং দ্রষ্টব্য।

৫০। ভেক্টরের যোগ-বিয়োগ দেখাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২১ নং দ্রষ্টব্য।

৫১। $A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ $B=\begin{matrix}3\\ -1\end{matrix}\begin{bmatrix}-5\\ 2\end{bmatrix}$ দেখাও যে, উহারা ইনভার্স মেট্রিক্স। [বাকাশিবো-২০০৯]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৪ নং দ্রষ্টব্য।

৫২। যদি ভেক্টর $U = (2, 3, -1)$ এবং $V = (-5, 1, 8)$ হয় তবে $u.v = ?$ এবং $\| u \| =$ কত? [বাকাশিবো-২০০৭]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৫ নং দ্রষ্টব্য।

৫৩। এ্যাবাকাস বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১১ নং দ্রষ্টব্য।

৫৪। নেপিয়ারের হাড় বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১২ নং দ্রষ্টব্য।

৫৫। কত সালে জন নেপিয়ার নেপেরিয়ন লগারিদম আবিষ্কার করেন?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৩ নং দ্রষ্টব্য।

৫৬। উদাহরণসহ কপোত বিবর (Pigeon hole) এর মূলনীতি লিখ। [বাকাশিবো ২০০৩, ০৪, ০৬, ০৭, ০৯, ০৯R, ১০, ১১, ১৩]
অথবা, উদাহরণসহ পিজিয়ন হোল এর মূলনীতি বর্ণনা কর। [বাকাশিবো-২০০২]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৪ নং দ্রষ্টব্য।

৫৭। Pascal's triangle (প্যাসকেল ত্রিভুজ) বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০০২, ০৪, ০৯, ০৯R, ১০, ১১]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৫ নং দ্রষ্টব্য।

৫৮। প্যাসকেলের ত্রিভুজের শর্ত দুটি লিখ। [বাকাশিবো-২০০৫, ২০০৬]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৬ নং দ্রষ্টব্য।

৫৯। ট্রি ডায়াগ্রাম (Tree Diagram) কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৭ নং দ্রষ্টব্য।

৬০। Polytechnic শব্দ থেকে প্রতিবার 5টি বর্ণ নিয়ে কয়ভাবে সাজানো যায়? [বাকাশিবো- ০৯, ০৯R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৮ নং দ্রষ্টব্য।

৬১। প্রমাণ কর যে, ${}^{n}c_{n-r} = {}^{n}c_{r}$ [বাকাশিবো-২০০৭, ০৯R, ১০]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৯ নং দ্রষ্টব্য।

৬২। যদি ${}^{n}c_{12} = {}^{n}c_{8}$ হয় তবে ${}^{22}c_{n}$ এর মান নির্ণয় কর। [বাকাশিবো-২০০৭]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২০ নং দ্রষ্টব্য।

৬৩। সম্ভাব্যতা বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৭ নং দ্রষ্টব্য।

৬৪। নিশ্চিত ঘটনা (Sure Event) বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০০৫, ০৬]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৮ নং দ্রষ্টব্য।

৬৫। সম্পূর্ণ ঘটনা বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৯ নং দ্রষ্টব্য।

৬৬। শাফল করা 52 টি তাসের বান্ডেল হতে নিম্নবর্ণিত একটি তাস টেনে পাবার সম্ভাবনা কত? [বাকাশিবো-২০০২]

(i) একটি টেক্কা; (ii) একটি স্পেড

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩০ নং দ্রষ্টব্য।

৬৭। ইংরেজি বর্ণমালা হতে দৈবভাবে একটি অক্ষর নেয়া হলে অক্ষরটি স্বরবর্ণ হবার সম্ভাবনা কত?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩১ নং দ্রষ্টব্য।

৬৮। সীমাবদ্ধ সম্ভাব্যতার যোগসূত্রগুলো কী কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩২ নং দ্রষ্টব্য।

৬৯। দুইটি বর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাব্যতার সংযোগ সূত্র বিবৃত কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৩ নং দ্রষ্টব্য।

৭০। শর্তাধীন সম্ভাব্যতা (Conditional Probability) বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০০৭]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৪ নং দ্রষ্টব্য।

৭১। পুনঃকৃত পরীক্ষা (Repeated Trials) বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৫ নং দ্রষ্টব্য।

৭২। Independent Event (স্বাধিন ঘটনা) কী? উদাহরণসহ ব্যাখ্যা কর। [বাকাশিবো-২০০২, ০৩, ০৭, ০৯, ১১]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৬ নং দ্রষ্টব্য।

৭৩। ফাইনাইট প্রোবাবিলিটি (Finite Probability) স্পেস (Space) এর সংক্ষিপ্ত বর্ণনা দাও। [বাকাশিবো-২০০২, ০৫, ০৪, ১৪R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৭ নং দ্রষ্টব্য।

৭৪। চিত্রলেখ (Graph) বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০১২, ১৪R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৫ নং দ্রষ্টব্য।

৭৫। উদাহরণসহ গ্রাফের বৈশিষ্ট্যসমূহ লেখ। [বাকাশিবো-২০০৪]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৬ নং দ্রষ্টব্য।

৭৬। চিত্রলেখ (Graph) এর দুটি প্রয়োগক্ষেত্র দেখাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৭ নং দ্রষ্টব্য।

৭৭। চিত্রলেখ (Graph) প্রধানত কত প্রকার ও কী কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৮ নং দ্রষ্টব্য।

৭৮। চিত্রলেখ (Graph) কী কী বিষয় নিয়ে গঠিত?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৯ নং দ্রষ্টব্য।

৭৯। শীর্ষমাত্রা (Degree of vertex) কী? [বাকাশিবো-২০০৩, ০৩R, ০৫, ১০, ১১, ১১R, ১৩, ১৪R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২০ নং দ্রষ্টব্য।

৮০। কানেকটিভিটি বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০০২, ০৭, ০৯R, ০৯, ১৩]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২১ নং দ্রষ্টব্য।

৮১। মাল্টি গ্রাফ বলতে কী বুঝা? চিত্রের সাহায্যে বুঝিয়ে লিখ। [বাকাশিবো-২০০২, ০৪, ০৫, ০৬, ০৯, ১১, ১৩R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২২ নং দ্রষ্টব্য।

৮২। গ্রাফ ও মাল্টি গ্রাফের মধ্যে পার্থক্য লিখ। [বাকাশিবো - ২০০৩, ০৭, ২৩]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৩ নং দ্রষ্টব্য।

৮৩। Graph (গ্রাফ) এর ক্ষেত্রে Cut points এবং Bridge কাকে বলে? [বাকাশিবো-২০০৫, ০৯R, ১০R, ১০, ১১]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৪ নং দ্রষ্টব্য।

৮৪। Complete Graph কাকে বলে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৫ নং দ্রষ্টব্য।

৮৫। ট্রি গ্রাফ কাকে বলে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৬ নং দ্রষ্টব্য।

৮৬। ওয়েটেড গ্রাফ কাকে বলে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৭ নং দ্রষ্টব্য।

৮৭। Distance এবং Diameter কী? [বাকাশিবো-২০০৮]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৮ নং দ্রষ্টব্য।

৮৮। Graph (গ্রাফ) এর আইসোমরফিক (Isomorphic) বলতে কী বুঝ? [বাকাশিবো-২০০২]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৯ নং দ্রষ্টব্য।

৮৯। Isomorphic এবং Homeomorphic graph এর মধ্যকার পার্থক্য লিখ। [বাকাশিবো-২০০৫, ১০R, ১৪R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩০ নং দ্রষ্টব্য।

৯০। Subgraph কাকে বলে? [বাকাশিবো-২০১১R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩১ নং দ্রষ্টব্য।

৯১। Isolated Vertex কাকে বলে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩২ নং দ্রষ্টব্য।

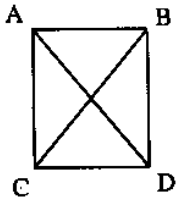
৯২। ফাইনাইট গ্রাফ বলতে কী বুঝায় উদাহরণসহ সংক্ষিপ্ত বর্ণনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৩ নং দ্রষ্টব্য।

৯৩। Isomorphic গ্রাফ চিত্রসহ বর্ণনা কর? [বাকাশিবো-২০০৭, ০৮]

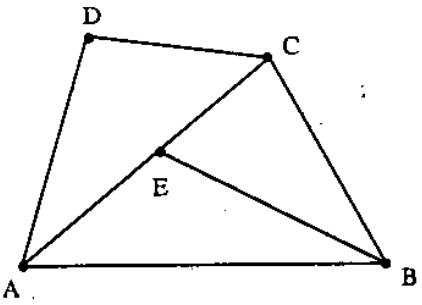
উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৪ নং দ্রষ্টব্য।

৯৪। নিচের চিত্র হতে প্রমাণ কর Edge সংখ্যা = 2x বাহুর সংখ্যা। [বাকাশিবো-২০১১R]



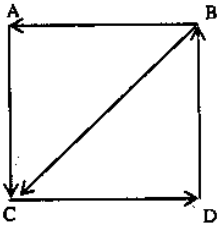
উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৫ নং দ্রষ্টব্য।

৯৫। নিচের চিত্রে গ্রাফটির সকল লোডের Degree of Vertex নির্ণয় কর। দেখাও যে, বাহু সংখ্যা = sum of Degree of vertex/2 [বাকাশিবো-২০০৯]



উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৬ নং দ্রষ্টব্য।

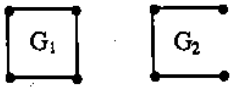
৯৬। [বাকাশিবো-২০১৩]



চিত্রে প্রদর্শিত ধারযুক্ত চিত্রের প্রতি ভার্টেক্স এর Degree of Vertex নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৭ নং দ্রষ্টব্য।

৯৭। নিচের চিত্রের G_1 গ্রাফটি G_2 গ্রাফের সাব গ্রাফ কিনা যুক্তি দাও। [বাকাশিবো-২০০৯]



উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৮ নং দ্রষ্টব্য।

৯৮। দ্বিমিক ট্রি (Binary Tree) বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০০৫, ০৭, ০৮, ০৯, ১০R, ১২, ১৩]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৭ নং দ্রষ্টব্য।

৯৯। ট্রিজকে মূলত কয়ভাগে বিভক্ত করা যায় ও কী কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২০ নং দ্রষ্টব্য।

১০০। সমরূপ দ্বিমিক ট্রিজ (Similar Binary Trees) বলতে কী বুঝায়? [বাকাশিবো-২০০৯R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২১ নং দ্রষ্টব্য।

১০১। ট্রিজের বৈশিষ্ট্য উল্লেখ কর। [বাকাশিবো-২০০২, ২০০৪, ১৩R, ১৪R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২২ নং দ্রষ্টব্য।

১০২। Complete Binary Tree বলতে কী বুঝ? উদাহরণসহ লিখ। [বাকাশিবো-২০০৩, ০৬, ০৮, ১০R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৩ নং দ্রষ্টব্য।

১০৩। Extended Binary Tree কাকে বলে? [বাকাশিবো-২০০৯R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৪ নং দ্রষ্টব্য।

১০৪। Complete ও Extended Binary Tree এর মধ্যে পার্থক্য লিখ। [বাকাশিবো-২০০৩R, ২০০৪, ১০, ১১R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৫ নং দ্রষ্টব্য।

১০৫। উদাহরণসহ Tree (ট্রি) এর বৈশিষ্ট্যসমূহ লিখ। [বাকাশিবো-২০০২, ২০০৪]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৬ নং দ্রষ্টব্য।

১০৬। E = (a–b)/((c * d) + e) এর বাইনারি এক্সপ্রেশন দেখাও। [বাকাশিবো-২০০৭, ১০R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৭ নং দ্রষ্টব্য।

১০৭। একটি পূর্ণট্রি (Complete Binary Tree) যার 31টি নোড আছে। নোড 10 এর অনুজ এবং অগ্রজ বের কর। [বাকাশিবো-২০০৭, ১০, ১৩R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৮ নং দ্রষ্টব্য।

১০৮। নিচের Binary Treeটির Preorder এবং Inorder traversing লিখ। [বাকাশিবো-২০০৫, ০৯]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৯ নং দ্রষ্টব্য।

১০৯। Node (নোড) কাকে বলে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩০ নং দ্রষ্টব্য।

১১০। ২৬ নোড বিশিষ্ট একটি Complete Binary Tree অংকন কর। [বাকাশিবো-২০০৫, ০৬]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩ নং দ্রষ্টব্য।

১১১। Binary Tree কে সাধারণত কত ভাগে ভাগ করা যায় ও কী কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩২ নং দ্রষ্টব্য।

১১২। গ্রাফ এবং ট্রি এর মাঝে পার্থক্য লেখ। [বাকাশিবো-২০০৯, ১১, ১৩R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৩ নং দ্রষ্টব্য।

▶▶ রচনামূলক প্রশ্নাবলি ঃ

১। ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স বলতে কী বুঝায়? এর ব্যবহারিক প্রয়োগ দেখাও। [বাকাশিবো-২০০২, ২০০৫]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৫২ নং দ্রষ্টব্য।

২। ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স এর ইতিহাস সম্পর্কে আলোচনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৫৩ নং দ্রষ্টব্য।

৩। ডিজিটাল কম্পিউটার সিস্টেমে ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স এর গুরুত্ব আলোচনা কর।
[বাকাশিবো-২০০২, ২০০৩, ২০০৫, ২০০৭, ২০০৮, ২০০৯R, ১১, ১৪R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৬৪ নং দ্রষ্টব্য।

৪। লজিক, সেট ও ফাংশন বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৫৫ নং দ্রষ্টব্য।

৫। বেসিক লজিক্যাল অপারেশন সম্পর্কে বিস্তারিত বর্ণনা দাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৫৬ নং দ্রষ্টব্য।

৬। এক-এক ফাংশন ও সর্বগ্রাহী ফাংশন (One to one ও On to function বলতে কী বুঝায় চিত্রসহ ব্যাখ্যা কর।
[বাকাশিবো-২০০২, ২০০৫, ২০০৬, ২০১০, ১২]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৫৭ নং দ্রষ্টব্য।

৭। প্রাত্যহিক জীবনের সমস্যাদির এলগরিদম ও ফাংশন সম্পর্কে বর্ণনা দাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৫৮ নং দ্রষ্টব্য।

৮। এলগরিদম কমপ্লেক্সিটি সম্পর্কে যা জান লিখ। [বাকাশিবো-২০১০]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৫৯ নং দ্রষ্টব্য।

৯। দ্যা মরগানের সূত্র দুটি লেখ এবং প্রমাণ কর। [বাকাশিবো-২০০৭, ০৯R, ১০]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৬০ নং দ্রষ্টব্য।

১০। **Union এবং Intersection এর মধ্যে পার্থক্য কী?** [বাকাশিবো-২০০৫, ০৯, ০৯R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৬১ নং দ্রষ্টব্য।

১১। প্রমাণ কর ঃ $P \wedge (qvr) = (p \wedge q)\ v\ (p \wedge r)$ [বাকাশিবো-২০১১R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৬২ নং দ্রষ্টব্য।

১২। তিনটি সংখ্যার মধ্যে বড় সংখ্যাটি বের করার এলগরিদম লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৮৩ নং দ্রষ্টব্য।

১৩। অন্বয় বলতে কী বুঝায়? আলোচনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ২৫ নং দ্রষ্টব্য।

১৪। অন্বয়ের তিনটি উদাহরণসহ ব্যাখ্যা দাও। [বাকাশিবো-২০০৩]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ২৬ নং দ্রষ্টব্য।

১৫। অন্বয়ের ডোমেন এবং রেঞ্জ বলতে কী বুঝায়? আলোচনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ২৭ নং দ্রষ্টব্য।

১৬। অন্বয়ের (Relation) বৈশিষ্ট্যগুলোর (Property) বিস্তারিত বর্ণনা দাও। [বাকাশিবো-২০০৩, ০৫, ০৭, ১০, ১১R, ১৪R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ২৮ নং দ্রষ্টব্য।

১৭। উদাহরণসহ অন্বয়ের প্রকারভেদ আলোচনা কর। [বাকাশিবো-২০০২, ০৯R, ১০, ১১]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ২৯ নং দ্রষ্টব্য।

১৮। ফাংশন বলতে কী বুঝায়? বিপরীত ফাংশন সম্পর্কে যা জান লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৩০ নং দ্রষ্টব্য।

১৯। ফাংশনের প্রকারভেদ আলোচনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৩১ নং দ্রষ্টব্য।

২০। বিপরীত অন্বয় বলতে কী বুঝায়, ব্যাখ্যা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৩২ নং দ্রষ্টব্য।

২১। অন্বয়ের যোজন বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৩৪ নং দ্রষ্টব্য।

২২। অন্বয় এবং মেট্রিক্সের যোজন সম্পর্কে আলোচনা কর। [বাকাশিবো-২০০৫, ০৭]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৩৫ নং দ্রষ্টব্য।

২৩। ভেক্টরস্ এবং ম্যাট্রিক্স বলতে কী বুঝায়? উদাহরণসহ বর্ণনা দাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ২৬ নং দ্রষ্টব্য।

২৪। ম্যাট্রিক্স এর যোগ-বিয়োগ উদাহরণ সহ বুঝিয়ে লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ২৯ নং দ্রষ্টব্য।

২৫। ম্যাট্রিক্স এর গুণন প্রক্রিয়া দেখাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৩০ নং দ্রষ্টব্য।

২৬। ম্যাট্রিক্স গণিতের এলগরিদম বলতে কী বুঝায়? যোগ ও গুণনের ক্ষেত্রে ম্যাট্রিক্স এলগরিদম দেখাও।
[বাকাশিবো-২০০৩, ২০০৩R, ০৯R, ১১, ১৩R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৩১ নং দ্রষ্টব্য।

২৭। ইনভার্স ম্যাট্রিক্স বলতে কী বুঝায়? উদাহরণসহ ব্যাখ্যা কর। [বাকাশিবো-২০০৪]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৩২ নং দ্রষ্টব্য।

২৮। গশিয়ান ইলিমিনেশন ম্যাথড বলতে কী বুঝায়? ব্যাখ্যা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৩৩ নং দ্রষ্টব্য।

২৯। $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 4\end{bmatrix}$ হলে AA^T ও A^TA এর মান নির্ণয় কর। [বাকাশিবো-২০০৪]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৩৪ নং দ্রষ্টব্য।

৩০। $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -7\end{bmatrix}$ ও $B=\begin{bmatrix}3 & 0 & -4\\ 3 & -2 & 6\end{bmatrix}$ হলে AB এর মান নির্ণয় কর। [বাকাশিবো-২০০৬]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৩৫ নং দ্রষ্টব্য।

৩১। Gaussian elimination এর সাহায্যে $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 8\end{bmatrix}$ এর Inverse matrix নির্ণয় কর।
[বাকাশিবো-২০০৭, ১০, ১০R, ১১R, ১২]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৩৬ নং দ্রষ্টব্য।

৩২। গণনার যোজন ও গুণন নীতি সম্পর্কে যা জান লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ২১ নং দ্রষ্টব্য।

৩৩। দ্বিপদী সহগ ও প্যাসকেল ত্রিভুজ সম্পর্কে বিস্তারিত বর্ণনা দাও। [বাকাশিবো-২০০৩, ০৭, ১৪]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ২২ নং দ্রষ্টব্য।

৩৪। কপোতবিবর এর মূলনীতি সংক্ষেপে আলোচনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ২৩ নং দ্রষ্টব্য।

৩৫। গণনার সমস্যাবলি সমাধানে ট্রি-ডায়াগ্রামের ভূমিকা দেখাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ২৪ নং দ্রষ্টব্য।

৩৬। সম্ভাব্যতা বলতে কী বুঝায়? বিভিন্ন ক্ষেত্রে সম্ভাব্যতার যোগসূত্রটি বিবৃত কর এবং প্রমাণ কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৩৮ নং দ্রষ্টব্য।

৩৭। উদাহরণসহ নির্ভরশীল ও অনির্ভরশীল ঘটনার সংজ্ঞা দাও। উভয় ক্ষেত্রে সম্ভাবনার গুণন সূত্র বিবৃত কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৩৯ নং দ্রষ্টব্য।

৩৮। n সংখ্যক পরস্পর বর্জনশীল ঘটনার সম্ভাব্যতার যোগসূত্র বিবৃত কর এবং প্রমাণ কর। [বাকাশিবো-২০০৩

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪০ নং দ্রষ্টব্য।

৩৯। তিনটি ঘটনা A, B, C পরস্পর অবর্জনশীল হলে প্রমাণ কর যে,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$$

[বাকাশিবো-২০০৫, ০৭, ১০R, ১২, ১৩R, ১৪R

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪১ নং দ্রষ্টব্য।

৪০। A ও B দুটি ফাইনাইট সেট হলে, প্রমাণ কর যে, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ [বাকাশিবো-২০০২

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪২ নং দ্রষ্টব্য।

৪১। সম্ভাবনার গুণন সূত্রটি বর্ণনা ও প্রমাণ কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪৩ নং দ্রষ্টব্য।

৪২। দুটি বর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাব্যতার যোগসূত্র প্রমাণ কর। [বাকাশিবো-২০০৩, ০৫, ০৮

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪৪ নং দ্রষ্টব্য।

৪৩। দু'টি অবর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাবনার সংযোগ সূত্র লিখ এবং প্রমাণ কর। [বাকাশিবো-২০১৩]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪৫ নং দ্রষ্টব্য।

৪৪। তিনটি অবর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাবনার সংযোগ সূত্র লিখ এবং প্রমাণ কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪৬ নং দ্রষ্টব্য।

৪৫। শর্তাধীন সম্ভাবনা (Conditional Probability) উদাহরণসহ ব্যাখ্যা কর। A ও B ঘটনাদ্বয় পরস্পর অধীন হলে প্রমাণ কর যে, $P(A\backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ [বাকাশিবো-২০০৯R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪৭ নং দ্রষ্টব্য।

৪৬। ব্যায়েসের সূত্রটি ব্যাখ্যা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪৮ নং দ্রষ্টব্য।

৪৭। দেখাও যে, $0 \le P(A) \le 1$।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪৯ নং দ্রষ্টব্য।

৪৮। বার্ণৌলী ট্রায়ান (বাইনোমিয়াল থিয়োরেম) বর্ণনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৫১ নং দ্রষ্টব্য।

৪৯। যদি একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা P এবং না ঘটার সম্ভাবনা q হয় তবে প্রমান কর যে, $P + q = 1$

[বাকাশিবো-২০০৫, ০৭, ১০R, ১১, ১১R, ১৪R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৫২ নং দ্রষ্টব্য।

৫০। প্রমান কর যে, $P(A) + P(A^c) = 1$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৫৩ নং দ্রষ্টব্য।

৫১। A ঘটনা ঘটার সম্ভাবনাকে P(A) দ্বারা প্রকাশ করা হলে $P(A) = 0$ এবং $P(A) = 1$ যে অর্থ বহন করে তা ব্যাখ্যা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৫৬ নং দ্রষ্টব্য।

৫২। 10টি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করলে প্রাপ্ত নমুনা ক্ষেত্রটি লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৫৯ নং দ্রষ্টব্য।

৫৩। একটি মুদ্রা তিনবার নিক্ষেপ করলে প্রাপ্ত নমুনা ক্ষেত্রটি লিখ-

(i) 3টি হেড (ii) 2টি হেড (iii) কমপক্ষে 2টি হেড (iv) বড়জোড় 2টি Head, (v) 0টি হেড আসার সম্ভাব্যতা কত?

[বাকাশিবো-২০০৩, ১১, ১২]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৬০ নং দ্রষ্টব্য।

৫৪। একটি 50 পয়সার Coin 10 বার টস্ করা হলে শাপলা ফুলের দিক পড়ার সম্ভাবনা কত? [বাকাশিবো-২০০৪]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৬১ নং দ্রষ্টব্য।

৫৫। দুটি নিখুঁত মুদ্রা ও একটি নিখুঁত ছক্কা একত্রে একবার নিক্ষেপ করা হল। নমুনা ক্ষেত্রটি লিখ এবং

(i) দুটি মাথা ও বিজোড় সংখ্যা

(ii) একটি লেজ ও জোড় সংখ্যা

(iii) যে কোন পিঠ ও বিজোড় সংখ্যা পাওয়ার সম্ভাব্যতা নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৬২ নং দ্রষ্টব্য।

৫৬। দুটি ছক্কা একই সাথে নিক্ষেপ করা হল। যদি একটি ছক্কার সবসময় 5 পাওয়া যায়, তবে দুটি ছক্কার সমষ্টি 10 হওয়ার সম্ভাবনা কত? [বাকাশিবো-২০০২]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৬৪ নং দ্রষ্টব্য।

৫৭। একটি পাত্রে 3টি লাল ও 4টি কালো বল আছে। অন্য পাত্রে 4টি লাল ও 5টি কালো বল আছে। প্রত্যেক পাত্র হতে 1টি করে বল নেয়া হল ঃ

(i) সব কয়টি কালো

(ii) ২টি সাদা

(iii) একই রংঙের বল পাওয়ার সম্ভাবনা কত?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৬৫ নং দ্রষ্টব্য।

৫৮। একটি বাক্সে 6টি লাল ও 4টি সাদা বল আছে। তা হতে–

(i) পুনঃস্থাপন করে

(ii) পুনঃস্থাপন না করে 2টি বল নেয়া হল। বল দুইটি সাদা হবার সম্ভাবনা কত?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৬৬ নং দ্রষ্টব্য।

৫৯। একটি বাক্সে 4টি সাদা, 5টি লাল এবং 6টি নীল রং এর বল আছে। বাক্স হতে দৈবভাবে 3টি বল নেয়া হলো। নিম্নোক্ত ক্ষেত্রে সম্ভাব্যতাগুলো নির্ণয় কর ঃ

(i) 3টি 3 রং এর বল,

(ii) 2টি সাদা 1টি অন্য রঙের

(iii) 3টি সাদা। [বাকাশিবো-২০০৬]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৬৭ নং দ্রষ্টব্য।

৬০। এক প্যাকেট তাস হতে ২টি তাস দৈবভাবে টানা হল। তাস দুটি—

(i) কালো অথবা টেক্কা

(ii) হরতন বা রাজা

(iii) লাল বা কালো হবার সম্ভাব্যতা কত?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৬৮ নং দ্রষ্টব্য।

৬১। 52টি তাসের 1টি প্যাকেট হতে যে কোন 1টি তাস টেনে বের করলে রাজার তাসটি বের হওয়ার সম্ভাবনা (Probability) কত? [বাকাশিবো-২০০২]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৬৯ নং দ্রষ্টব্য।

৬২। পুনরাবৃত্তি না ঘটিয়ে 1, 2, 3, 4, 5, সংখ্যাগুলো হতে দুই অংক বিশিষ্ট একটি সংখ্যা নেয়া হল। সংখ্যাটি (i) যুগ্ম× (ii) 5 দ্বারা বিভাজ্য হবার সম্ভাব্যতা কত?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৭১ নং দ্রষ্টব্য।

৬৩। একটি পাত্রে 6টি সাদা এবং 9টি কালো বল আছে। একবারে 4টি করে (i) পুনঃস্থাপন সহকারে (ii) পুনঃস্থাপন ব্যতিরেকে দুবার মোট ৪টি বল উত্তোলন করা হল। প্রথম চারটি বল সাদা এবং দ্বিতীয় চারটি বল কালো হবার সম্ভাব্যতা কত?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৭২ নং দ্রষ্টব্য।

৬৪। $P(A \cap B) = \frac{1}{3}, P(A \cup B) = \frac{5}{6}, P(A) = \frac{1}{2}$ হলে

(i) P(B) (ii) $P(\bar{A})$ এর মান কত?

(iii) A ও B স্বাধীন কিনা তা পরীক্ষা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৭৩ নং দ্রষ্টব্য।

৬৫। একটি প্যাকেট তাস থেকে দৈবভাবে একটি তাস নেয়া হলে তাসটি (i) হরতন বা ইস্কাবন এবং (ii) হরতন বা রাজা হবার সম্ভবনা কত? [বাকাশিবো ঃ ২০০৯, ১১R, ১২, ১৩]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৭৪ নং দ্রষ্টব্য।

৬৬। একটি প্যাকেট (৫২টি) তাস হতে একটি তাস টানলে তাসটি কালো হওয়ার সম্ভাবনা কত?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৭৫ নং দ্রষ্টব্য।

৬৭। একটি ছক্কা একবার নিক্ষেপ করলে উপরের 6 আসার সম্ভাবনা কত? [বাকাশিবো-২০১৩]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৭৬ নং দ্রষ্টব্য।

৬৮। একটি কয়েন 6 বার টস করা হল। 2 বার হেড পড়ার সম্ভাবনা কত? [বাকাশিবো-২০১০]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৭৭ নং দ্রষ্টব্য।

৬৯। একজোড়া ছক্কা একসাথে জোড়া হল। ছক্কাদ্বয়ের প্রদর্শিত সংখ্যার সমষ্টি 6 এবং যে কোন একটি সংখ্যা 2 হওয়ার সম্ভাবনা কত? [বাকাশিবো-২০১০]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৭৮ নং দ্রষ্টব্য।

৭০। চিত্রলেখ (Graph) সম্পর্কে বিস্তারিত বর্ণনা দাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৭৯ নং দ্রষ্টব্য।

৭১। উদাহরণসহ degree of Vertex এর বর্ণনা কর। [বাকাশিবো-২০০২, ০৮]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪০ নং দ্রষ্টব্য।

৭২। ফাইনাইট চিত্র লেখ ও ট্রিভিঅ্যাল চিত্রলেখ সম্পর্কে যা জান লিখ।

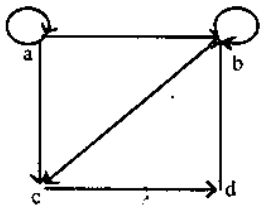
উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪২ নং দ্রষ্টব্য।

৭৩। Homomorphic graph কী? উদাহরণসহ বর্ণনা কর। [বাকাশিবো-২০০৩, ২০০৪]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪৩ নং দ্রষ্টব্য।

৭৪। নিচে প্রদর্শিত ধার (edges) যুক্ত চিত্র লেখ G এ প্রতি ভার্টিক্স এর শীর্ষমাত্রা (degree of Vertex) নির্ণয় কর।

[বাকাশিবো-২০০৬, ০৫, ১২]



উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪৪ নং দ্রষ্টব্য।

৭৫। সাবগ্রাফ আইসোমরফিক এবং হোমোমরফিক গ্রাফ সম্পর্কে যা জান লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪৫ নং দ্রষ্টব্য।

৭৬। সমরূপীয় দ্বিমিক ট্রি (Similar Binary Tree) কাকে বলে ব্যাখ্যা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৩৬ নং দ্রষ্টব্য।

৭৭। একটি পূর্ণ টি যার 26 টি নোড আছে। নোড 10 এর অনুজ এবং অগ্রজ বের কর। [(চিত্র ৭.৪ পূর্ণ দ্বিমিক বৃক্ষরাজি]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৩৮ নং দ্রষ্টব্য।

৭৮। বাইনারি ট্রি থেকে 2ট্রিতে পরিবর্তন পদ্ধতির ব্যাখ্যা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৩৯ নং দ্রষ্টব্য।

৭৯। দ্বিমিক সার্চ ট্রি (Binary Search Tree) সম্পর্কে যা জান লিখ। [বাকাশিবো-২০০২]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪০ নং দ্রষ্টব্য।

৮০। Traversing Binary Tree (অনুপ্রস্থ প্রিথিক ট্রিজ) সম্পর্কে ব্যাখ্যা কর।

অথবা, Traversing Binary Tree এর Method সমূহ উদাহরণসহ বর্ণনা কর। [বাকাশিবো-২০০৩R, ২০০৪, ০৯R]

অথবা, বাইনারি ট্রি এর ট্রাভার্সিং পদ্ধতিগুলো উদাহরণসহ ব্যাখ্যা কর। [বাকাশিবো-২০০৬, ২০০৭]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪১ নং দ্রষ্টব্য।

৮১। বাইনারি সার্চ ট্রিতে নতুন আইটেম ইনসার্ট করার এলগরিদম উদাহরণের সাহায্যে বর্ণনা কর। [বাকাশিবো-২০০২, ০৫, ০৭]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪২ নং দ্রষ্টব্য।

৮২। Tree diagram কী? [বাকাশিবো-২০১৪]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪৩ নং দ্রষ্টব্য।

সমস্যাবলি ঃ

১। দেখাও যে, $(A \times B) \cap (A \times C) = A \times (B \cap C)$ [বাকাশিবো-২০০৪]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলি ১ নং দ্রষ্টব্য।

২। প্রমাণ কর যে, $p \vee (q \wedge r)$ এবং $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ লজিক্যাল সমান। [বাকাশিবো-২০০৩, ২০০৮]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলি ২ নং দ্রষ্টব্য।

৩। $A = \{a, b, c, d, e\}, B = \{a, b, d, f, g\}, C = \{d, e, f, h\}$ হলে $A \cap (B \cup C)$ এর মান বের কর। [বাকাশিবো-২০০২]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলি ৩ নং দ্রষ্টব্য।

৪। $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ এবং $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)$ হলে $R_1 \cap R_2 =$ কত? [বাকাশিবো-২০০৩R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলি ৪ নং দ্রষ্টব্য।

৫। যদি A যে কোন সেট হয়, তবে দেখাও যে, (i) $A \cup A = A$, (ii) $A \cap A = A$.

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলি ৫ নং দ্রষ্টব্য।

৬। A, B, C যে কোন সেট হলে দেখাও যে,

(i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

(ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

(iii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; [বাকাশিবো-২০০২R, ১০R]

(iv) $(A \cap B)' = A' \cap B'$;

(v) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$;

(vi) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$.

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলি ৯ নং দ্রষ্টব্য।

৭। যদি $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 4, 6, 8\}$ এবং $C = \{3, 4, 5, 6\}$ হয়, তবে $A \cup B, B \cap C$ এবং $(A \cup B) \cap C$ এর মান নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলি ১০ নং দ্রষ্টব্য।

৮। $A = \{1, 2, 3, 4\}$ সেট থেকে $B = \{1, 3, 5\}$ সেটে বর্ণিত S একটি অন্বয়, সেখানে, $S = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B$ এবং $x < y\}$; S কে ক্রমজোড়ের সেট রূপে প্রকাশ কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলি ১১ নং দ্রষ্টব্য।

৯। $f : R \to R$ ফাংশনটি $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x \geq 2 \\ x + 2, & x < 2 \end{cases}$ দ্বারা প্রকাশিত। $f(5), f(0), f(-2)$ নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলি ১২ নং দ্রষ্টব্য।

১০। মনে কর, R বাস্তব সংখ্যার সেট এবং $f : R \to R$ যেখানে, (i) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$, (ii) $f(x) = \frac{x - 1}{2x - 3}$, (iii) $f(x) = 1 - x^2$ ফাংশনগুলোর ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলি ১৩ নং দ্রষ্টব্য।

১১। $A = R - \{3\}$ এবং $B = R - \{1\}$ এবং $A \to B, f(x) = \frac{x - 2}{x - 3}$;

ফাংশনটি এক-এক এবং সার্বিক কিনা কারণসহ উল্লেখ কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলি ১৪ নং দ্রষ্টব্য।

১২। সার্বিক সেট $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, A = \{4, 5, 6, 7\}, B = \{5, 7, 9\}$ এবং $C = \{6, 7, 5, 9\}$; $A', B' (A \cap C)'$ (A') এবং $(B - C)'$ নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলি ১৫ নং দ্রষ্টব্য।

১৩। সার্বিক সেট X = {a, b, c, d, e}, A = (a, b, d) এবং B = {b, d, c}| A ∪ B, B ∪ A, B′, B – A, A′ ∩ B, A ∪B′, A′ ∩ B′, B′ – A′, (A ∩B)′, (A ∪B)′ নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলি ১৬ নং দ্রষ্টব্য।

১৪। A এবং B সেট দুটি সার্বিক সেট U এর উপসেট। কোন শর্তাধীনে নিচের তথ্যগুলো সঠিক হবে তা নির্ণয় কর।

(i) A ∪ B = A ∩ B (ii) A ∪ B = A
(iii) A ∩ B = A (iv) A ∩ B = ϕ
(v) A ∪ B = ϕ (vi) A ∪B = U
(vii) A ∪ ϕ = U (viii) A′ ∩ ϕ = ϕ

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলি ১৭ নং দ্রষ্টব্য।

১৫। A, B, C যে কোন তিনটি সেট হলে, প্রমাণ কর যে,
(B ∩ C) ∪ A = (B ∪ A) ∩ (C ∪ A)

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলি ২২ নং দ্রষ্টব্য।

১৬। প্রমাণ কর ঃ
(i) A ∩ (A′ ∪ B) = A ∩B
(ii) A ∪ (A ∩ B) = A
(iii) A ∩ (A ∪ B) = A
(iv) A′ – B′ = B – A [বাকাশিবো-২০০৭]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলি ২৩ নং দ্রষ্টব্য।

১৭। A = {a, b}, B = {2, 3} এবং C = {3, 4} হলে,
A × (B ∪ C), (A × B) ∪ (A × C), A × (B ∩ C), (A × B) ∩ (A × C) নির্ণয় কর এবং দেখাও যে,
(i) A × (B ∪ C) = (A × B) ∪ (A × C)
(ii) A × (B ∩ C) = (A × B) ∩ (A × C)

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলি ২৪ নং দ্রষ্টব্য।

১৮। সরল কর ঃ {A ∪ B) ∪ (B ∪ C) ∪ (C ∪ A)}′

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলি ২৫ নং দ্রষ্টব্য।

১৯। A = {1, 2, 3, 4}, B = {2, 4, 6, 8}, C = {3, 4, 5, 6, 9} সেট তিনটির জন্য, n (A ∪ B ∪ C) = n (A) + n(B) + n (C) – n (A ∩ B) – n (B ∩ C) – n (C ∩A) + n (A ∩ B ∩ C) সূত্রটির সত্যতা প্রমাণ কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলি ২৬ নং দ্রষ্টব্য।

২০। যদি A = {1, 3, 5, 7} এবং B = {2, 4, 6} হয়, তবে মান নির্ণয় কর ঃ
(i) n(A × A), (ii) n (A × B), (iii) n (B × A), (iv) n (B × B)

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলি ২৭ নং দ্রষ্টব্য।

২১। যদি n(A) = 17, n(B) = 28 এবং n (A ∩ B) = 14 হয়, তবে n (A ∪ B) নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলি ২৮ নং দ্রষ্টব্য।

২২। (n + y), 4 এবং (9, x - y) ক্রমজোড় দুটি সমান হলে, x এবং y এর মান কত? [বাকাশিবো-২০০৭]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলি ২৯ নং দ্রষ্টব্য।

২৩। $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ফ্যাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর এবং $f(-3)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$-এর মাঝেকোণগুলোর মান নির্ণয় করা যায়, লেখ। [বাকাশিবো-২০১৩R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলি ৩০ নং দ্রষ্টব্য।

২৪। $A = \{1, 2\}$ এবং $B = \{a, b, c\}$ হলে $A \times B = ?$ [বাকাশিবো-২০১০]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলি ৩১ নং দ্রষ্টব্য।

২৫। $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $A = \{a, b, d\}$, $B = \{b, e, f\}$
$C = \{a, e, g\}$ হলে, $(A \cup C)' \cap (B \cup C)' \cup (A \cup B)'$ এর মান নির্ণয় কর। [বাকাশিবো-২০০৯]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলি ৩২ নং দ্রষ্টব্য।

২৬। তিনটি Propasition p.q এর r এর মাঝে যদি p এবং r সত্য হয় এবং q মিথ্যা হয়, তাহলে যৌগিক Propasition টি সত্য না মিথ্যা হবে- $((pvr) \wedge (q \wedge r))$
p : মাহমুদ ডিপ্লোমা ইঞ্জিনিয়ারিং পাস করেছে;
q : সে একটি ভালো চাকরি পেয়েছে ;
r : কিন্তু মাহমুদের চাকরি ভালো লাগছে না। [বাকাশিবো-২০০৯]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলি ৩৩ নং দ্রষ্টব্য।

২৭। $1 + 4 + 7 + \ldots\ldots\ldots + n$ পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয়ের এলগরিদম লিখ। [বাকাশিবো-২০০৯]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলি ৩৪ নং দ্রষ্টব্য।

২৮। $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y, z\}$ সেট দু'টি রিলেশন $R = \{(1, y), (1, z), (3, y)$ চিত্রের সাহায্যে দেখাও। বাকাশিবো-২০০২]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলি ১ নং দ্রষ্টব্য।

২৯। $A = \{a, b, c\}$ সেট হতে $B = \{1, 2\}$ সেটের মধ্যে মোট রিলেশনের সংখ্যা বের কর। [বাকাশিবো-২০০২, ০৮]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলি ২ নং দ্রষ্টব্য।

৩০। $A = \{x, y, z\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ সেট দুইটি রিলেশন $R = \{(x, 2), (x, 3), (z, 2)\}$ চিত্রের সাহায্যে দেখাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলি ৩ নং দ্রষ্টব্য।

৩১। দেয়া আছে, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, নিচের রিলেশনটির জন্য Directed গ্রাফ তৈরি কর ঃ $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 2), (4, 4)\}$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলি ৪ নং দ্রষ্টব্য।

৩২। তিনটি সেট $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{0, 1, 2\}$ এর ক্ষেত্রে A থেকে B এর Relation $R = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)\}$ এবং B থেকে C এর Relation $S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$ হলে Arrow diagram এর সাথে R_0S নির্ণয় কর। [বাকাশিবো-২০০৩, ২০০৩R, ১০, ১২, ১৩R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলি ৫ নং দ্রষ্টব্য।

৩৩। দুটি সেট $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$ এবং $R = \{(1, a), (1, b), (3, a)\}$ অন্বয়টিকে আয়তাকার Array পদ্ধতিতে দেখাও। [বাকাশিবো-২০১২ (৪র্থ পর্ব)]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলি ৬ নং দ্রষ্টব্য।

৩৪। দুটি সেট $A = \{1, 2, 3,\}$, $B = \{x, y, z\}$ এবং $R = \{(1, x), (1, y), (3, x)\}$ অন্বয়টিকে Arrow diagram পদ্ধতিতে দেখাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলি ৭ নং দ্রষ্টব্য।

৩৫। যদি $A = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং Relation $R = \{(1, 3), (1, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)$ হয়, তবে R অন্বয় (Relation) এর ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলি ১০ নং দ্রষ্টব্য।

৩৬। একটি সসীম সেট (Finite set) এ রিলেশন $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (4, 4)\}$ হলে একে অ্যারো ডায়াগ্রাম ও ম্যাট্রিক্স আকারে প্রকাশ কর। [বাকাশিবো-২০০৩R, ১২, ১৩]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলি ১১ নং দ্রষ্টব্য।

৩৭। মনে কর, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$ নিচের সেটগুলো নির্ণয় কর।
(ক) $A \cup B$ (খ) $A \cup C$ (গ) $B \cup C$ (ঘ) $A \cup A$.

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলি ১২ নং দ্রষ্টব্য।

৩৮। মনে কর, $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, d, e\}$, $C = \{a, f, g\}$ নিচের সেটগুলো বের কর ঃ
(ক) $A \cap B$ (খ) $A \cap C$ (গ) $B \cap C$ (ঘ) $(A \cap B) \cap C$.

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলি ১৩ নং দ্রষ্টব্য।

৩৯। মনে কর, সার্বিক সেট $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$
মান নির্ণয় কর ঃ
(ক) A' (খ) C' (গ) $(A \cap C)'$ (ঘ) $(B')'$ (ঙ) $(B - C)'$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলি ১৪ নং দ্রষ্টব্য।

৪০। মনে কর, $f: R \to R$ কে $f(x) = x^2 - 4x + 3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হল। মান নির্ণয় কর ঃ
(ক) $f(4)$ (খ) $f(-3)$ (গ) $f(y - 2z)$.

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলি ১৯ নং দ্রষ্টব্য।

৪১। সেট, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং $B = \{x, y, z\}$; ধরি Relation $R = \{(1,y), (2, z), (2, y)\}$ ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।
[বাকাশিবো-২০০৭]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলি ২০ নং দ্রষ্টব্য।

৪২। তিনটি সেট $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{x, y, z\}$ এর ক্ষেত্রে A থেকে B এর Relation $R = \{(1, a), (2, a), (2, d), (3, c), (a, d)$ এবং B থেকে C এর Relation $S = \{(b, x), (b, z), (c, y), (d, z)\}$ হলে $Mr \times Ms$ নির্ণয় কর।
[বাকাশিবো-২০১৩]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলি ২১ নং দ্রষ্টব্য।

৪৩। Relation $R = \{(1, a), (1, b), (2, a) (2, c) (3, b) (4, d)\}$ এর মাট্রিক্স ও Arrow diagram দেখাও। [বাকাশিবো-২০১১]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলি ২২ নং দ্রষ্টব্য।

৪৪। দেওয়া আছে $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{x, y, z\}$ আরও দেয়া আছে A থেকে B এর রিলেশন $R = \{(1, b), (2, b), (2, C)\}$ এবং B থেকে C এর রিলেশন $S = \{(a, y), (b, x), (c, y), (c, z)\}$। Ros এবং Mr, Ms নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলি ২৩ নং দ্রষ্টব্য।

৪৫। $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{x, y, z\}$, অম্বয় $R = \{(1, 6), (2, a), (2, c)\}$, অম্বয় $S = \{(a, y), (b, x), (c, y), (c, z)\}$ হলে Ros এর যোজিত অম্বয় এবং Ros অম্বয়ের ম্যাট্রিক্স Mros এর মান বের কর। [বাকাশিবো-২০০৮]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলি ২৪ নং দ্রষ্টব্য।

৪৬। তিনটি ভেক্টর, $u = (2, -7, 1)$
$v = (-3, 0, 4)$
এবং $w = (0, 5, -8)$ দেয়া আছে।
নির্ণয় কর ঃ (a) $u + v$ (b) $v + w$
(c) $-3u$ (d) $-w$
(e) $3u - 4v$ (f) $2u + 3v - 5w$
(g) u, v (h) $u. w$
(j) $v . w$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর সমস্যাবলি ১ নং দ্রষ্টব্য।

৪৭। দেয়া আছে, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}$
নির্ণয় কর ঃ (a) $A + B$;
(b) $3A$ এবং $-4B$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর সমস্যাবলি ৩ নং দ্রষ্টব্য।

৪৮। নির্ণয় কর $2A - 3B$, যেখানে, $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর সমস্যাবলি ৪ নং দ্রষ্টব্য।

৪৯। যদি $3\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+t & 3 \end{bmatrix}$ তবে x, y, z, t এর মান নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলি ৫ নং দ্রষ্টব্য।

৫০। মান নির্ণয় কর ঃ (a) $[3, -2, 5]\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ (b) $[2, -1, 7, 4]\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর সমস্যাবলি ৬ নং দ্রষ্টব্য।

৫১। ধরি, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

নির্ণেয় কর ঃ (a) AB (b) BA.

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর সমস্যাবলি ৭ নং দ্রষ্টব্য।

৫২। নিচের ম্যাট্রিক্সগুলোর কর্ণ (Diagonal) বের কর।

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & -5 & 8 \\ 4 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} t-2 & 3 \\ -4 & t+5 \end{bmatrix}$

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর সমস্যাবলি ৮ নং দ্রষ্টব্য।

৫৩। যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ হয় তবে নির্ণয় কর ঃ (a) A^2; (b) A^3 [বাকাশিবো-২০০৪, ১১R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর সমস্যাবলি ৯ নং দ্রষ্টব্য।

৫৪। ধর, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ এবং ধর $f(x) = 2x^3 - 4x + 5$

এবং $g(x) = x^2 + 2x - 11$ নির্ণয় কর ঃ

(a) $f(A)$

(b) $g(A)$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর সমস্যাবলি ১০ নং দ্রষ্টব্য।

৫৫। নির্ণয় কর ঃ (a) $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} a-b & b \\ b & a+b \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর সমস্যাবলি ১১ নং দ্রষ্টব্য।

৫৬। যদি সম্ভব হয়, তবে নিচের প্রতিটি ম্যাট্রিক্স এর বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।

(a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ (c) $C = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর সমস্যাবলি ১২ নং দ্রষ্টব্য।

৫৭। যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$ হয় তবে A^3 এর মান বের কর। [বাকাশিবো- ২০০৭]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর সমস্যাবলি ১৩ নং দ্রষ্টব্য।

৫৮। যদি ভেক্টর $u = (2, 3, -1)$ এবং $\theta = (-5, 1, 8)$ হয় তবে $u.\theta = ?$ এবং $\|u\| = ?$ [বাকাশিবো- ২০০৭]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর সমস্যাবলি ১৪ নং দ্রষ্টব্য।

৫৯। $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ হলে AA' এর মান বের কর। [বাকাশিবো-২০১১]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর সমস্যাবলি ১৫ নং দ্রষ্টব্য।

৬০। দুটি ভেক্টর $u = (3, -12, -4)$ এবং $v = (2, -7, 1)$ হলে $u + 2v$ নির্ণয় কর। [বাকাশিবো-২০১৩R]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর সমস্যাবলি ১৬ নং দ্রষ্টব্য।

৬১। প্রমাণ কর যে, ${}^{n+1}C_r = {}^nC_{r-1} + {}^nC_r$ [বাকাশিবো-২০০৬, ০৭, ১০R, ১১R]

অথবা, দেখাও যে, $\binom{n+r}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$ [বাকাশিবো-২০০৪, ০৮]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সমস্যাবলি ২৫ নং দ্রষ্টব্য।

৬২। n এর মান 0 থেকে 6 এর মধ্যে হলে $(a + b)^n$ এর বিস্তৃতি দেখিয়ে প্যাসকেলের ট্রায়াংগেল অংকন করে তার বৈশিষ্ট্যসমূহ লিখ। [বাকাশিবো ২০০৩R, ০৪, ০৮, ১২, ১৩]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সমস্যাবলি ২৬ নং দ্রষ্টব্য।

৬৩। দু'টি দলের মধ্যে জয়-পরাজয় 4 (চার)টি খেলা হবে। প্রথম দলটি 2টি খেলায় জয়লাভ করল। এ খেলা কত প্রকারে খেলা যায়? তা ট্রি ডায়াগ্রাম (Tree-diagram) এর সাহায্যে দেখাও। [বাকাশিবো-২০০৫]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সমস্যাবলি ২৭ নং দ্রষ্টব্য।

৬৪। নির্ণয় কর।

(a) 5! 6! 7! 8! 9! এবং 10!

(b) (i) $\frac{13!}{12!}$, (ii) $\frac{17!}{10!}$ (iii) $\frac{80!}{70!}$, (iv) $\frac{100!}{99!}$

(c) (i) $\frac{n!}{(n-2)!}$ (ii) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

(d) (i) $\binom{66}{39}$, (ii) $\binom{100}{80}$ (iii) $\binom{99}{77}$, (iv) $\binom{22}{17}$

(e) প্রমাণ কর $\binom{17}{6} = \binom{16}{5} + \binom{16}{6}$

(f) প্রমাণ কর $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$ [বাকাশিবো-২০০৪]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সমস্যাবলি ২৮ নং দ্রষ্টব্য।

৬৫। (i) যদি ${}^nP_4 = 6 \times {}^nP_3$ হয়, তাহলে n-এর মান নির্ণয় কর।

(ii) যদি ${}^{2n}P_3 = 2 \times {}^nP_4$ হয়, তাহলে n-এর মান নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সমস্যাবলি ২৯ নং দ্রষ্টব্য।

৬৬। (i) দেখাও যে, AMERICA শব্দটির বর্ণগুলোকে একত্রে নিয়ে যত প্রকারে সাজানো যায়, CALCUTTA শব্দটির বর্ণগুলোকে একত্র নিয়ে তার দ্বিগুণ উপায়ে সাজানো যায়।

(ii) 10টি বর্ণ আছে যাদের কিছু সংখ্যক একজাতীয় এবং বাকিগুলো ভিন্ন ভিন্ন; যদি তাদের সবগুলোকে একত্র নিয়ে 30240টি শব্দ গঠন করা যায়, তবে কতগুলো বর্ণ এক জাতীয়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সমস্যাবলি ৩৩ নং দ্রষ্টব্য।

৬৭। (i) PARALLEL শব্দটির অক্ষরগুলোর সবগুলো একত্রে নিয়ে কত প্রকারে সাজানো যায় তা বের কর; এবং স্বরবর্ণগুলোকে পৃথক না রেখে অক্ষরগুলোকে কত প্রকারে সাজানো যায়, তাও বের কর।

(ii) MATHEMATICS শব্দটির বর্ণগুলোকে কত প্রকারে সাজানো যায় তা বের কর এবং এদের কতগুলোতে স্বরবর্ণগুলো একত্রে থাকবে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সমস্যাবলি ৩৪ নং দ্রষ্টব্য।

৬৮। PERMUTATION শব্দটির বর্ণগুলোর কোন স্বরবর্ণের অবস্থান পরিবর্তন না করে কত রকমে পুনর্বিন্যাস করা যেতে পারে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সমস্যাবলি ৩৮ নং দ্রষ্টব্য।

৬৯। 7টি সবুজ, 4টি নীল এবং 2টি লাল কাউন্টার এক সারিতে কত রকমে সাজানো যেতে পারে? এদের কতগুলোতে লাল কাউন্টার দুটি একত্রে থাকবে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সমস্যাবলি ৩৯ নং দ্রষ্টব্য।

৭০। (i) প্রমাণ কর যে, ${}^{n}C_{r} = {}^{n-1}C_{r} + {}^{n-1}C_{r-1}$

(ii) প্রমাণ কর যে, ${}^{12}C_{4} + {}^{12}C_{3} = {}^{13}C_{4}$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সমস্যাবলি ৪১ নং দ্রষ্টব্য।

৭১। 16 বাহুবিশিষ্ট একটি সামতলিক ক্ষেত্রের কৌণিক বিন্দুর সংযোগ রেখা দ্বারা কতগুলো বিভিন্ন ত্রিভুজ গঠন করা যেতে পারে? ক্ষেত্রটির কতগুলো কর্ণ আছে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সমস্যাবলি ৪২ নং দ্রষ্টব্য।

৭২। একটি দশ ভুজের কৌণিক বিন্দুগুলোর সংযোগ রেখার সাহায্যে কতগুলো কর্ণ টানা যেতে পারে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সমস্যাবলি ৪৩ নং দ্রষ্টব্য।

৭৩। যদি ${}^{n}C_{r}$, n সংখ্যক বিভিন্ন জিনিস থেকে প্রতিবারে r সংখ্যক জিনিস নিয়ে সমাবেশ সংখ্যা প্রকাশ করে, তবে প্রমাণ কর যে, ${}^{n}C_{r} + {}^{n}C_{r-1} = {}^{n+1}C_{r}$ এবং এর সাহায্যে দেখাও যে,

(i) ${}^{n}C_{r} = {}^{n-2}C_{r} + 2\,{}^{n-2}C_{r-1} + {}^{n-2}C_{r-2}$, যখন $n > r > 2$

(ii) ${}^{n+2}C_{r} = {}^{n}C_{r} + 2.\,{}^{n}C_{r-1} + {}^{n}C_{r-2}$, যখন $n > r > 2$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সমস্যাবলি ৪৪ নং দ্রষ্টব্য।

৭৪। যদি ${}^{n}C_{6} = {}^{n}C_{3}$ হয় তবে 10Cn এর মান কত? [বাকাশিবো-২০১১]

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সমস্যাবলি ৪৫ নং দ্রষ্টব্য।

৭৫। চিত্র নং ৬.২৪ এর 1 এবং 2 এ প্রদর্শিত চিত্রলেখ এর ভার্টিকস সংখ্যার ধার বা পার্শ্ব সংখ্যা এবং প্রতিটির শীর্ষমাত্রা নির্ণয় কর।

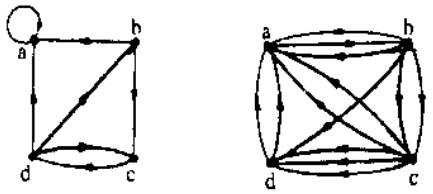
চিত্র ঃ ৬.২৪ চিত্রলেখ

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সমস্যাবলি ১ নং দ্রষ্টব্য।

৭৬। প্রতি 5 মাত্রা বিশিষ্ট 15 ভার্টিকস পূর্ণ সরল চিত্রলেখ হতে পারে কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সমস্যাবলি ২ নং দ্রষ্টব্য।

৭৭। চিত্র নং ৬.২৫ এ প্রদর্শিত চিত্রলেখ এর শীর্ষ সংখ্যা এবং ধার নির্ণয় কর এবং প্রদত্ত নির্দেশিত মাল্টিগ্রাফ এর জন্য প্রতি ভার্টিকস এর ইন-ডিগ্রি (In degree) এবং আউট-ডিগ্রি (Out degree) নির্ধারণ কর।



চিত্র ঃ ৬.২৫ মাল্টিগ্রাফ

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সমস্যাবলি ৩ নং দ্রষ্টব্য।

৭৮। নিচের চিত্রলেখ সমূহের কতটি ভার্টিকস এবং কতটি ধার (Edges) আছে?

(a) K_n (b) C_n (c) W_n (d) K_{mn} (e) Q_n

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সমস্যাবলি ৪ নং দ্রষ্টব্য।

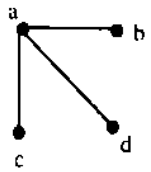
৭৯। নিম্নলিখিত মাত্রা বিশিষ্ট 5 ভার্টিকস দিয়ে সরল চিত্রলেখ গঠন করা যাবে? যদি যায় তবে এরূপ চিত্রলেখ অংকন কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সমস্যাবলি ৫ নং দ্রষ্টব্য।

৮০। কমপক্ষে একটি ভার্টিকস K_3 এর কতটি উপ চিত্রলেখ হবে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সমস্যাবলি ৬ নং দ্রষ্টব্য।

৮১। নিচের চিত্রলেখ থেকে গঠিত সকল উপচিত্রলেখ আঁক?

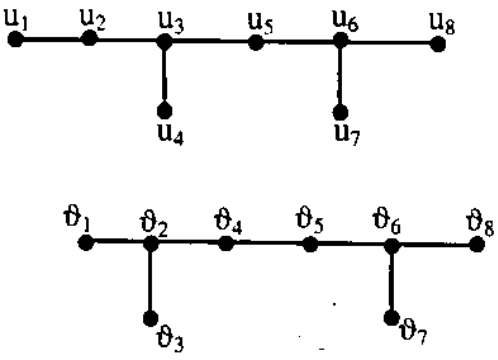


চিত্র ঃ ৬.২৬

নিচের প্রদত্ত (৮ - ১১) জোড় গ্রাফগুলো আইসোমরফিক কিনা? উল্লেখ কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সমস্যাবলি ৭ নং দ্রষ্টব্য।

৮২।

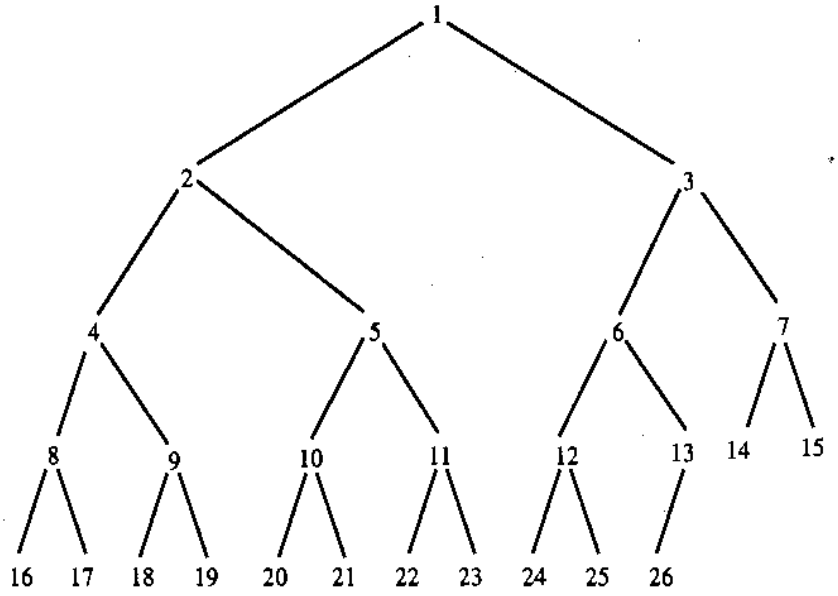


চিত্র ঃ ৬.৩০

নিচের প্রশ্নমালা (১২-১৩) এর চিত্রলেখদ্বয় কানেকটেড কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সমস্যাবলি ১১ নং দ্রষ্টব্য।

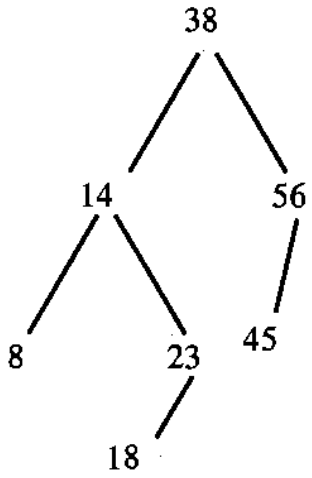
৮৩। একটি পূর্ণ ট্রিজ T, যার 26 টি নোড আছে। নোড 12 এর অনুজ এবং অগ্রজ বের করে। [বাকাশিবো-২০১২]



চিত্র ঃ ৭.১৫ পূর্ণ ট্রিজ

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সমস্যাবলি ১ নং দ্রষ্টব্য।

৮৪। নিচের চিত্রটি বাইনারি সার্চ টি। এক্ষেত্রে 23কে যদি 35 এবং 40 দিয়ে পরিবর্তিত করা হয়, তবে ঐটি বাইনারি সার্চট্রি হবে কী? যুক্তি উপস্থাপন কর। [বাকাশিবো-২০০৭]



চিত্র ঃ ৭.১৬

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সমস্যাবলি ২ নং দ্রষ্টব্য।

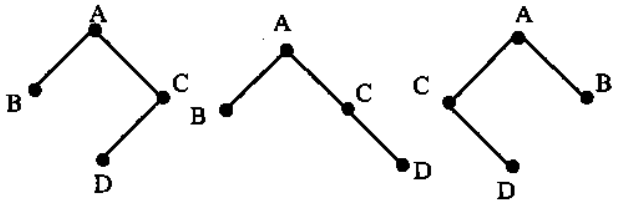
৮৫। Mathematic, physics, Geography, zoology, Meterology, Geology, Psychology, Chemistry, Biology এবং Botany এর শব্দগুলোর বর্ণমালার ক্রম অনুযায়ী বাইনারি সার্চ ট্রি গঠন কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সমস্যাবলি ৭ নং দ্রষ্টব্য।

৮৬। ধরা T হল দ্বিমিক বৃক্ষরাজি মেমোরিতে সংরক্ষিত [চিত্র ৭. ( )]। T এর ডায়াগ্রাম অংকন কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সমস্যাবলি ৮ নং দ্রষ্টব্য।

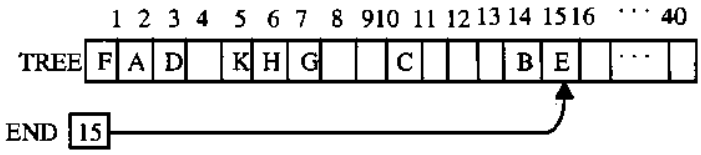
৮৭। নিচের চিত্রে তিনটি ট্রি T_1, T_2, T_3 দেয়া আছে, চিহ্নিত কর ঃ
(i) রুটেড ট্রি (ii) অর্ডারেড রুটেড ট্রি (iii) বাইনারি ট্রি।



চিত্র ঃ ৭.১৮

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সমস্যাবলি ৯ নং দ্রষ্টব্য।

৮৮। চিত্র নং ৭.( )-এ প্রদর্শিত দ্বিমিক চিত্র লেখ T ধারাবাহিক অনুক্রম মেমোরিতে সাজাও।



চিত্র ঃ ৭.১৯ দ্বিমিক ট্রি

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সমস্যাবলি ১০ নং দ্রষ্টব্য।

৮৯। একটি পূর্ণ ট্রি যার 31টি নোড আছে। নোড 10 এর অনুজ এবং অগ্রজ বের কর। [বাকাশিবো-২০০৭, ১০R, ১২]

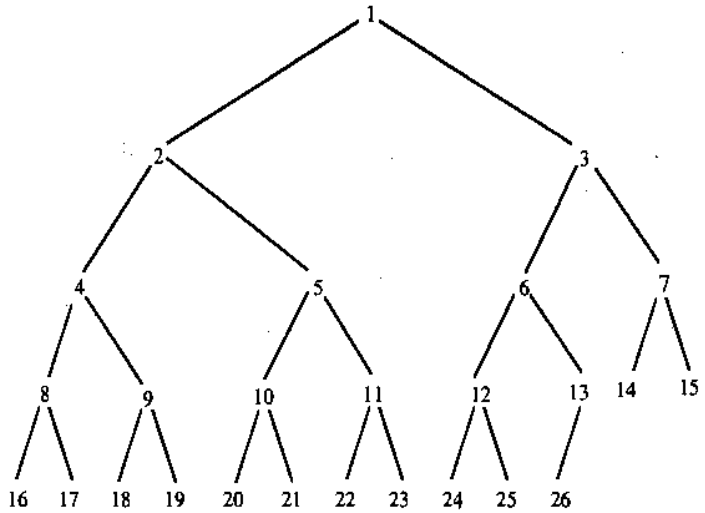
আমরা জানি, K নোডের অগ্রজ $= \frac{K}{2}$ এবং অনুজ $= 2k$ এবং $2k + 1$

এখানে $k = 10$

$\therefore$ অনুজদ্বয় $= 2 \times 10 = 20$ এবং $2 \times 10 + 1 = 21$

এবং অগ্রজ $= \frac{10}{2} = 5$

$\therefore$ 10 এর অগ্রজ 5 এবং অনুজদ্বয় 20 ও 21



চিত্র ঃ ৭.১৫ পূর্ণ ট্রিজ

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সমস্যাবলি ১১ নং দ্রষ্টব্য।

বাংলাদেশ কারিগরি শিক্ষা বোর্ড, ঢাকা

প্রকৌশল ডিপ্লোমা শিক্ষাক্রম

চতুর্থ পর্ব (২০০১-২০০২ শিক্ষাসন)-সমাপনী পরীক্ষা-২০০২

কম্পিউটার টেকনোলজি

বিষয় ঃ ডিসক্রিট ম্যাথ্‌মেটিক্‌স (সিএমটি-৪৪২)

সময় ঃ ৩ ঘণ্টা পূর্ণমান ঃ ৫০

ক ও খ বিভাগের সকল প্রশ্নের এবং গ বিভাগ হতে যে কোন ৪(চার) টি প্রশ্নের উত্তর দাও।

ক-বিভাগ (মান ঃ ১০ × ১ = ১০)

১। ডিসক্রিট ম্যাথমেটিক্‌স বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১ নং দ্রষ্টব্য।

২। $A = \{1, 2, 3\}$ এবং $B = \{x, y, z\}$ সেট দুটির রিলেশন $R = \{(1, y), (1, z), (3, y)\}$ চিত্রের সাহায্যে দেখাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলী ১ নং দ্রষ্টব্য।

৩। $A = \{a, b, c\}$ সেট হতে $B = \{1,2\}$ সেটের মধ্যে মোট রিলেশনের সংখ্যা বের কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলী ২ নং দ্রষ্টব্য।

৪। ইনভার্স ম্যাট্রিক্স বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৭ নং দ্রষ্টব্য।

৫। পিজিয়ন হোল নীতি কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৬ নং দ্রষ্টব্য।

৬। কাউন্টিং বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২ নং দ্রষ্টব্য।

৭। Independent event কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৬ নং দ্রষ্টব্য।

৮। বাইনারি সার্চ ট্রী বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৯ নং দ্রষ্টব্য।

৯। ৫২টি তাসের একটি প্যাকেট হতে যে কোন একটি তাস টেনে বের করলে রাজার তাসটি বের হওয়ার সম্ভাবনা কত?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৬৩ নং দ্রষ্টব্য।

১০। কানেক্‌টিভিটি বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২১ নং দ্রষ্টব্য।

খ-বিভাগ (মান ঃ ১০ × ২ = ২০)

১১। $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, b, d, f, g\}$ এবং $C = \{d, e, f, h\}$ হলে $A \cap (B \cup C)$ এর মান বের কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলী ৩ নং দ্রষ্টব্য।

১২। ডিসজয়েন্ট সেট উদাহরণের সাহায্যে বুঝিয়ে লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৩ নং দ্রষ্টব্য।

১৩। One to one এবং On to function এর মধ্যে পার্থক্য লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪৮ নং দ্রষ্টব্য।

১৪। প্যাস্কেলের ত্রিভুজ বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৫ নং দ্রষ্টব্য।

১৫। মাল্টিগ্রাফ চিত্রের সাহায্যে বুঝিয়ে লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২২ নং দ্রষ্টব্য।

১৬। গ্রাফের আইসোমর্ফিজম বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৪ নং দ্রষ্টব্য।

১৭। ট্রি এর বৈশিষ্ট্যসমূহ লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২২ নং দ্রষ্টব্য।

১৮। ফাইনাইট প্রোবাবিলিটি স্পেস বুঝিয়ে লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৪ নং দ্রষ্টব্য।

১৯। দুটি ছক্কা একই সাথে নিক্ষেপ করা হল। যদি একটি ছক্কায় সবসময় ৫ পাওয়া যায়, তবে দুটি ছক্কার সমষ্টি ১০ হওয়ার সম্ভাবনা কত?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৬৪ নং দ্রষ্টব্য।

২০। রিকার্সিভ ফাংশন বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪১ নং দ্রষ্টব্য।

গ-বিভাগ (মান ঃ ৪ × ৫ = ২০)

২১। ডিজিটাল কম্পিউটার ইলেকট্রনিক্সে ডিসক্রিয়েট ম্যাথমেটিক্স এর গুরুত্ব বর্ণনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৫৪ নং দ্রষ্টব্য।

২২। উদাহরণসহ বিভিন্ন প্রকার relation এর বর্ণনা দাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ২৯ নং দ্রষ্টব্য।

২৩। A ও B দুটি ফাইনাইট সেট হলে প্রমাণ কর

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪২ নং দ্রষ্টব্য।

২৪। উদাহরণসহ degree of vertex এর বর্ণনা দাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪০ নং দ্রষ্টব্য।

২৫। বাইনারি সার্চ ট্রিতে একটি নতুন আইটেম ইনসার্ট করার এলগরিদম উদাহরণের সাহায্যে বর্ণনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪২ নং দ্রষ্টব্য।

বাংলাদেশ কারিগরি শিক্ষা বোর্ড, ঢাকা

ডিপ্লোমা-ইন-ইঞ্জিনিয়ারিং শিক্ষাক্রম

চতুর্থ পর্ব (২০০২-২০০৩ শিক্ষাসন) সমাপনী পরীক্ষা-২০০৩

টেকনোলজি ঃ কম্পিউটার

বিষয় ঃ ডিসক্রিট ম্যাথমেটিক্স (সি.এম.টি-৪৪২)

সময় ঃ ৩ ঘন্টা পূর্ণমান ঃ ৫০

ক ও খ-বিভাগের সকল প্রশ্নের এবং গ-বিভাগের যে কোন ৪(চার)টি প্রশ্নের উত্তর দাও।

ক-বিভাগ (মান ঃ ১০ × ১ = ১০)

১। ডিসক্রিট ম্যাথমেটিক্স এর বিষয়বস্তু কী কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২ নং দ্রষ্টব্য।

২। Proposition বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১০ নং দ্রষ্টব্য।

৩। Contradiction কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১১ নং দ্রষ্টব্য।

৪। Reflexive relation বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৪ নং দ্রষ্টব্য।

৫। ফাংশনের Domain কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৮ নং দ্রষ্টব্য।

৬। Algorithm এর Complexity কত প্রকার ও কী কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪৩ নং দ্রষ্টব্য।

৭। Inverse matrix বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৭ নং দ্রষ্টব্য।

৮। Counting বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২ নং দ্রষ্টব্য।

৯। Probability এর গাণিতিক সূত্রটি লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২ নং দ্রষ্টব্য।

১০। Degree of vertex বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২০ নং দ্রষ্টব্য।

বাকাশিবো প্রশ্নাবলি

খ-বিভাগ (মান ঃ ১০ × ২ = ২০)

১১। One to One এবং On to ফাংশনের মধ্যে পার্থক্য কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪৮ নং দ্রষ্টব্য।

১২। ডিজিটাল কম্পিউটার সিস্টেমে ডিসক্রিট ম্যাথমেটিক্স এর গুরুত্ব বর্ণনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৫৪ নং দ্রষ্টব্য।

১৩। প্রমাণ কর যে, PV $(q \wedge r)$ এবং $(p \wedge q) \wedge (p \vee r)$ লজিক্যালি সমান।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলী ২ নং দ্রষ্টব্য।

১৪। Independent Event কী? উদাহরণসহ ব্যাখ্যা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৬ নং দ্রষ্টব্য।

১৫। উদাহরণসহ Pigeon hole নীতির বর্ণনা দাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৬ নং দ্রষ্টব্য।

১৬। Complete বাইনারি ট্রি কী? উদাহরণসহ লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৩ নং দ্রষ্টব্য।

১৭। একটি মুদ্রা তিনবার নিক্ষেপ করা হলে কোন হেড না পাওয়ার সম্ভাব্যতা কতটুকু?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর উদাহরণ ৫.২৯ নং দ্রষ্টব্য।

১৮। উদাহরণসহ recursive function এর বর্ণনা দাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪১ নং দ্রষ্টব্য।

১৯। Diagraph-এ relation কে কীভাবে উপস্থাপন করা হয়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৩ নং দ্রষ্টব্য।

২০। গ্রাফ ও মালটিগ্রাফের মধ্যে পার্থক্য লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৩ নং দ্রষ্টব্য।

গ-বিভাগ (মান ঃ ৪ × ৫ = ২০)

২১। Equivalence, Ordered এবং functional relation এর বর্ণনা দাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২১, ২২, ২৩ নং দ্রষ্টব্য।

২২। তিনটি সেট A = {1,2,3}, B = {1,2,3,4} এবং C = {0, 1,2} এর ক্ষেত্রে A থেকে B এর Relation R = {(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)} ও B থেকে C এর relation
S = {(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)} হলে arrow diagram এর সাহায্যে RoS নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলী ৫ নং দ্রষ্টব্য।

২৩। মেট্রিক গণনের algorithm লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৩১ নং দ্রষ্টব্য।

২৪। উদাহরণসহ Pascal's ত্রিভুজের বর্ণনা দাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ২২ নং দ্রষ্টব্য।

২৫। দুটি বর্জনশীল ঘটনা (Event) এর ক্ষেত্রে Probability এর যোগসূত্রটি প্রমাণ কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪৪ নং দ্রষ্টব্য।

বাংলাদেশ কারিগরি শিক্ষা বোর্ড, ঢাকা

ডিপ্লোমা-ইন-ইঞ্জিনিয়ারিং শিক্ষাক্রম

চতুর্থ পর্ব সমাপনী পরীক্ষা-২০০৪

টেকনোলজি ঃ কম্পিউটার

বিষয় ঃ ডিসক্রিট ম্যাথমেটিক্স্ (সিএমটি-৪৪২)

সময় ঃ ৩ ঘণ্টা

পূর্ণমান ঃ ৫০

ক ও খ-বিভাগের সকল প্রশ্নের এবং গ-বিভাগের যে কোন ৪(চার) টি প্রশ্নের উত্তর দাও।

ক-বিভাগ (মান ঃ ১০ × ১ = ১০)

১। কম্পাউন্ড প্রপজিশন কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৪ নং দ্রষ্টব্য।

২। ইনভার্স রিলেশন বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৭ নং দ্রষ্টব্য।

৩। দেখাও যে, $(A \times B) \cap (A \times C) = A \times (B \cap C)$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলী ১ নং দ্রষ্টব্য।

৪। ভেক্টর ও ম্যাট্রিক্স বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১, ২ নং দ্রষ্টব্য।

৫। Pascal Triangle কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৫ নং দ্রষ্টব্য।

৬। একটি 50 পয়সার coin 10 বার টস্ করা হলে শাপলা ফুলের দিক পড়ার সম্ভাবনা (Probability) কত?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৬১ নং দ্রষ্টব্য।

৭। মাল্টিগ্রাফ বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২২ নং দ্রষ্টব্য।

৮। কাউন্টিং এর দুটি নীতি কী কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩ নং দ্রষ্টব্য।

৯। রিকার্শন কী?

উত্তর সংকেত সিলেবাস বহির্ভূত

১০। Binary Tree বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৭ নং দ্রষ্টব্য।

খ-বিভাগ (মান ঃ ১০ × ২ = ২০)

১১। এলগরিদমের কমপ্লেক্সসিটি বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪৭ নং দ্রষ্টব্য।

১২। দেয়া আছে A = {1, 2, 3, 4} ; নিচের রিলেশনটির জন্য directed গ্রাফ তৈরি কর ঃ
R = { (1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (4, 2), (4,4) }

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলী ৪ নং দ্রষ্টব্য।

১৩। $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ হলে দেখাও যে, $A^2 = AA$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর উদাহরণ ৩.৮ নং দ্রষ্টব্য।

১৪। Pigeon hole এর মূলনীতি লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৬ নং দ্রষ্টব্য।

১৫। Finite probability space এর সংক্ষিপ্ত বর্ণনা দাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৭ নং দ্রষ্টব্য।

১৬। উদাহরণসহ গ্রাফের বৈশিষ্ট্যসমূহ লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৬ নং দ্রষ্টব্য।

১৭। কমপ্লিট ও এক্সটেন্ডেড বাইনারি ট্রি এর মধ্যে পার্থক্য লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৫ নং দ্রষ্টব্য।

১৮। উদাহরণসহ inverse matrix এর ব্যাখ্যা দাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ২৭ নং দ্রষ্টব্য।

১৯। Counting এর Basic principle লিখ

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩ নং দ্রষ্টব্য।

২০ উদাহরণসহ ডিসজয়েন্ট সেট বুঝিয়ে লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৬ নং দ্রষ্টব্য।

গ-বিভাগ (মান ঃ ৪ × ৫ = ২০)

২১। Traversing Binary trees এর Method সমূহ উদাহরণসহ বর্ণনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪১ নং দ্রষ্টব্য।

২২ দেখাও যে, $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সমস্যাবলী ২৮ (f) নং দ্রষ্টব্য।

২৩ Homeomorphic graph কী? উদাহরণসহ বর্ণনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪৩ নং দ্রষ্টব্য।

২৪। $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ হলে AA′ ও A′A এর মান নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৩৪ নং দ্রষ্টব্য।

২৫। n এর মান 0 থেকে 6 এর মাঝে হলে $(a+b)^n$ এর বিস্তৃতি দেখিয়ে প্যাসকেলের ট্রায়াংগল্ অংকন করে তার বৈশিষ্ট্যসমূহ লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সমস্যাবলী ২৬ নং দ্রষ্টব্য।

বাংলাদেশ কারিগরি শিক্ষা বোর্ড, ঢাকা

ডিপ্লোমা-ইন-ইঞ্জিনিয়ারিং শিক্ষাক্রম

চতুর্থ পর্ব সমাপনী পরীক্ষা-২০০৫

টেকনোলজি ঃ কম্পিউটার

বিষয় ঃ ডিসক্রিট ম্যাথমেটিক্স (সিএমটি-৪৪২)

সময় ঃ ৩ ঘন্টা পূর্ণমান ঃ ৫০

ক ও খ বিভাগের সকল প্রশ্নের এবং গ বিভাগের যে কোন ৪ (চার) টি প্রশ্নের উত্তর দাও।

ক-বিভাগ (মান ঃ ১০ × ১ = ১০)

১। Discrete Mathematics কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১ নং দ্রষ্টব্য।

২। এলগরিদমের complexity বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪৭ নং দ্রষ্টব্য।

৩। Relation বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৮ নং দ্রষ্টব্য।

৪। একটি Martix কে Row canonical form কখন বলা যায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৯ নং দ্রষ্টব্য।

৫। Generalized pigeon-hole principle বিবৃত কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৬ নং দ্রষ্টব্য।

৬। Probability Function কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১১ নং দ্রষ্টব্য।

৭। Degree of vertex কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৮ নং দ্রষ্টব্য।

৮। Binary tree কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৭ নং দ্রষ্টব্য।

৯। Basic logical operation গুলো কী কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৫ নং দ্রষ্টব্য।

১০। Binomial co-efficients কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৭ নং দ্রষ্টব্য।

খ-বিভাগ (মান ঃ ১০ × ২ = ২০)

১১। Discrete Mathematics এর প্রয়োগ ক্ষেত্রগুলো কী কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৭ নং দ্রষ্টব্য।

১২। Absolute এবং Relative Complement এর মধ্যে পার্থক্য কী?

উত্তর সংকেত সিলেবাস বহির্ভূত

১৩। অম্বয় এবং Matrix এর যোজন বর্ণনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৩৫ নং দ্রষ্টব্য।

১৪। Echelon Matrix এর দুটি শর্ত লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৮ নং দ্রষ্টব্য।

১৫। দুটি দলের মধ্যে জয়-পরাজয় ৪(চার)টি খেলা হবে। প্রথম দলটি ২(দুটি) খেলায় জয়লাভ করল। এই খেলা কত প্রকারে খেলা যায়, তা ট্রি-ডায়াগ্রাম (Tree-Diagram) এর সাহায্যে দেখাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সমস্যাবলী ২৭ নং দ্রষ্টব্য।

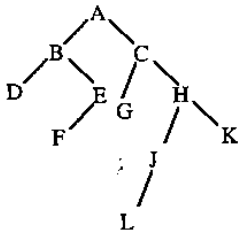
১৬। কোন ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা p এবং না ঘটার সম্ভাবনা q হলে দেখাও যে, $p + q = 1$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৫২ নং দ্রষ্টব্য।

১৭। Isomorphic এবং Homeomorphic graph এর মধ্যে পার্থক্য লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩০ নং দ্রষ্টব্য।

১৮। নিচের Binary tree টির preorder এবং Inorder traversal লিখ।



উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৬ নং দ্রষ্টব্য।

১৯। ফাংশনের Range of image উদাহরণের সাহায্যে ব্যাখ্যা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪০ নং দ্রষ্টব্য।

২০। Graph এর ক্ষেত্রে Cut point এবং Bridge কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৪ নং দ্রষ্টব্য।

গ-বিভাগ (মান ঃ $৪ \times ৫ = ২০$)

২১। চিত্র এবং উদাহরণসহ one-to-one এবং on to ফাংশনের পার্থক্য বর্ণনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৫৭ নং দ্রষ্টব্য।

২২। Relation এর Property গুলো কী কী? বর্ণনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ২৮ নং দ্রষ্টব্য।

২৩ Binary search tree তে একটি নতুন আইটেম Insert করার algorithm উদাহরণের সাহায্যে বর্ণনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪২ নং দ্রষ্টব্য।

২৪। তিনটি Finite set A, B, C হলে দেখাও যে,

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৩৫ নং দ্রষ্টব্য।

২৫। Digital computer System-এ Discrete Mathematics এর গুরুত্ব আলোচনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৫৪ নং দ্রষ্টব্য।

বাংলাদেশ কারিগরি শিক্ষা বোর্ড, ঢাকা

ডিপ্লোমা-ইন-ইঞ্জিনিয়ারিং শিক্ষাক্রম

চতুর্থ পর্ব সমাপনী পরীক্ষা-২০০৫

টেকনোলজি ঃ কম্পিউটার

বিষয় ঃ ডিসক্রিট ম্যাথমেটিক্স

(বিষয় কোডঃ ২৬৪৪)

সময় ঃ ৩ ঘন্টা পূর্ণমান ঃ ৫০

ক ও খ বিভাগের সকল প্রশ্নের এবং গ বিভাগের যে কোন ৪ (চার) টি প্রশ্নের উত্তর দাও।

ক-বিভাগ (মান ঃ ১০ × ১ = ১০)

১। বিবৃতি (Propositions) কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৩ নং দ্রষ্টব্য।

২। বিযুক্ত (Disjoint) সেট কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩২ নং দ্রষ্টব্য।

৩। অন্বয় (Relation) বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১ নং দ্রষ্টব্য।

৪। কর্ণ ম্যাট্রিক্স বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৬ নং দ্রষ্টব্য।

৫। $^{12}C_6$ = কত?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৮ নং দ্রষ্টব্য।

৬। নিশ্চিত ঘটনা (Sure Event) কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৮ নং দ্রষ্টবা।

৭। মাল্টি গ্রাফ বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২২ নং দ্রষ্টব্য।

৮। Complete Binary Tree বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৩ নং দ্রষ্টব্য।

৯। গণনার সংজ্ঞা দাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২ নং দ্রষ্টব্য।

১০। রিফ্লেক্সিভ রিলেশন এর সংজ্ঞা দাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৬ নং দ্রষ্টব্য।

খ-বিভাগ (মান ঃ ১০ × ২ = ২০)

১১। Union ও Intersection এর পার্থক্য চিত্রসহ বুঝিয়ে লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৬১ নং দ্রষ্টব্য।

১২। প্যাসকেলের ত্রিভুজের শর্ত দুটি লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৬ নং দ্রষ্টব্য।

১৩। A = { x, y, z } এবং B = {1, 2, 3 } সেট দুটির Relation, R = {(x, 2), (x, 3), (z, 2)} চিত্রের সাহায্যে দেখাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলি ৩ নং দ্রষ্টব্য।

১৪। $f(x) = \sqrt{64 - x^2}$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৯ নং দ্রষ্টব্য।

১৫। $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ হলে AB এর মান নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর উদাহরণ ৩.১৫ নং দ্রষ্টব্য।

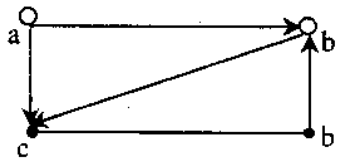
১৬। উদাহরণসহ কপোত বিবরে মূলনীতি লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৪ নং দ্রষ্টব্য।

১৭। একটি ছক্কা নিক্ষেপ করা হলে জোড় সংখ্যাগুলো উপরের পিঠে পাওয়ার সম্ভাব্যতা কতবার?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর উদাহরণ ৫.১৭ নং দ্রষ্টব্য।

১৮। একটি ছক্কা নিক্ষেপ করা হলে জোড় সংখ্যাগুলো উপরের পিঠে পাওয়ার সম্ভাব্যতা কতবার? নিচের প্রদর্শিত নির্দেশিত ধার (edges) যুক্ত চিত্র লেখ G এর প্রতি ভার্টিক্স এর শীর্ষমাত্রা নির্ণয় কর।

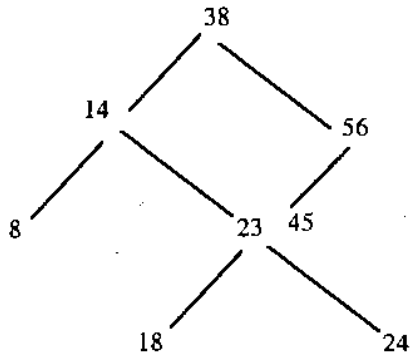


উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর রচনামূল প্রশ্নোত্তর ৪৭ নং দ্রষ্টব্য।

১৯। ২৬ নোড বিশিষ্ট একটি Complete Birary tree অঙ্কন কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩১ নং দ্রষ্টব্য।

২০। নিচের চিত্রটি বাইনারি সার্চ ট্রি। এক্ষেত্রে 23 কে যদি 35 এবং 39 দিয়া পরিবর্তিত করা হয়, তবে এটা বাইনারী সার্চ ট্রি হবে কী?



উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সমস্যাবলী ২ নং দ্রষ্টব্য।

গ-বিভাগ (মান ঃ ৪ × ৫ = ২০)

২১। চিত্রসহ One-to-one এবং onto ফাংশনের পার্থক্য বর্ণনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৫৪ নং দ্রষ্টব্য।

২২। একটি বাক্সে ৪টি সাদা, ৫টি লাল এবং ৬টি নীল রঙের বল আছে। বাক্স হতে দৈবভাবে ৩টি বল নেয়া হলো। নিম্নোক্ত ক্ষেত্রে সম্ভাব্যতাগুলো নির্ণয় কর ঃ

(ক) ৩টি ৩ রঙের বল (খ) ২টি সাদা ১টি অন্য রঙের (গ) ৩টি সাদা।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক ৬৭ নং দ্রষ্টব্য।

২৩। বাইনারী ট্রি ট্রাভার্সিং এর পদ্ধতিগুলো উদাহরণসহ বর্ণনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪১ নং দ্রষ্টব্য।

২৪। তিনটি সেট A = {1, 2, 3 }, B = {1, 2, 3, 4 } এবং C = { 0, 1, 2 } এর ক্ষেত্রে A থেকে B এর Relation

R = {(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4) ও B থেকে C এর relation

S = {(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1) হলে arrow diagram এর সাহায্যে RoS নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলী ৫ নং দ্রষ্টব্য।

২৫। প্রমাণ কর যে, ${}^{n+1}C_r = {}^{n}C_{r-1} + {}^{n}C_{r+}$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সমস্যাবলী ২৫ নং দ্রষ্টব্য।

বাংলাদেশ কারিগরি শিক্ষা বোর্ড, ঢাকা

ডিপ্লোমা-ইন-ইঞ্জিনিয়ারিং শিক্ষাক্রম

চতুর্থ পর্ব সমাপনী পরীক্ষা-২০০৭

টেকনোলজি ঃ কম্পিউটার

বিষয় ঃ ডিসক্রিট ম্যাথমেটিক্স

[বিষয় কোড ঃ ২৬৪৪]

সময় ঃ ৩ ঘণ্টা পূর্ণমান ঃ ৫০

ক ও খ বিভাগের সকল প্রশ্নের এবং গ বিভাগের যে কোন ৪ (চার) টি প্রশ্নের উত্তর দাও।

ক-বিভাগ (মান ঃ ১০ × ১ = ১০)

১। বিবৃতি বা প্রতিজ্ঞা কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১০ নং দ্রষ্টব্য।

২। বিযুক্ত বা সংযোগহীন সেট কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৩ নং দ্রষ্টব্য।

৩। অন্বয়ের ডোমেন বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৫ নং দ্রষ্টব্য।

৪। বিপরীত বা ইনভার্স ম্যাট্রিক্স কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৭ নং দ্রষ্টব্য।

৫। গণনা বা কাউন্টিং বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২ নং দ্রষ্টব্য।

৬। সম্ভাব্যতার গাণিতিক সূত্রটি কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২ নং দ্রষ্টব্য।

৭। "ডিরেকটেড গ্রাফ" বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৩ নং দ্রষ্টব্য।

৮। বিভিন্ন প্রকার রিলেশনের নাম লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১২ নং দ্রষ্টব্য।

৯। "কানেক্টিভিটি" বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৯ নং দ্রষ্টব্য।

১০। অসম্ভব ঘটনা (Impossible Events) কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২০ নং দ্রষ্টব্য।

খ-বিভাগ (মান ঃ ১০ × ২ = ২০)

১১। প্রমাণ কর যে, $A' - B' = B - A$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলী ২৩ (iv) নং দ্রষ্টব্য।

১২। $(x + y, 4)$ এবং $(9, x - y)$ ক্রমজোড় দু'টি মান হলে, x এবং y এর মান কত?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলী ২৯ নং দ্রষ্টব্য।

১৩। সেট, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং $B = \{x, y, z\}$; ধরি (R (Relation) = $\{(1, y), (2, z), (2, y)\}$। ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলী ২০ নং দ্রষ্টব্য।

১৪। যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$ হয়, তবে A^3 এর মান বের কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর সমস্যাবলী ১৩ নং দ্রষ্টব্য।

১৫। যদি ভেক্টর $u = (2, 3, -1)$ এবং $\theta = -5, 1, 8)$ হয়, তবে $u.\theta = ?$ এবং $\| u \| = ?$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১০ নং দ্রষ্টব্য।

১৬। প্রমাণ কর যে, $n_{C_{n-r}} = n_{C_r}$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৯ নং দ্রষ্টব্য।

১৭। একটি মুদ্রা তিনবার নিক্ষেপ করা হল, উপরের পিঠে-

(ক) কোন হেড না আসার সম্ভাবনা কত?

(খ) একটি হেড আসার সম্ভাবনা কত?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর উদাহরণ ৫.১৬ নং দ্রষ্টব্য।

১৮। একটি বাইনারী ট্রি এর ট্রেভারসিং পদ্ধতি বর্ণনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪১ নং দ্রষ্টব্য।

১৯। একটি পূর্ণ ট্রি, যার 31টি নোড আছে। নোড 10 এর অনুজ এবং অগ্রজ বের কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৮ নং দ্রষ্টব্য।

২০। যদি $n_{C_{12}} = n_{C_8}$ হয়, তবে 22_{C_n} এর মান নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২০ নং দ্রষ্টব্য।

গ-বিভাগ (মান ঃ ৪ × ৫ = ২০)

২১। দ্যা-মরগানের সূত্র (De-Morgan's Rules) দু'টি প্রমাণ কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৬০ নং দ্রষ্টব্য।

২২। Reflexive ও Symmentric এর উদাহরণসহ ব্যাখ্যা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৬, ১৮ নং দ্রষ্টব্য।

২৩। প্রমাণ কর যে, $n_{C_r} + n_{C_{r-1}} = n + 1_{C_r}$

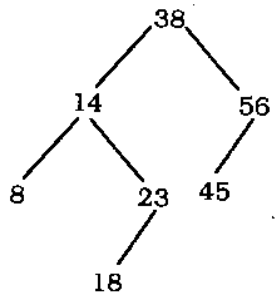
উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সমস্যাবলী ৩৫ নং দ্রষ্টব্য।

২৪। প্রমাণ কর যে,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪১ নং দ্রষ্টব্য।

২৫। নিচের চিত্রটি বাইনারী সার্চ ট্রি। এক্ষেত্রে 23 কে যদি 35 এবং 40 দিয়ে পরিবর্তিত করা হয়, তবে ওটি বাইনারী সার্চ ট্রি হবে কী? যুক্তি উপস্থাপন কর।



উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সমস্যাবলী ২ নং দ্রষ্টব্য।

বাংলাদেশ কারিগরি শিক্ষা বোর্ড, ঢাকা

ডিপ্লোমা-ইন-ইঞ্জিনিয়ারিং শিক্ষাক্রম

চতুর্থ পর্ব সমাপনী পরীক্ষা-২০০৭

টেকনোলজি ঃ কম্পিউটার সায়েন্স অ্যান্ড টেকনোলজি, ঢাটা টেলিকমিউনিকেশন অ্যান্ড নেটওয়ার্কিং

বিষয় ঃ ডিসক্রিট ম্যাথমেটিক্স্

(বিষয় কোডঃ ৪৫৪৪)

সময় ঃ ৩ ঘণ্টা পূর্ণমান ঃ ৫০

ক ও খ বিভাগের সকল প্রশ্নের এবং গ বিভাগের যে কোন ৪ (চার) টি প্রশ্নের উত্তর দাও।

ক-বিভাগ (মান ঃ ১০ × ১ = ১০)

১। Discrete Mathematics কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১ নং দ্রষ্টব্য।

২। বেসিক লজিক্যাল অপারেশনগুলোর নাম লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৫ নং দ্রষ্টব্য।

৩। Venn Diagram কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২১ নং দ্রষ্টব্য।

৪। সেট $A = \{4, 5\}, B = \{x, y\}$ হলে $A \times B$ = কত?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২২ নং দ্রষ্টব্য।

৫। রিকার্সিভ ফাংশন কাকে বলে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪১ নং দ্রষ্টব্য।

৬। Zero ভেক্টরের সংজ্ঞা লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১২ নং দ্রষ্টব্য।

৭। Inverse Matrix বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৭ নং দ্রষ্টব্য।

৮। ফাংশনের Domain কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৮ নং দ্রষ্টব্য।

৯। Pegeon hole নীতিটি লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৬ নং দ্রষ্টব্য।

১০। একটি ছক্কা ছুড়ে মারলেও না পড়ার সম্ভাবনা কত?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৫ নং দ্রষ্টব্য।

১১। Sample space এর সংজ্ঞা লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৫ নং দ্রষ্টব্য।

১২। Directed গ্রাফ কাকে বলে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৩ নং দ্রষ্টব্য।

১৩। লুপ বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৪ নং দ্রষ্টব্য।

১৪। Degree of Nodes বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩০ নং দ্রষ্টব্য।

১৫। Binary Tree কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৫ নং দ্রষ্টব্য।

খ-বিভাগ (মান : ১০ × ২ = ২০)

১৬। এলগরিদম কমপ্লেক্সিটি বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪৭ নং দ্রষ্টব্য।

১৭। One to One এবং On to ফাংশনের পার্থক্য লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪৮ নং দ্রষ্টব্য।

১৮। অন্বয় ও মেট্রিক্সের যোজন বর্ণনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৩৫ নং দ্রষ্টব্য।

১৯। গণনার Sum Rule Principle ও Product Rule Principle ব্যাখ্যা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৫, ৪ নং দ্রষ্টব্য।

২০। Independent Event কী? উদাহরণসহ ব্যাখ্যা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৬ নং দ্রষ্টব্য।

২১। কোন ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা P এবং না ঘটার সম্ভাবনা q হলে দেখাও যে, $p + q = 1$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৫২ নং দ্রষ্টব্য।

২২। Conditional probability সম্পর্কে সংক্ষিপ্ত বর্ণনা দাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৪ নং দ্রষ্টব্য।

২৩। Isomorphic গ্রাফ চিত্রসহ বর্ণনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৪ নং দ্রষ্টব্য।

২৪। গ্রাফ ও মাল্টিগ্রাফারের মাঝে পার্থক্য লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৩ নং দ্রষ্টব্য।

২৫। এক্সপ্রেসন $E = (a - b) / \{(c^* d) + (e + f)\}$ কে বাইনারি ট্রিতে প্রকাশ কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৭ নং দ্রষ্টব্য।

গ-বিভাগ (মান : ৪ × ৫ = ২০)

২৬। অন্বয়ের বিভিন্ন প্রকার বৈশিষ্ট্য উদাহরণসহ বর্ণনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৩৬ নং দ্রষ্টব্য।

২৭। Gaussian elimination এর সাহায্যে $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ এর Inverse Matrix নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪১ নং দ্রষ্টব্য।

২৮। তিনটি Finite set A, B ও C হলে দেখাও যে, $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(c)\ n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৩৫ নং দ্রষ্টব্য।

২৯। দ্বিপদী উপপাদ্য ও প্যাসকেল ত্রিভুজ সম্পর্কে বিস্তারিত বর্ণনা দাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ২২ নং দ্রষ্টব্য।

৩০। Digital কম্পিউটার সিসটেমে Discrete mathematics এর গুরুত্ব বর্ণনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৫৪ নং দ্রষ্টব্য।

৩১। Binary search tree তে একটি নতুন Item Insert করার Algorithm উদাহরণের সাহায্যে বর্ণনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪২ নং দ্রষ্টব্য।

বাংলাদেশ কারিগরি শিক্ষা বোর্ড, ঢাকা

ডিপ্লোমা-ইন-ইঞ্জিনিয়ারিং শিক্ষাক্রম

চতুর্থ পর্ব সমাপনী পরীক্ষা-২০০৮

টেকনোলজি ঃ কম্পিউটার, কম্পিউটার সাইয়েন্স অ্যান্ড টেকনোলজি এবং ডাটা টেলিকমিউনিকেশন অ্যান্ড নেটওয়ার্কিং

বিষয় ঃ ডিসক্রিট ম্যাথমেটিক্স্

(বিষয় কোডঃ ২৬৪৪)

সময় ঃ ৩ ঘণ্টা পূর্ণমান ঃ ৫০

ক ও খ বিভাগের সকল প্রশ্নের এবং গ বিভাগের যে কোন ৪ (চার) টি প্রশ্নের উত্তর দাও।

ক-বিভাগ (মান ঃ ১০ × ১ = ১০)

১ যৌগিক বিবৃতি বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৪ নং দ্রষ্টব্য।

২ Venn, Euler, Diagram কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২১ নং দ্রষ্টব্য।

৩ বিপরীত ফাংশন বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪২ নং দ্রষ্টব্য।

৪। প্রতিসাম্য অন্বয় বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৮ নং দ্রষ্টব্য।

৫। Identity Matrices কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৭ নং দ্রষ্টব্য।

৬। ম্যাট্রিক্সের Order কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৯ নং দ্রষ্টব্য।

৭। একক ম্যাট্রিক্স কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১০ নং দ্রষ্টব্য।

৮। একটি মুদ্রা দু'বার নিক্ষেপ করা হল, নমুনা ক্ষেত্রটি লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৯ নং দ্রষ্টব্য।

৯। ভেক্টর কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১ নং দ্রষ্টব্য।

১০। ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১ নং দ্রষ্টব্য।

খ-বিভাগ (মান ঃ ১০ × ২ = ২০)

১। ধরি, A = {1, 2, 3, 4, 5} এবং B = {a, b, c, d} এবং ফাংশন f = {(1, b), (2, a), (3, d), (4, a), (5, d)} এর ডোমেন ও রেঞ্জ বের কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪৯ নং দ্রষ্টব্য।

১২। One to one এবং on to function বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪৪, ৪৫ নং দ্রষ্টব্য।

১৩। প্রমাণ কর যে, pv (q ^ r) এবং (pvq) ^ (pvr) লজিক্যালি সমান।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলী ২ নং দ্রষ্টব্য।

১৪। Elementary row operation গুলো কী, লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১২ নং দ্রষ্টব্য।

১৫। প্রমাণ কর যে, $\binom{n+r}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪, এর সমস্যাবলী ২৫ নং দ্রষ্টব্য।

১৬। Complete Binary tree বলতে কী বুঝায়, উদাহরণসহ লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৩ নং দ্রষ্টব্য।

১৭। কাউন্টিং এর নীতি দুটি কী কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩ নং দ্রষ্টব্য।

১৮। Distance এবং Diameter বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৮ নং দ্রষ্টব্য।

১৯। A = {a, b, c} সেট হতে B = {1, 2} সেটের মাঝে মোট রিলেশন সংখ্যা বের কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলী ২ নং দ্রষ্টব্য।

২০। Degree of vertex কী, উদাহরণসহ লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪০ নং দ্রষ্টব্য।

গ-বিভাগ (মান ঃ ৪ × ৫ = ২০)

২১। ডিজিটাল কম্পিউটার সিস্টেমে ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স এর গুরুত্ব আলোচনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৫৪ নং দ্রষ্টব্য।

২২। মনে করি, A = {1, 2, 3}, B = {a, b, c}, c = {x, y, z}, অন্বয় R = {(1, b), (2, a), (2, c)}, অন্বয় S = {(a, y), (b, x), (c, y), (c, z)} হলে R,s এর যোজিত অন্বয় এবং Ros অন্বয়ের ম্যাট্রিক্স M_{Ros} এর মান বের কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলী ২৪ নং দ্রষ্টব্য।

২৩। n এর মান 0 থেকে 6 এর মাঝে হলে $(a + b)^n$ এর বিস্তৃতি দেখিয়ে প্যাসকেলের ট্রায়াঙ্গেল এঁকে তার বৈশিষ্ট্যগুলো লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সমস্যাবলী ২৬ নং দ্রষ্টব্য।

২৪। দুটি বর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাবনার সংযোগ সূত্র লেখ এবং প্রমাণ কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪৪ নং দ্রষ্টব্য।

২৫। Isomorphic graph উদাহরণসহ ব্যাখ্যা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৪ নং দ্রষ্টব্য।

বাংলাদেশ কারিগরি শিক্ষা বোর্ড, ঢাকা

ডিপ্লোমা-ইন-ইঞ্জিনিয়ারিং শিক্ষাক্রম

চতুর্থ পর্ব পরিপূরক পরীক্ষা-২০০৯

টেকনোলজি ঃ কম্পিউটার, কম্পিউটার সাইয়েন্স অ্যান্ড টেকনোলজি ও ডাটা টেলিকমিউনিকেশন অ্যান্ড নেটওয়ার্কিং

বিষয় ঃ ডিসক্রিট ম্যাথমেটিক্স

(বিষয় কোডঃ ২৬৪৪)

সময় ঃ ৩ ঘণ্টা পূর্ণমান ঃ ৫০

ক ও খ বিভাগের সকল প্রশ্নের এবং গ বিভাগের যে কোন ৪ (চার) টি প্রশ্নের উত্তর দাও।

ক-বিভাগ (মান ঃ ১০ × ১ = ১০)

১। Compound proposition বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৪ নং দ্রষ্টব্য।

২। De morgan's এর সূত্র দুটি লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ২৩ নং দ্রষ্টব্য।

৩। Function এর ডোমেন কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৮ নং দ্রষ্টব্য।

৪। এলগরিদম এর Complexity কয় প্রকার ও কী কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪৩ নং দ্রষ্টব্য।

৫। Invrse matrix কাকে বলে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৭ নং দ্রষ্টব্য।

৬। Counting এর নীতি দুটি লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩ নং দ্রষ্টব্য।

৭। ${}^{n}C_{r}$ এবং ${}^{n}P_{r}$ নোটেশনের অর্থ কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৯, ১০ নং দ্রষ্টব্য।

৮। সম্ভাব্যতার গাণিতিক সূত্রটি লেখ?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২ নং দ্রষ্টব্য।

৯। Connectivity বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২১ নং দ্রষ্টব্য।

১০। Complete Graph কাকে বলে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৭ নং দ্রষ্টব্য।

খ-বিভাগ (মান ঃ ১০ × ২ = ২০)

১১। one to one এবং on to funetion এর মাঝে পার্থক্য লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪৮ নং দ্রষ্টব্য।

১২। প্রমাণ কর যে, $(A - B) = (B - A) = (A = B) = (A = B)$ যেখানে $A = \{1.2.3.4.5\}$ এবং $B = \{2.3.5.6.7\}$।

উত্তর সংকেত সিলেবাস বহির্ভূত।

১৩। $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ হলে প্রমাণ কর $AB \neq BA$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর উদাহরণ ৩.৫ নং দ্রষ্টব্য।

১৪। প্রমাণ কর যে, ${}^nC_{n-r} = {}^nC_r$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৯ নং দ্রষ্টব্য।

১৫। Union এবং Intersection এর মাঝে পার্থক্য কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৫১ নং দ্রষ্টব্য।

১৬। Polytechnic শব্দ থেকে প্রতিবার ৫টি বর্ণ নিয়ে কয়ভাবে সাজানো যায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৮ নং দ্রষ্টব্য।

১৭। Pascal Triangle কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৫ নং দ্রষ্টব্য।

১৮। কপোত বিবরের মূলনীতি লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৪ নং দ্রষ্টব্য।

১৯। সমরূপ ও বর্ধিত Binary Tree বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২১, ২৪ নং দ্রষ্টব্য।

২০। Graph এর Cut point ও Bridge কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৪ নং দ্রষ্টব্য।

গ-বিভাগ (মান ঃ ৪ × ৫ = ২০)

২১। ডিজিটাল কম্পিউটার ইলেকট্রনিক্স-এর ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স এর গুরুত্ব বর্ণনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৫৪ নং দ্রষ্টব্য।

২২। উদাহরণসহ অন্বয়ের প্রকারভেদ বর্ণনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ২৯ নং দ্রষ্টব্য।

২৩। শর্তাধীন সম্ভাবনা (Conditional Probability) উদাহরণসহ ব্যাখ্যা কর। A এবং B ঘটনা দুটো পরস্পর অধীন হলে প্রমা কর যে, $P(A\backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪৭ নং দ্রষ্টব্য।

২৪। Traverсing Binary Tree এর Method গুলো উদাহরণসহ বর্ণনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪১ নং দ্রষ্টব্য।

২৫। Matrix Algorithm কী? যোগ ও গুণের ক্ষেত্রে Matrix Algorithm লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৩১ নং দ্রষ্টব্য।

বাংলাদেশ কারিগরি শিক্ষা বোর্ড, ঢাকা

ডিপ্লোমা-ইন-ইঞ্জিনিয়ারিং শিক্ষাক্রম

২য়, ৪র্থ, ৬ষ্ঠ ও ৮ম পর্ব সমাপনী পরীক্ষা-২০০৯

টেকনোলজি ঃ কম্পিউটার, কম্পিউটার সাইয়েন্স অ্যান্ড টেকনোলজি ও ডাটা টেলিকমিউনিকেশন অ্যান্ড নেটওয়ার্কিং

বিষয় ঃ ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স

(বিষয় কোড ঃ ২৬৪৪)

সময় ঃ ৩ ঘণ্টা পূর্ণমান ঃ ৫০

ক ও খ-বিভাগের সকল প্রশ্নের এবং গ-বিভাগের যে কোন ৪ (চার)টি প্রশ্নের উত্তর দাও।

ক-বিভাগ (মান ঃ ১০ × ১ = ১০)

১। Proposition বা বিবৃতি বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১০ নং দ্রষ্টব্য।

২। Pascal Triangle কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৫ নং দ্রষ্টব্য।

৩। Complete Graph কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৭ নং দ্রষ্টব্য।

৪। Independent Event কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৬ নং দ্রষ্টব্য।

৫। নিশ্ছেদ সেট (Disjoint set) বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৩ নং দ্রষ্টব্য।

৬। বাইনারি ট্রী কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৭ নং দ্রষ্টব্য।

৭। মাল্টি গ্রাফ কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২২ নং দ্রষ্টব্য।

৮। টটোলজি কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৬ নং দ্রষ্টব্য।

৯। কানেকটিভিটি বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২১ নং দ্রষ্টব্য।

১০। Directed Graph বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৩ নং দ্রষ্টব্য।

খ-বিভাগ (মান ঃ ১০ × ২ = ২০)

১১। তিনটি Proposition p, q এবং r-এর মাঝে যদি p এবং r সত্য হয় এবং q মিথ্যা, হয়, তাহলে নিচের যৌগিক Propositionটি সত্য না মিথ্যা হবে? $\neg ((p \vee r) \wedge (q \wedge r))$

p : মাহমুদ ডিপ্লোমা ইঞ্জিনিয়ারিং পাস করেছে;

q : সে একটি ভালো চাকরি পেয়েছে;

r : কিন্তু মাহমুদের চাকরি ভালো লাগছে না।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলী ৩৩ নং দ্রষ্টব্য।

১২। পিজিয়ন হোল নীতি উদাহরণসহ বুঝিয়ে লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৪ নং দ্রষ্টব্য।

১৩। পাশের চিত্রের G_1 গ্রাফটি G_2 গ্রাফের সাব-গ্রাফ কী না, যুক্তি দাও ঃ

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৮ নং দ্রষ্টব্য।

১৪। $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $A = \{a,b, d\}$, $B = \{b,e, f\}$, $C = \{a,e, g\}$ হলে $(A \cup C)' \cap (B \cup C)' \cup (A \cup B)'$-এর মান নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলী ৩২ নং দ্রষ্টব্য।

১৫। One to one এবং Onto ফাংশনের মাঝে পার্থক্য কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪৮ নং দ্রষ্টব্য।

১৬। $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ দেখাও যে, উহারা ইনভার্স মেট্রিক্স।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৪ নং দ্রষ্টব্য।

১৭। POLYTECHNIC শব্দ থেকে প্রতিবার 5টি বর্ণ নিয়ে কয়ভাবে সাজানো যায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৮ নং দ্রষ্টব্য।

১৮। Union এবং Intersection-এর মাঝে পার্থক্য কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৫১ নং দ্রষ্টব্য।

১৯। প্রদত্ত চিত্র-১ এ প্রদর্শিত বাইনারি ট্রী টির Inorder এবং Preorder Traversal লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৯ নং দ্রষ্টব্য।

২০। গ্রাফ এবং ট্রী-র মাঝে পার্থক্য চিত্রসহ দেখাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৩ নং দ্রষ্টব্য।

গ-বিভাগ (মান ঃ ৪ × ৫ = ২০)

২১। $1.2 + 2.5 + 3.8 + ...$ ধারাটির n তম পদ পর্যন্ত যোগফল নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর উদাহরণ ৪.২৪ নং দ্রষ্টব্য।

২২। এক প্যাকেট তাস থেকে দৈবভাবে একটি তাস নেয়া হলে তাসটি (ক) হরতন বা ইস্কাবন এবং (খ) হরতন বা রাজা হবার সম্ভাবনা কত?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক ৭৪ নং দ্রষ্টব্য।

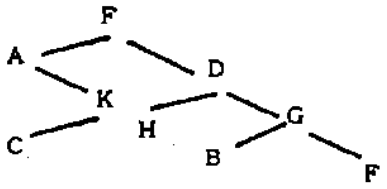
২৩। দেয়া আছে $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C \{x, y, z\}$ আরও দেয়া আছে A থেকে B এর রিলেশন, $R = \{(1, b), (2,b), (2, c)\}$ এবং B থেকে C এর রিলেশন $S = \{(a, y), (b, x), (c, y), (c, z)\}$। R_oS এবং M_R, M_S নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলি-২৩ নং দ্রষ্টব্য।

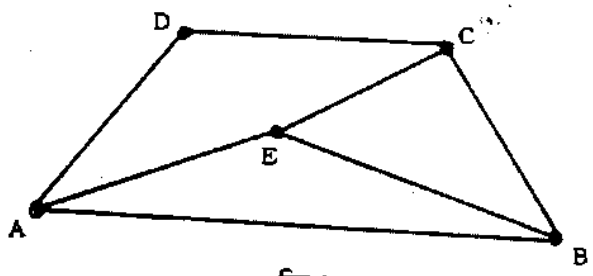
২৪। নিচের চিত্র-১ এর ট্রী টি একটি Complete Binary Tree এবং একটি Binary Search Tree কী না? উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও।

উত্তর সংকেত উদাহরণ ৭.১২ নং দ্রষ্টব্য।

২৫। নিচের চিত্র-২ এর গ্রাফটির সকল নোডের Degree of Vertex নির্ণয় কর। দেখাও বাহু সংখ্যা = Sum of Degree of Vertex/2।



চিত্র-১



চিত্র-২

চিত্র ঃ

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সমস্যাবলি-১২ নং দ্রষ্টব্য।

বাংলাদেশ কারিগরি শিক্ষা বোর্ড, ঢাকা

ডিপ্লোমা-ইন-ইঞ্জিনিয়ারিং শিক্ষাক্রম

চতুর্থ পর্ব সমাপনী পরীক্ষা-২০১০

টেকনোলজি ঃ কম্পিউটার, কম্পিউটার সাইয়েন্স অ্যান্ড টেকনোলজি ও ডাটা টেলিকমিউনিকেশন অ্যান্ড নেটওয়ার্কিং

বিষয় ঃ ডিসক্রিট ম্যাথমেটিক্স

(বিষয় কোডঃ ২৬৪৪)

সময় ঃ ৩ ঘণ্টা পূর্ণমান ঃ ৫০

ক ও খ বিভাগের সকল প্রশ্নের এবং গ বিভাগের যে কোন ৪ (চার) টি প্রশ্নের উত্তর দাও।

ক-বিভাগ (মান ঃ ১০ × ১ = ১০)

১। গ্রাফের কাটপয়েন্ট বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৪ নং দ্রষ্টব্য।

২। Proposition বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১০ নং দ্রষ্টব্য।

৩। কাউন্টিং এর দুটি নীতি উল্লেখ কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩ নং দ্রষ্টব্য।

৪। স্যামপল স্পেস বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৫ নং দ্রষ্টব্য।

৫। $A = \{1, 2\}$ এবং $B = \{a, b, c\}$ হলে $A \times B = ?$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলী ৩১ নং দ্রষ্টব্য।

৬। ${}^{6}C_{3}$ এর মান কত?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৮ নং দ্রষ্টব্য।

৭। ইনভার্স ম্যাট্রিক্স কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৭ নং দ্রষ্টব্য।

৮। Degree of vertex বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২০ নং দ্রষ্টব্য।

৯। Extended binary tree কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৪ নং দ্রষ্টব্য।

১০। ফাংশন বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৭ নং দ্রষ্টব্য।

খ-বিভাগ (মান ঃ ১০ × ২ = ২০)

১১। উদাহরণসহ One to one এবং On to ফাংশনের বর্ণনা দাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৫৭ নং দ্রষ্টব্য।

১২। উদাহরণসহ Pigeon hole নীতির বর্ণনা দাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৪ নং দ্রষ্টব্য।

১৩। গ্রাফ এবং ট্রি এর মাঝে পার্থক্য লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৩ নং দ্রষ্টব্য।

১৪। প্যাসকেলের ত্রিভুজ সূত্রটি বিবৃত কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৫ নং দ্রষ্টব্য।

১৫। প্রমাণ কর যে, ${}^{n}C_{n-r} = {}^{n}C_{r}$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৯ নং দ্রষ্টব্য।

১৬। একটি পূর্ণ ট্রি যার 31টি নোড আছে। নোড 10 এর অনুজ এবং অগ্রজ বের কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৮ নং দ্রষ্টব্য।

১৭। কমপ্লিট ও এক্সটেনডেড বাইনারি ট্রি এর মাঝে পার্থক্য লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৫ নং দ্রষ্টব্য।

১৮। একটি কয়েন ৬ বার টস করা হল। ২ বার হেড পড়ার সম্ভাবনা কত?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সমস্যাবলি-৭৭ নং দ্রষ্টব্য।

১৯। বাইনারি ট্রি ট্রাভার্স করার ইন অর্ডার এলগরিদমটি উল্লেখ কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৬ নং দ্রষ্টব্য।

২০। চিত্রসহ Graph এর ক্ষেত্রে Bridge বর্ণনা দাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৪ নং দ্রষ্টব্য।

গ-বিভাগ (মান ঃ ৪ × ৫ = ২০)

২১। তিনটি সেট A = (1, 2, 3,}, B = {1, 2, 3, 4} এবং C = {0, 1, 2} এর ক্ষেত্রে A থেকে B এর Relation R= {(1, 1), (1, 4), 2, 3), (3, 1), 3, 4)} ও B থেকে C এর Relation S = {(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), 4, 1)} হলে arrow diagram এর সাহায্যে Ros নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলী ৫ নং দ্রষ্টব্য।

২২। গাউশিয়ান ইলিমিনেশন পদ্ধতিতে $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ এর ইনভার্স মেট্রিক্স নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৩৬ নং দ্রষ্টব্য।

২৩। এক জোড়া ছক্কা একসাথে ছোড়া হল। ছক্কাদ্বয়ের প্রদর্শিত সংখ্যার সমষ্টি 6 এবং যে কোন একটির সংখ্যা ২ হওয়ার সম্ভাবনা কত?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর সমস্যাবলি-৭৮ নং দ্রষ্টব্য।

২৪। উদাহরণসহ অন্বয়ের প্রকারভেদ বর্ণনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ২৯ নং দ্রষ্টব্য।

২৫। কমপ্লেক্সিটি অব এলগরিদম বলতে কী বুঝায়। ব্যাখ্যা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৫৯ নং দ্রষ্টব্য।

বাংলাদেশ কারিগরি শিক্ষা বোর্ড, ঢাকা

ডিপ্লোমা-ইন-ইঞ্জিনিয়ারিং শিক্ষাক্রম

২য়, ৪র্থ ও ৬ষ্ঠ পর্ব পরিপূরক পরীক্ষা-২০১০

টেকনোলজি ঃ কম্পিউটার, কম্পিউটার সাইয়েন্স অ্যান্ড টেকনোলজি ও ডাটা টেলিকমিউনিকেশন অ্যান্ড নেটওয়ার্কিং

বিষয় ঃ ডিসক্রিট ম্যাথমেটিক্স

(বিষয় কোডঃ ২৬৪৪)

সময় ঃ ৩ ঘণ্টা পূর্ণমান ঃ ৫০

ক ও খ বিভাগের সকল প্রশ্নের এবং গ বিভাগের যে কোন ৪ (চার) টি প্রশ্নের উত্তর দাও।

ক-বিভাগ (মান ঃ ১০ × ১ = ১০)

১। ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স কাকে বলে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১ নং দ্রষ্টব্য।

২। গ্রাফের ক্ষেত্রে কাট পয়েন্ট বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২২ নং দ্রষ্টব্য।

৩। ডোমেইন ও রেঞ্জ বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৮ নং দ্রষ্টব্য।

৪। অন্বয় কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১ নং দ্রষ্টব্য।

৫। Equality of Matrices বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২০ নং দ্রষ্টব্য।

৬। $(10)_4$ এর মান কত?

উত্তর সংকেত সিলেবাস বহির্ভূত

৭। সম্ভাব্যতা কাকে বলে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১ নং দ্রষ্টব্য।

৮। ট্রিভিয়াল গ্রাফ (Travial Graph) বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১২ নং দ্রষ্টব্য।

৯। Binary Tree বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৭ নং দ্রষ্টব্য।

১০। কাউন্টিং বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২ নং দ্রষ্টব্য।

খ-বিভাগ (মান ঃ ১০ × ২ = ২০)

১১। প্রমাণ কর যে, $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলী ৯ (iii) নং দ্রষ্টব্য।

১২। E = (a* b) + c/(c + d)*e) এর বাইনারি এক্সপ্রেসন দেখাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৭ নং দ্রষ্টব্য।

১৩। $f(x) = \sqrt{64 - x^2}$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৯ নং দ্রষ্টব্য।

১৪। উদাহরণসহ ডিসজয়েন্ট সেট বুঝিয়ে লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৩ নং দ্রষ্টব্য।

১৫। Algorithm এর Complexity বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪৩ নং দ্রষ্টব্য।

১৬। উদাহরণসহ কমপ্লিট বাইনারি ট্রি বর্ণনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৩ নং দ্রষ্টব্য।

১৭। উদাহরণসহ Inverse matrix বর্ণনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৭ নং দ্রষ্টব্য।

১৮। Relation এর Property গুলো কী কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ২৮ নং দ্রষ্টব্য।

১৯। Isomorphic ও Homeomorphic graph এর মধ্যে পার্থক্য লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩০ নং দ্রষ্টব্য।

২০। প্রমাণ কর যে, কোন ঘটনা ঘটায় এবং না ঘটার সম্ভাব্যতার যোগফল 1.

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৫২ নং দ্রষ্টব্য।

গ-বিভাগ (মান ঃ ৪ × ৫ = ২০)

২১। তিনটি ঘটনা A, B, C পরস্পর অবর্জনশীল হলে প্রমাণ কর যে, $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪১ নং দ্রষ্টব্য।

২২। একটি কয়েন ৬ বার টস করা হল। ২ বার হেড পড়ার সম্ভাবনা কত? কমপক্ষে ৪ বার হেড পড়ার সম্ভাবনা কত হবে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৭৭ নং দ্রষ্টব্য।

২৩। দেখাও যে, ${}^nC_{r-1} + {}^nC_r = {}^{n+1}C_r$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সমস্যাবলী ২৫ নং দ্রষ্টব্য।

২৪। De-Morgan's Rule দুটি প্রমাণ কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর রচনামূলক ৬০ নং দ্রষ্টব্য।

২৫। গাউশিয়ান ইলিমিনেশন পদ্ধতিতে $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ এর ইনভার্স মেট্রিক্স নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৩৬ নং দ্রষ্টব্য।

বাংলাদেশ কারিগরি শিক্ষা বোর্ড, ঢাকা

ডিপ্লোমা-ইন-ইঞ্জিনিয়ারিং শিক্ষাক্রম

৪র্থ পর্ব পরিপূরক পরীক্ষা-২০১১

টেকনোলজি ঃ কম্পিউটার, কম্পিউটার সাইয়েন্স অ্যান্ড টেকনোলজি ও ডাটা টেলিকমিউনিকেশন অ্যান্ড নেটওয়ার্কিং

বিষয় ঃ ডিসক্রিট ম্যাথমেটিক্স

(বিষয় কোডঃ ২৬৪৪)

সময় ঃ ৩ ঘণ্টা পূর্ণমান ঃ ৫০

ক ও খ বিভাগের সকল প্রশ্নের এবং গ বিভাগের যে কোন ৪ (চার) টি প্রশ্নের উত্তর দাও।

ক-বিভাগ (মান ঃ ১০ × ১ = ১০)

১। ডিসক্রিট ম্যাথমেটিক্স কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১ নং দ্রষ্টব্য।

২। Intersection এর Van diagram দেখাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৭ নং দ্রষ্টব্য।

৩। Relation বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৮ নং দ্রষ্টব্য।

৪। Identity matrix এর সংজ্ঞা দাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১১ নং দ্রষ্টব্য।

৫। A ও B Matrices দুটো বিপরীত হওয়ার শর্ত লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৩ নং দ্রষ্টব্য।

৬। SUM rule principle টি লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৫ নং দ্রষ্টব্য।

৭। একটি ছক্কা নিক্ষেপ করলে বেজোড় সংখ্যাগুলো উপরে পাওয়ার সম্ভাব্যতা কয়বার?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর উদাহরণ ৫.১৭ নং দ্রষ্টব্য।

৮। Degree of vertex বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২০ নং দ্রষ্টব্য।

৯। একটি Graph কী কী উপাদান নিয়ে গঠিত?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৯ নং দ্রষ্টব্য।

১০। একটি Binary tree এর নোড-৯ Children নোড বের কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪ নং দ্রষ্টব্য।

খ-বিভাগ (মান ঃ ১০ × ২ = ২০)

১১। One to one ও On to function এর মাঝে পার্থক্য লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪৮ নং দ্রষ্টব্য।

১২। প্রমাণ কর ঃ $P \wedge (q \vee r) = (P \wedge q) \vee (P \wedge r)$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৬২ নং দ্রষ্টব্য।

১৩। Relation R = {(1, a), (1, b) (2, a) (2, c) (3, b) (4, d)}] এর Matrix ও Arrow diagram দেখাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলি-২২ নং দ্রষ্টব্য।

১৪। যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ হয়, তবে A^2 এর মান নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর সমস্যাবলী ৯ নং দ্রষ্টব্য।

১৫। যদি $n_{C_6} = n_{C_3}$ হয়, তবে 10_{C_n} এর মান বের কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সমস্যাবলি-৩৫ নং দ্রষ্টব্য।

১৬। কোন ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা P এবং না ঘটার সম্ভাব্যতা Q হলে প্রমাণ কর যে, P + Q = 1

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৫২ নং দ্রষ্টব্য।

১৭। Simple space ও Simple event বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৫,৯ নং দ্রষ্টব্য।

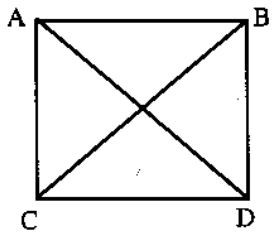
১৮। উদাহরণসহ Sub graph ব্যাখ্যা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩১ নং দ্রষ্টব্য।

১৯। Complete ও Extended binary tree এর মাঝে পার্থক্য লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৫ নং দ্রষ্টব্য।

২০। চিত্র ঃ ১ হতে প্রমাণ কর ঃ Edge সংখ্যা = 2x বাহুর সংখ্যা।



চিত্র ঃ ১

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৫ নং দ্রষ্টব্য।

গ-বিভাগ (মান ঃ ৪ × ৫ = ২০)

২১। Relation এর Properties এর বর্ণনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৩১ নং দ্রষ্টব্য।

২২। $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ হলে A এর Inverse matrix বের কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সমস্যাবলী ৩৬ নং দ্রষ্টব্য।

খ-বিভাগ (মান ঃ ১০ × ২ = ২০)

১১। One to one ও On to function এর মাঝে পার্থক্য লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪৮ নং দ্রষ্টব্য।

১২। প্রমাণ কর ঃ $P \wedge (q \vee r) = (P \wedge q) \vee (P \wedge r)$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৬২ নং দ্রষ্টব্য।

১৩। Relation R = {(1, a), (1, b) (2, a) (2, c) (3, b) (4, d)}] এর Matrix ও Arrow diagram দেখাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলি-২২ নং দ্রষ্টব্য।

১৪। যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ হয়, তবে A^2 এর মান নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর সমস্যাবলী ৯ নং দ্রষ্টব্য।

১৫। যদি ${}^{n}C_6 = {}^{n}C_3$ হয়, তবে ${}^{10}C_n$ এর মান বের কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সমস্যাবলি-৩৫ নং দ্রষ্টব্য।

১৬। কোন ঘটনা ঘটার সম্ভাব্যতা P এবং না ঘটার সম্ভাব্যতা Q হলে প্রমাণ কর যে, P + Q = 1

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৫২ নং দ্রষ্টব্য।

১৭। Simple space ও Simple event বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৫,৯ নং দ্রষ্টব্য।

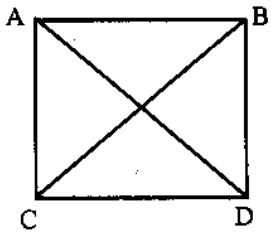
১৮। উদাহরণসহ Sub graph ব্যাখ্যা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩১ নং দ্রষ্টব্য।

১৯। Complete ও Extended binary tree এর মাঝে পার্থক্য লিখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৫ নং দ্রষ্টব্য।

২০। চিত্র ঃ ১ হতে প্রমাণ কর ঃ Edge সংখ্যা = 2x বাহুর সংখ্যা।



চিত্র ঃ ১

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৫ নং দ্রষ্টব্য।

গ-বিভাগ (মান ঃ ৪ × ৫ = ২০)

২১। Relation এর Properties এর বর্ণনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৩১ নং দ্রষ্টব্য।

২২। $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ হলে A এর Inverse matrix বের কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সমস্যাবলী ৩৬ নং দ্রষ্টব্য।

খ-বিভাগ (মান ঃ ৩ × ১০ = ৩০)

১১। এক-এক ফাংশন ও সর্বগ্রাহী ফাংশন বলতে কী বোঝায়? চিত্রসহ ব্যাখ্যা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৫৭ নং দ্রষ্টব্য।

১২। $f(x) = \sqrt{64 - x^2}$ দিয়ে বর্ণিত ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৯ নং দ্রষ্টব্য।

১৩। দুটি সেট A = {1, 2, 3}, B = {a, b, c} এবং R = {(1, a), (1, b), (3, a)} অম্বয়টিকে আয়তাকার Arrow পদ্ধতিতে দেখাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর অতি সমস্যাবলী ৬ নং দ্রষ্টব্য।

১৪। একটি সসীম সেট-এ Relation R = {(1, 1), (1, 2), (1,3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 2), (4, 4)} হলে একে Arrow diagram ও Matrix আকারে প্রকাশ কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলী ১১ নং দ্রষ্টব্য।

১৫। Echelon matrices এর দুটি বৈশিষ্ট্য লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৮ নং দ্রষ্টব্য।

১৬। বীজগণিতীয় রাশিমালা E = {(a * b) + c} /{(c + d) * e} এর বাইনারি ট্রী-ডায়াগ্রাম অঙ্কন কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৭ নং দ্রষ্টব্য।

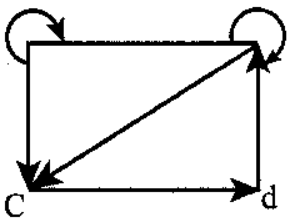
১৭। তিনটি মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করলে প্রাপ্ত নমুনা ক্ষেত্রটি লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৬০ নং দ্রষ্টব্য।

১৮। এক প্যাকেট তাস থেকে দৈবভাবে একটি তাস নেয়া হলে তাসটি হরতন বা ইস্কাবন এবং (খ) কুইন বা হরতন হওয়ার সম্ভাবনা কত?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৭৪ নং দ্রষ্টব্য।

১৯। নিচে প্রদর্শিত ধারযুক্ত চিত্রের প্রতি ভার্টেক্স এর Degree of vertex নির্ণয় কর ঃ



উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪৪ নং দ্রষ্টব্য।

২০। একটি Extended binary tree এর ছবি অঙ্কন করে দেখাও যে, Inernal node, $i = \frac{n-1}{2}$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর উদাহরণ ৭.৭ নং দ্রষ্টব্য।

গ-বিভাগ (মান ঃ ৬ × ৫ = ৩০)

২১। প্রমাণ কর যে, $PV(q \wedge r)$ এবং $(P \vee q) \wedge (P \vee r)$ এখানে p, q, r তিনটি Proposition।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলী-২ নং দ্রষ্টব্য।

২২। তিনটি সেট A = {1, 2, 3}, B = {1, 2, 3, 4}, C = (0, 1, 2} এর ক্ষেত্রে A থেকে B এর Relation R = {(1, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)} এবং B থেকে C এর Relation S = {(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)} হলে Arrow diagram এর সাথে R_oS নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলী ৫ নং দ্রষ্টব্য।

২৩। Gaussian elimination এর সাহায্যে $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ এর Inverse Matrix নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৩৩ নং দ্রষ্টব্য।

২৪। n-এর মান 0 থেকে 6 এর মাঝে হলে $(a + b)^n$ এর বিস্তৃতি দেখিয়ে প্যাসকেলের ট্রায়াঙ্গেল অঙ্কন করে তার বৈশিষ্ট্যগুলো লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সমস্যাবলী ২৬ নং দ্রষ্টব্য।

২৫। তিনটি ঘটনা A, B, C পরস্পর অবর্জনশীল হলে প্রমাণ কর যে,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪১ নং দ্রষ্টব্য।

২৬। একটি পূর্ণ ট্রীজ T, যার 26টি নোড আছে, তা অঙ্কন কর এবং 10 এর অনুজ এবং অগ্রজ বের কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সমস্যাবলী ১ নং দ্রষ্টব্য।

বাংলাদেশ কারিগরি শিক্ষা বোর্ড, ঢাকা

ডিপ্লোমা-ইন-ইঞ্জিনিয়ারিং

৪র্থ পর্ব সমাপনী পরীক্ষা-২০১৩

টেকনোলজি ঃ কম্পিউটার ও কম্পিউটার সায়েন্স অ্যান্ড টেকনোলজি (২০১০ প্রবিধান)

বিষয় ঃ ডিসক্রীট ম্যাথমেটিক্স

বিষয় কোড ঃ ৫৯৪২

সময় ঃ ৩ ঘণ্টা পূর্ণমান ঃ ৮০

ক ও খ-বিভাগের **সকল** প্রশ্নের এবং গ-বিভাগের যে-কোন ৫ (**পাঁচ**) টি প্রশ্নের উত্তর দাও।

ক-বিভাগ (মান ঃ ২ × ১০ = ২০)

১। টটোলজি (Tautology) বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৬ নং দ্রষ্টব্য।

২। এক-এক ফাংশন ও সর্বগ্রাহী ফাংশন বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪৪, ৪৫ নং দ্রষ্টব্য।

৩। Reflexive (প্রতিফলিত) Relation বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৬ নং দ্রষ্টব্য।

৪। ভেক্টরস্ ও ম্যাট্রিক্স বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১,২ নং দ্রষ্টব্য।

৫। ইনভার্স রিলেশন বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৭ নং দ্রষ্টব্য।

৬। এক প্যাকেট (৫২ টি) তাস হতে একটি তাস টানলে তাসটি কালো হওয়ার সম্ভাবনা কত?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর সমস্যাবলী ৭৫ নং দ্রষ্টব্য।

৭। Degree of vertex বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২০ নং দ্রষ্টব্য।

৮। একটি ছক্কা একবার নিক্ষেপ করলে উপরের পিঠে 6 আসার সম্ভাবনা কত?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর সমস্যাবলী ৭৬ নং দ্রষ্টব্য।

৯। কানেকটিভিটি বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২১ নং দ্রষ্টব্য।

১০। Binary tree বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৭ নং দ্রষ্টব্য।

খ-বিভাগ (মান ঃ ৩ × ১০ = ৩০)

১১। Echelon ম্যাট্রিক্সের শর্ত দুটি লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৮ নং দ্রষ্টব্য।

১২। p ও q দুটি Proposition হলে $p \vee q$-এর সত্য তালিকা লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৩ নং দ্রষ্টব্য।

১৩। দেখাও যে, $PV \sim (p \wedge q)$ বিবৃতি একটি টটোলজি।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৯ নং দ্রষ্টব্য।

১৪। দেয়া আছে, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, নিচের রিলেশনটির জন্য Directed গ্রাফ তৈরি কর ঃ

$R = \{(1,2), (2,3), (1,4), (3,3) (4,2), (4,4), (1,4), (1,3)\}$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলী ৪ নং দ্রষ্টব্য।

১৫। কপোত বিবর (Pigeon hole)-এর মূলনীতি উদাহরণসহ ব্যাখ্যা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৪ নং দ্রষ্টব্য।

১৬। এক প্যাকেট তাস থেকে দৈবভাবে একটি তাস নেয়া হলে তাসটির (ক) রুইতন বা ইস্কাবন; (খ) রাজা বা রুইতন হওয়ার সম্ভাবনা কত?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৭৪ নং দ্রষ্টব্য।

১৭। ১নং চিত্রে প্রদর্শিত ধারযুক্ত চিত্রের প্রতি ভার্টেক্স-এর Degree of vertex নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪৪ নং দ্রষ্টব্য।

১৮। ২নং চিত্রে প্রদর্শিত Binary tree টির Pre-order ও Inorder traversal লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৯ নং দ্রষ্টব্য।

১৯। একটি Extended binary tree-এর ছবি অঙ্কন কর এবং দেখাও যে, Internal node, $i = \frac{n-1}{2}$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর উদাহরণ ৭.৮ নং দ্রষ্টব্য।

২০। একটি সসীম সেটে রিলেশন $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4) (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)\}$ হলে এটিকে মেট্রিক্স আকারে প্রকাশ কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলী ১১ নং দ্রষ্টব্য।

গ-বিভাগ (মান ঃ ৬ × ৫ = ৩০)

২১। তিনটি সেট $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{x, y, z\}$-এর ক্ষেত্রে A থেকে B-এর

Relation $R = \{(1, a), (2, a), (2, d), (3, c), (4, d)\}$ এবং B থেকে C-এর

Relation $S = \{(b, x), (b, z), (c, y), (d, z)\}$ হলে $Mr \times Ms$ নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর উদাহরণ ২.২৩ নং দ্রষ্টব্য।

২২। Gaussian elimination পদ্ধতিতে সমীকরণটির সমাধান কর।

$x + 2y + z = 3$

$2x + 5y - z = -4$

$3x - 2y - z = 5$

উত্তর সংকেত সিলেবাস বহির্ভূত

২৩। n-এর মান 0 থেকে 5-এর মাঝে হলে $(a+b)^n$-এর বিস্তৃতি দেখিয়ে প্যাসকেলের ট্রিয়্যাঙ্গেল অঙ্কন করে তার বৈশিষ্ট্যগুলো লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর সমস্যাবলী ২৬ নং দ্রষ্টব্য।

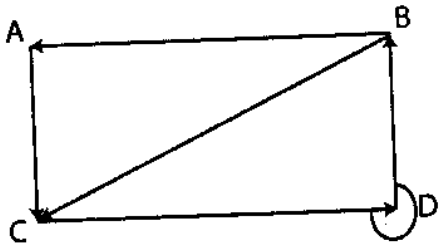
২৪। দুটি অবর্জনশীল ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাব্যতার সংযোগ সূত্র প্রমাণ কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪৫ নং দ্রষ্টব্য।

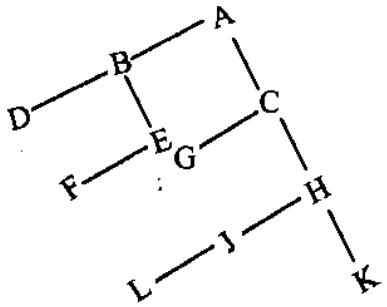
২৫। একটি পূর্ণ ট্রীজ T, যার 31 টি নোড আছে, তা অঙ্কন কর এবং 9 এর অগ্রজ ও অনুজ বের কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ১৮ নং দ্রষ্টব্য।

২৬। অন্বয়ের বৈশিষ্ট্যগুলোর বিস্তারিত বর্ণনা দাও।



চিত্র ঃ ১ নং



চিত্র ঃ ২ নং

উত্তর সংকেত উদাহরণ ৭.১৪ ও অনুশীলনী-৬, রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪৪ নং দ্রষ্টব্য।

বাংলাদেশ কারিগরি শিক্ষা বোর্ড, ঢাকা

ডিপ্লোমা-ইন-ইঞ্জিনিয়ারিং

৪র্থ পর্ব পরিপূরক পরীক্ষা-২০১৩

টেকনোলজি ঃ কম্পিউটার ও কম্পিউটার সাইয়েন্স (২০১০ প্রবিধান)

বিষয় ঃ ডিসক্রিট ম্যাথমেটিক্স

বিষয় কোড ঃ ৫৯৪২

সময় ঃ ৩ ঘন্টা পূর্ণমান ঃ ৮০

ক ও খ-বিভাগের **সকল** প্রশ্নের এবং গ-বিভাগের যে-কোন ৫ (পাঁচ) টি প্রশ্নের উত্তর দাও।

ক-বিভাগ (মান ঃ ২ × ১০ = ২০)

১। অ্যালগরিদম বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪৬ নং দ্রষ্টব্য।

২। ফাংশন কাকে বলে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৭ নং দ্রষ্টব্য।

৩। কাউন্টিং এর দুটি নীতি উল্লেখ কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩ নং দ্রষ্টব্য।

৪। প্রতিফলিত অম্বয় (Reflexive relation) কাকে বলে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৬ নং দ্রষ্টব্য।

৫। দুটি ভেক্টর $u = (3, -12, -4)$ এবং $v = (2, -7, 1)$ হলে $u + 2v$ নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর সমস্যাবলী-১৬ নং দ্রষ্টব্য।

৬। কপোত বিবর নীতি বর্ণনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৬ নং দ্রষ্টব্য।

৭। একটি মুদ্রা দু'বার নিক্ষেপ করা হলে, নমুনা ক্ষেত্রটি লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৯ নং দ্রষ্টব্য।

৮। ঘটনা বা Event কাকে বলে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৬ নং দ্রষ্টব্য।

৯। Multigraph কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২২ নং দ্রষ্টব্য।

১০। Extended binary tree কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৭ নং দ্রষ্টব্য।

খ-বিভাগ (মান ঃ ৩ × ১০ = ৩০)

১১। ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৮ নং দ্রষ্টব্য।

১২। $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর এবং $f(-3)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$-এর মাঝে কোনগুলোর মান নির্ণয় করা যায়, লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সমস্যাবলী ৩০ নং দ্রষ্টব্য।

১৩। Tree-এর বৈশিষ্ট্য লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২২ নং দ্রষ্টব্য।

১৪। One-One Function বর্ণনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪৪ নং দ্রষ্টব্য।

১৫। দেখাও যে, $PV \sim (p \wedge q)$ বিবৃতি একটি টটোলজি।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৯ নং দ্রষ্টব্য।

১৬। $(xy \sim ab)/(ab + xy)^2$ টি Tree আকারে দেখাও।

উত্তর সংকেত সিলেবাস বহির্ভূত।

১৭। $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ এবং $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ হলে AB এর মান নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর উদাহরণ-৩.১৫ নং দ্রষ্টব্য।

১৮। কপোত বিবরের মূলনীতি লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৬ নং দ্রষ্টব্য।

১৯। সম্ভাব্যতার গুণনের সূত্র (Multiplication law of probability) টি লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১২ নং দ্রষ্টব্য।

২০। Distance এবং Diameter বলতে কী বুঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১১ নং দ্রষ্টব্য।

গ-বিভাগ (মান ঃ ৬ × ৫ = ৩০)

২১। তিনটি সেট $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং $C = \{0, 1, 2\}$ এর ক্ষেত্রে A থেকে B-এর Relation $R = \{1, 1\}, (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4)$, ও B থেকে C এর Relation $S = \{(1, 0), (2, 0), (3, 1), (3, 2), (4, 1)\}$ হলে Arrow diagram-এর সাহায্যে R_0S নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলী ৫ নং দ্রষ্টব্য।

২২। Matrix multiplication এর Algorithm টি লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৩১ নং দ্রষ্টব্য।

২৩। গাউশিয়ান ইলিমিনেশন পদ্ধতিতে $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ এর বিপরীত (Inverse) ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৩৬ নং দ্রষ্টব্য।

২৪। তিনটি ঘটনা A, B, C পরস্পর অজর্বনশীল হলে প্রমাণ কর যে, $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪১ নং দ্রষ্টব্য।

২৫। একটি পূর্ণ ট্রী অঙ্কন কর, যার 31 টি নোড আছে এবং নোড 10 এর অনুজ ও অগ্রজ নির্ণয় কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৮ নং দ্রষ্টব্য।

২৬। গ্রাফ এবং ট্রী এর মাঝে পার্থক্য লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৩ নং দ্রষ্টব্য।

বাংলাদেশ কারিগরি শিক্ষা বোর্ড, ঢাকা

ডিপ্লোমা-ইন-ইঞ্জিনিয়ারিং

৪র্থ পর্ব পরিপূরক পরীক্ষা-২০১৪ *[পরীক্ষার তারিখঃ ৬-৭-২০১৪]*

টেকনোলজি ঃ কম্পিউটার ও কম্পিউটার সায়েন্স (২০১০ প্রবিধান)

বিষয় ঃ ডিসক্রিট ম্যাথমেটিক্স্

বিষয় কোড ঃ ৫৯৪২

সময় ঃ ৩ ঘণ্টা পূর্ণমান ঃ ৮০

ক ও খ-বিভাগের **সকল** প্রশ্নের এবং গ-বিভাগের যে-কোন ৫ **(পাঁচ)** টি প্রশ্নের উত্তর দাও।

ক-বিভাগ (মান ঃ ২ × ১০ = ২০)

১। Discrete ম্যাথমেটিক্স কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১ নং দ্রষ্টব্য।

২। De-Morgan's সূত্রটি লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২৩ নং দ্রষ্টব্য।

৩। প্রতিফলিত (Reflexive) অম্বয় কাকে বলে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৬ নং দ্রষ্টব্য।

৪। পিজিয়ন হোল মূলনীতি কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৬ নং দ্রষ্টব্য।

৫। সম্ভাব্যতার গাণিতিক সূত্রটি লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২ নং দ্রষ্টব্য।

৬। একটি মুদ্রা তিন বার নিক্ষেপ করলে প্রাপ্ত নমুনা ক্ষেত্রটি লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৬০ নং দ্রষ্টব্য।

৭। গ্রাফ কাকে বলে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৫ নং দ্রষ্টব্য।

৮। 52 তাসের প্যাকেট হতে একটি তাস টানলে কিং হওয়ার সম্ভাবনা কত?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২১ নং দ্রষ্টব্য।

৯। Degree of vertex বলতে কী বোঝায়?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২০ নং দ্রষ্টব্য।

১০। Binary tree কাকে বলে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১৭ নং দ্রষ্টব্য।

খ-বিভাগ (মান ঃ ৩ × ১০ = ৩০)

১১। এক-এক ফাংশন কাকে বলে?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৪৪ নং দ্রষ্টব্য।

১২। এলিমেন্টারি রো-অপারেশনগুলো উল্লেখ কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১২ নং দ্রষ্টব্য।

১৩। দুটি সেট A = {1, 2, 3}, B = {a, b, c} এবং R = {(1, a), (1, b), (3, a)} অম্বয়টিকে Arrow diagram পদ্ধতিতে দেখাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সমস্যাবলী ১ নং দ্রষ্টব্য।

১৪। Tree diagram কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪৩ নং দ্রষ্টব্য।

। ফাইনাইট প্রবাবিলিটি স্পেস-এর সংক্ষিপ্ত বর্ণনা দাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩৭ নং দ্রষ্টব্য।

১৬। Isomorphic এবং Homomorphic গ্রাফের মাঝে পার্থক্য লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৬ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৩০ নং দ্রষ্টব্য।

১৭। বাইনারি ট্রী-এর বৈশিষ্ট্যগুলো লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ২২ নং দ্রষ্টব্য।

১৮। অম্বয় কয় প্রকার ও কী কী?

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ১২ নং দ্রষ্টব্য।

১৯। Echelon মেট্রিক্স-এর শর্ত দুটি লেখ।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর অতি সংক্ষিপ্ত প্রশ্নোত্তর ৮ নং দ্রষ্টব্য।

২০। যদি একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা P এবং না ঘটার সম্ভাবনা Q হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $P + Q = 1$।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৫২ নং দ্রষ্টব্য।

গ-বিভাগ (মান ঃ ৬ × ৫ = ৩০)

২১। Discrete mathematics পাঠের গুরুত্ব বর্ণনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-১ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৫৪ নং দ্রষ্টব্য।

২২। গসিয়ান ইলিমিনেশন পদ্ধতি ব্যবহার করে সমাধান কর ঃ

$3x + 5y - 7z = 13$

$4x - y - 12z = 6$

$2x + 9y - 3z = 20$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৩ এর উদাহরণ ৩.৫.১ নং দ্রষ্টব্য।

২৩। দ্বিপদী সহগ ও প্যাসকেল ত্রিভুজ সম্পর্কে বিস্তারিত বর্ণনা কর।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৪ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ২২ নং দ্রষ্টব্য।

২৪। তিনটি ঘটনা A, B, C পরস্পর অবর্জনশীল হলে প্রমাণ কর যে,

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৫ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ৪১ নং দ্রষ্টব্য।

২৫। একটি বর্ধিত বাইনারি ট্রী অঙ্কন কর এবং দেখাও যে, অন্তঃস্থ নোডের সংখ্যা $i = \frac{n-1}{2}$

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-৭ এর উদাহরণ ৭.৮ নং দ্রষ্টব্য।

২৬। অম্বয়ের বৈশিষ্ট্য (Property) গুলোর বিস্তারিত বর্ণনা দাও।

উত্তর সংকেত অনুশীলনী-২ এর রচনামূলক প্রশ্নোত্তর ২৮ নং দ্রষ্টব্য।

www.BDeBooks.Com/polytechnic

BDeBooks.com

E-BOOK

www.BDeBooks.com
FB.com/BDeBooksCom
BDeBooks.Com@gmail.com